KINEMATIKA

- klid a pohyb jsou relativní
- trajektorie = čára, kterou při pohybu opisuje těleso
- dráha = délka trajektorie
- průměrná rychlost – v_p

  $v_p = \frac{s}{t}$ $[v_p] = m \cdot s^{-1}$

- rovnoměrný přímočarý pohyb
  - pohyb po přímce, rychlost se nemění

  $v = \frac{s - s_0}{t - t_0} \rightarrow v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

  $\boxed{\begin{array}{l} s_0 / t_0 / v_0 \\ \rightarrow \text{počáteční věci} \end{array}}$

- rovnoměrně zrychlený pohyb
  - rychlost se lineárně zvětšuje
  - průměrné zrychlení – a – změna rychlosti za určitou dobu

  $a = \frac{v - v_0}{t} \rightarrow v = v_0 + a \cdot t$

  - dráha
    - $v_0 = 0 \rightarrow s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$
    - $v_0 \neq 0 \rightarrow s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

  $\left\{ \begin{array}{l} v_p = \frac{v_0 + v}{2} \\ v = v_0 + a \cdot t \\ s = v_p \cdot t \end{array} \right.$

- rovnoměrně zpomalený pohyb

  $a = \frac{v_0 - v}{\Delta t} \rightarrow v = v_0 - a \cdot t$

  stejný princip, ale $v = v_0 - a \cdot t$

  $s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$

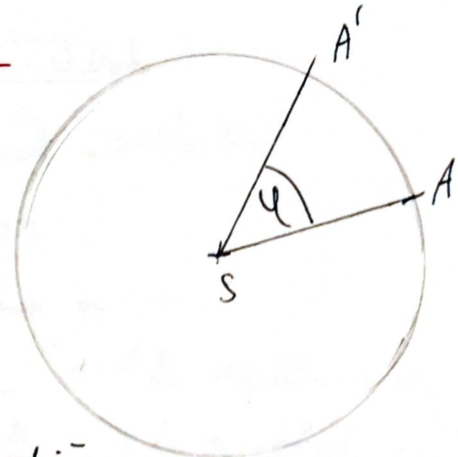
  $\rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ $(v_0 = a \cdot t)$

  $\left. \begin{array}{l} t_M = \frac{v_0}{a} \\ s_M = \frac{v_0^2}{2a} \end{array} \right\}$ čas a dráha, za kterou se těleso zastaví $\rightarrow v = 0$

- volný pád
  - počáteční rychlost je nulová
  - rovnoměrně zrychlený pohyb v prostředí kde zanedbáváme odpor nebo ve vakuu
  - zrychlení má svislý směr
  - volný pád poblíž povrchu země
    - tíhové zrychlení → $g \doteq 9{,}806\ m \cdot s^{-2}$
    - $v = g \cdot t$ + $h = \frac{1}{2} g t^2$ → jako u rovnom. zrych.
    - → dá se také vyjádřit

      $v = \sqrt{2gh}$ + $h = \frac{v^2}{2g}$

- rovnoměrný pohyb po kružnici
  - trajektorie - kružnice nebo její část
  - velikost rychlosti je konstantní ale mění se její směr
    - → $\vec{v}$ leží na tečně v daném bodě
  - úhlová dráha - φ
    - → SA = průvodič hmotného bodu
    - → při pohybu hmotného bodu z A do A' opsal průvodič úhel φ
    - → úhlová dráha = φ = úhel opsaný průvodičem
    - → udává se v radiánech



$$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x \qquad x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

- perioda - T

  T = doba 1 oběhu po kružnici

- frekvence - f

  f = počet oběhů po kružnici za jednotku času = za 1 s

  $f = \frac{1}{T}$ $[f] = s^{-1} = Hz$

- úhlová rychlost - ω - také úhlová frekvence

  → úhel opsaný průvodičem za určitou dobu

  $\omega = \frac{\Delta \varphi}{t}$ $[\omega] = rad \cdot s^{-1} = s^{-1} = Hz$

- obvodová rychlost - v

  → dráha hmotného bodu za určitou dobu

  $v = \frac{s}{t}$

→ $v = 2\pi r \cdot f$ = obvod kruhu · frekvence

→ $\omega = 2\pi \cdot f$ = 360° · frekvence

  ⇒ $v = \omega \cdot r$

- dostředivé zrychlení - a_d

  → hmotný bod se pohybuje z bodu A do bodu A' rovnoměrným pohybem ⇒ $v = v'$

  → mění se u toho směr vektoru rychlosti ⇒ $\vec{v} \neq \vec{v}'$

  $\Delta \vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ → směr $\Delta \vec{v}$ je do středu kružnice

→ směr

  $\vec{a}_d = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ → směr $\Delta \vec{v}$ a $\vec{a}_d$ je stejný

→ velikost

  $a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$

1) **Chlapec jel část cesty na kole rychlostí v_1 = 6 m.s^{-1} a zbytek šel pěšky rychlostí v_2 = 1,5 m.s^{-1}.**

Jakou průměrnou rychlostí se pohyboval, jestliže:

a) jel na kole polovinu vzdálenosti

b) jel na kole polovinu celkové doby pohybu?

Jak dlouho mu cesta trvala, jestliže celková vzdálenost byla s = 1,5 km?

Jak dlouho šel pěšky v případě a)?

Jakou vzdálenost jel na kole v případě b)?

$(v_{pa} = 2 \cdot \frac{v_1.v_2}{v_1+v_2} = 2{,}4\ m.s^{-1};\ v_{pb} = \frac{v_1+v_2}{2} = 3{,}75\ m.s^{-1};\ t_a = \frac{s}{2} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_1.v_2} = 625\ s;\ t_b = \frac{2s}{v_1+v_2} = 400\ s;$
$t_{2a} = \frac{s}{2v_2} = 500\ s;\ s_{1b} = s \cdot \frac{v_1}{v_1+v_2} = 1200\ m)$

2) **Automobil jedoucí rychlostí v_0 = 90 km.h^{-1} začal ve vzdálenosti s = 95 m před začátkem obce brzdit a po době t = 5 s rovnoměrně zpomaleného pohybu vjel do obce.**

Vypočítej rychlost automobilu v okamžiku vjezdu do obce, zrychlení rovnoměrně zpomaleného pohybu auta a jeho průměrnou rychlost po dobu brždění.

$(v = \frac{2s}{t} - v_0 = 13\ m.s^{-1} (= 46{,}8\ km.h^{-1});\ a = 2 \cdot \frac{v_0 t - s}{t^2} = 2{,}4\ m.s^{-2};$
$v_p = \frac{s}{t} = 19\ m.s^{-1} (= 68{,}4\ km.h^{-1}))$

3) **Z okraje střechy se uvolnil ledový rampouch a volným pádem s tíhovým zrychlením g = 10 m.s^{-2} se pohyboval podél svislé zdi domu. Kolem okna vysokého h = 1,5 m proletěl rampouch za dobu t = 0,1 s.**

Jaká je vzdálenost mezi okrajem střechy a horním okrajem okna?

Jakou rychlostí míjel rampouch spodní okraj okna?

$(h_0 = \frac{(2h - gt^2)^2}{8gt^2} \doteq 10{,}5\ m;\ v = \frac{gt}{2} + \frac{h}{t} = 15{,}5\ m.s^{-1})$

4) **Vrtule ventilátoru zdroje PC má průměr d = 11 cm, při běžném provozu ventilátoru se otáčí rychlostí 1200 otáček za minutu (1200 rpm).**

Vypočítej úhlovou rychlost, frekvenci a periodu otáčení vrtule, velikost rychlosti a dostředivého zrychlení koncového bodu lopatky a vzdálenost, kterou koncový bod lopatky urazí za 2,5 hodiny nepřetržitého běžného provozu PC.

$(\omega = \frac{n.2\pi}{t} \doteq 125{,}66\ rad.s^{-1};\ f = \frac{n}{t} = 20\ Hz;\ T = \frac{t}{n} = 0{,}05\ s;\ v = \omega.r = \frac{n.\pi}{t} \cdot d \doteq 6{,}9\ m.s^{-1};$
$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{2n^2\pi^2 d}{t^2} \doteq 868{,}5\ m.s^{-2};\ s = v.t' = n.\pi.d \cdot \frac{t'}{t} \doteq 62\ 200\ m\ (= 62{,}2\ km))$

5) Nákladní automobil jel první polovinu dráhy po dálnici rychlostí 80 $km.h^{-1}$, druhou polovinu dráhy po polní cestě rychlostí 20 $km.h^{-1}$. Vypočítej jeho průměrnou rychlost.

6) Veslice plující po řece urazila vzdálenost (vzhledem ke břehům) 120 m při plavbě po proudu za 12 s, při plavbě proti proudu za 24 s. Urči velikost rychlosti veslice vzhledem k vodě a velikost rychlosti proudu v řece. Obě rychlosti jsou konstantní.

7) Vrtule letadla se otáčí úhlovou rychlostí 200 $rad.s^{-1}$.

a) Jak velkou rychlostí (vzhledem k letadlu) se pohybují body na koncích vrtule, jejichž vzdálenost od osy je 1,5 m?

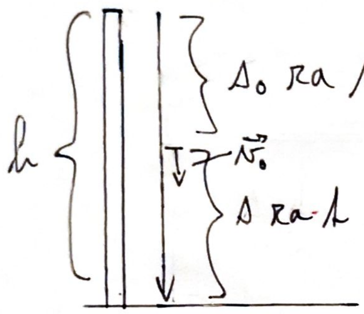
b) Jakou dráhu uletí letadlo během jedné otočky vrtule, letí-li rychlostí 540 $km.h^{-1}$?

– příklady – kinematika

- Těleso padá volným pádem z výšky h a dráhu posledních s metrů urazí za t sekund. Urči výšku h

$$\left.\begin{aligned} s &= 20\,m \\ t &= 0{,}5\,s \end{aligned}\right\} h = ?$$

s = dráha rovnoměrně zrychleného pohybu s počáteční rychlostí v_0



$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad v_0 = g \cdot t_0$$

$$s = g \cdot t_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

→ můžu si vyjádřit t_0

$$h = \frac{1}{2} g \cdot (t + t_0)^2$$

$$\Rightarrow \; s - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = g \cdot t \cdot t_0$$

$$t_0 = \frac{s - \frac{1}{2} g \cdot t^2}{g \cdot t} = \frac{\frac{2s - g \cdot t^2}{2}}{g \cdot t} = \underline{\underline{\frac{2s - g \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot t}}}$$

$$h = \frac{1}{2} g \left(t + \frac{2s - g \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot t}\right)^2 = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{2 \cdot g \cdot t^2 + 2s - g \cdot t^2}{2 \cdot g \cdot t}\right)^2$$

$$h = \frac{g}{2} \cdot \frac{(g \cdot t^2 + 2s)^2}{4 \cdot g^2 \cdot t^2} = \frac{(g \cdot t^2 + 2s)^2}{8 \cdot g \cdot t^2}$$

$$h \doteq \frac{(10 \cdot 0{,}25 + 40)^2}{80 \cdot 0{,}25}\,m = \frac{42{,}5^2}{20}\,m \doteq \underline{\underline{90{,}3\,m}}$$

5)

$$v_1 = 80\,km \cdot h^{-1}$$
$$v_2 = 20\,km \cdot h^{-1}$$
$$s_1 = s_2 = s$$

$$v_p = ?$$

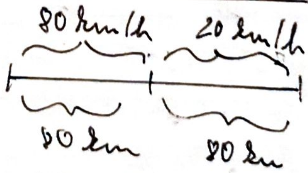
$$v_p = \frac{2s}{t_1 + t_2}$$

$$v_p = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s}{\frac{s \cdot v_2 + s \cdot v_1}{v_1 \cdot v_2}}$$

$$v_p = \frac{2 \cdot s \cdot v_1 \cdot v_2}{s(v_1 + v_2)} = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2}$$

$$\underline{\underline{v_p = \frac{2 \cdot 80 \cdot 20}{80 + 20} = \frac{32 \cdot 100}{100} = 32\,km \cdot h^{-1}}}$$

→ alternativa



→ 1 h rychlostí v_1
4 h rychlostí v_2

$$\Rightarrow v_p = \frac{v_1 + 4 \cdot v_2}{5}$$

$$\underline{\underline{v_p = \frac{160}{5} = 32\,km/h}}$$

1) $v_1 = 6\ m \cdot s^{-1}$

$v_2 = 1{,}5\ m \cdot s^{-1}$

$s = 1500\ m$

odvození

%

a) $s_1 = s_2 \rightarrow v_p,\ t,\ t_2 = ?$

$$v_p = \frac{2 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}5}{6 + 1{,}5} = \underline{\underline{2{,}4\ m \cdot s^{-1}}}$$

$$t = \frac{s}{v_p} = \frac{1500}{2{,}4} = \underline{\underline{625\ s}}$$

$$t_2 = \frac{\frac{s}{2}}{v_2} = \frac{s}{2v_2} = \frac{1500}{3} = \underline{\underline{500\ s}}$$

b) $t_1 = t_2 \rightarrow v_p,\ t,\ s_1 = ?$

$$v_p = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{7{,}5}{2} = \underline{\underline{3{,}75\ m \cdot s^{-1}}}$$

$$t = \frac{s}{v_p} = \frac{1500}{3{,}75} = \underline{\underline{400\ s}}$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = v_1 \cdot \frac{t}{2} = 6 \cdot 200 = \underline{\underline{1200\ m}}$$

2) $v_0 = 90\ km \cdot h^{-1} = 25\ m \cdot s^{-1}$

$s = 95\ m$

$t = 5\ s$

$v,\ a,\ v_p = ?$

- $s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$

$$\frac{1}{2} a \cdot t^2 = v_0 \cdot t - s$$

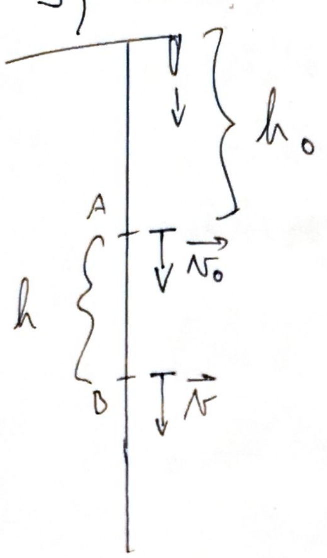
$$a = \frac{2 \cdot v_0 \cdot t - 2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 5 - 190}{25} = \underline{\underline{2{,}4\ m \cdot s^{-2}}}$$

- $v = v_0 - a \cdot t = v_0 - \frac{2 \cdot v_0 \cdot t - 2s}{t} = \frac{v_0 \cdot t - 2 \cdot v_0 \cdot t + 2s}{t}$

$$v = \frac{2s - v_0 \cdot t}{t} = \frac{190 - 25 \cdot 5}{5} = \underline{\underline{13\ m \cdot s^{-1}}}$$

- $v_p = \frac{s}{t} = \frac{95}{5} = \underline{\underline{19\ m \cdot s^{-1}}}$

3)



$h = 1{,}5\,m$

$t = 0{,}1\,s$

$h_0, v = ?$

za t urazil rampouch h

za t_0 urazil rampouch h_0

v = rychlost rampouchu v bodě B

→ h můžu počítat, jako dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu s počáteční rychlostí v_0

$$h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \rightarrow v = a \cdot t \Rightarrow v_0 = g \cdot t_0$$

soustava 3 rovnic o 3 neznámých

$$h = g \cdot t_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v = g \cdot (t + t_0) \quad \rightarrow \text{protože } v = g \cdot t$$

$$h + h_0 = \frac{g}{2}(t + t_0)^2 \quad \rightarrow \text{protože } h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

→ $h = g \cdot t_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \wedge \quad v = g \cdot (t + t_0)$

$$t_0 \cdot g \cdot t = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad t + t_0 = \frac{v}{g}$$

$$t_0 = \frac{h}{g \cdot t} - \frac{t}{2} \qquad t_0 = \frac{v}{g} - t$$

$$\Rightarrow \frac{v}{g} - t = \frac{h}{g \cdot t} - \frac{t}{2}$$

$$v = \frac{h}{t} + \frac{t \cdot g}{2}$$

$$t_0 = \frac{h}{t \cdot g} + \frac{t}{2} - t$$

$$t_0 = \frac{h}{t \cdot g} - \frac{t}{2}$$

→ $v \doteq \frac{1{,}5}{0{,}1} + \frac{0{,}1 \cdot 10}{2}\ m \cdot s^{-1}$

$v \doteq 15{,}5\ m \cdot s^{-1}$

$$h + h_0 = \frac{g}{2}(t + t_0)^2$$

$$h_0 = \frac{g}{2}\left(t + \frac{h}{t \cdot g} - \frac{t}{2}\right)^2 - h \qquad (a+b)^2$$

$$h_0 = \frac{g}{2}\left(\frac{h^2}{t^2 \cdot g^2} + \frac{h}{g} + \frac{t^2}{4}\right) - h$$

$$h_0 = \frac{h^2}{2g t^2} + \frac{h}{2} + \frac{g \cdot t^2}{8} - h$$

$$h_0 = \frac{h^2}{2g t^2} - \frac{h}{2} + \frac{g \cdot t^2}{8}$$

$$h_0 = \frac{(2h)^2 - 4h \cdot g \cdot t^2 + (g \cdot t^2)^2}{8 \cdot g \cdot t^2}$$

$$h_0 = \frac{(2h - g \cdot t^2)^2}{8g \cdot t^2}$$

→ $h_0 \doteq \frac{(3 - 0{,}1)^2}{8 \cdot 0{,}1}\ m$

$h_0 \doteq \frac{2{,}9^2}{0{,}8}\ m$

$h_0 \doteq 10{,}5\ m$

4) $d = 11\ cm = 11\cdot 10^{-2}\ m$

1200 / min $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f = 20\ Hz}}$

$t = 2,5\ h = 9000\ s$ → musím použiť len pre s

$\omega, T, v, a_d, s = ?$

- $\omega = 2\pi\cdot f = 40\pi \doteq \underline{\underline{125,66\ rad\cdot s^{-1}}}$
- $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{20} = \underline{\underline{0,05\ s}}$
- $v = \omega\cdot r = 2\pi\cdot f\cdot\frac{d}{2} = d\cdot f\cdot\pi = 11\cdot 10^{-2}\cdot 20\cdot\pi = 2,2\cdot\pi \doteq \underline{\underline{6,9\ m\cdot s^{-1}}}$
- $a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{d^2\cdot f^2\cdot\pi^2}{\frac{d}{2}} = \frac{2\cdot d^2\cdot f^2\cdot\pi^2}{d} = 2\cdot d\cdot f^2\cdot\pi^2$

  $a_d = 2\cdot 11\cdot 10^{-2}\cdot 20^2\cdot\pi^2 = 88\cdot\pi\cdot\pi \doteq \underline{\underline{868,5\ m\cdot s^{-2}}}$
- $s = v\cdot t = d\cdot f\cdot t\cdot\pi = 2,2\cdot\pi\cdot 9000 = 19800\pi \doteq \underline{\underline{62200\ m = 62,2\ km}}$

5) na minulé strane

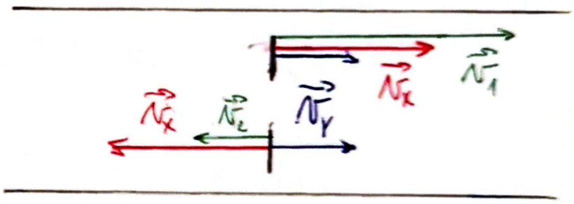
6) $s_1 = s_2 = s = 120\ m$

$t_1 = 12\ s$ → po prúdu

$t_2 = 24\ s$ → proti prúdu

v_x = v veslice vzhľadom k vode = ?

v_y = v vody v rieke = ?



$v_1 = \frac{s}{t_1}$

$v_2 = \frac{s}{t_2}$

$v_1 = v_x + v_y$

$v_2 = v_x - v_y$

$\frac{s}{t_1} = v_x + v_y \Rightarrow v_x = \frac{s}{t_1} - v_y$

$\frac{s}{t_2} = v_x - v_y \Rightarrow v_y = v_x - \frac{s}{t_2}$

$\Rightarrow v_x = \frac{s}{t_1} - v_x + \frac{s}{t_2} \quad \wedge \quad v_y = 7,5 - \frac{s}{t_2}$

$2 v_x = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2} \qquad v_y = 7,5 - \frac{120}{24}$

$v_x = \frac{s}{2}\cdot\frac{t_2 + t_1}{t_1\cdot t_2} \qquad \underline{\underline{v_y = 2,5\ m\cdot s^{-1}}}$

$v_x = 60\cdot\frac{36}{288}$

$\underline{\underline{v_x = 7,5\ m\cdot s^{-1}}}$

7) $\omega = 200 \ rad \cdot s^{-1}$

$r = 1{,}5 \ m$

$v = ?$

s letadla, když letí $v_1 = 540 \ km \cdot h^{-1}$ $\nearrow$ $150 \ m \cdot s^{-1}$ za 1 otočku vrtule $= ?$

- $v = \omega \cdot r = 200 \cdot 1{,}5 = \underline{\underline{300 \ m \cdot s^{-1}}}$

- $s = v_1 \cdot t \rightarrow t =$ doba 1 otočky vrtule

$$t = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega \cdot r} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- $s = \dfrac{v_1 \cdot 2\pi}{\omega} = \dfrac{300\pi}{200} = \dfrac{3}{2}\pi \ \underline{\underline{\doteq 4{,}7 \ m}}$