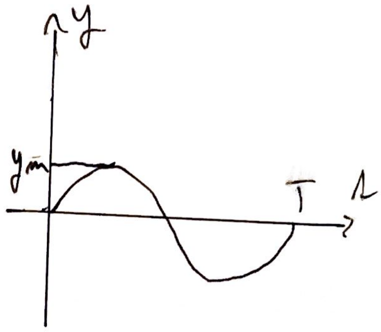
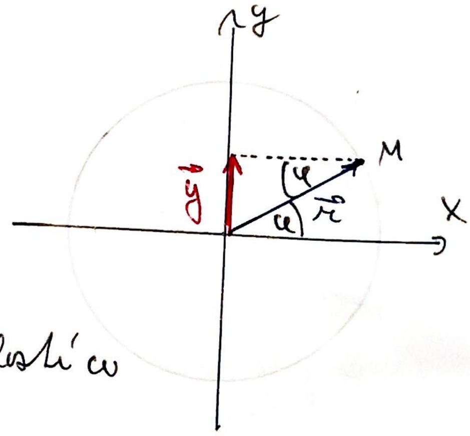
HARMONICKÉ KMITÁNÍ

- Mechanický oscilátor = těleso, které volně kmitá
- Pružinový oscilátor
  - → těleso je zavěšené na pružině → působí na něj
    - tíhová síla F_G
    - síla pružnosti F_p
  - → velikost $\vec{F_v} = \vec{F_G} + \vec{F_p}$ se mění v závislosti na prodloužení pružiny
    - → když $F_v = 0$, tedy $\vec{F_G} = -\vec{F_p} \wedge F_G = F_p$, tak je těleso v rovnovážné poloze
- Časový diagram pružinového oscilátoru
  - → graf polohy oscilátoru v závislosti na čase
  - → okamžitá výchylka y se mění podle sinusu ⇒ HARMONICKÝ kmit. pohyb
  - kmit = část pohybu, která se opakuje
  - perioda T = doba jednoho kmitu
  - frekvence = kmitočet f = počet kmitů za jednotku času

    $\Rightarrow f = \frac{1}{T} \wedge [f] = s^{-1} = Hz$



- Okamžitá výchylka – y
  - = vzdálenost oscilátoru od rovnovážné polohy
  - → v rovnovážné poloze je nulová
    - nad ní kladná
    - pod ní záporná
  - → amplituda – y_m = největší kladná hodnota y
- Kinematika pružinového oscilátoru
  - → analogie s rovnoměrným pohybem po kružnici
    - $\vec{r}$ = polohový vektor hmotného bodu
    - $\vec{y}$ – vektor okamžité výchylky



$r = y_m \wedge \sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = y_m \cdot \sin\varphi$

→ hmotný bod se po kružnici pohybuje úhlovou rychlostí ω

$\Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \varphi = \omega t$

→ oscilátor kmitá s úhlovou frekvencí ω → $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

→ fáze kmitového pohybu $= \varphi$

$\Rightarrow y = y_m \cdot \sin(\omega t)$

$\varphi_0 = \omega \cdot t_0$

→ s počáteční fází: $y = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

→ t_0 = čas od počátku kmitavého pohybu do začátku měření času

→ počáteční výchylka: $y_0 = y_m \cdot \sin(\varphi_0)$

• **Rychlost** $v = \frac{dy}{dt} = y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$

$$v = \omega \cdot y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

⇒ v extrémech je rychlost nulová → $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$ } viz kružnice
⇒ v rovnovážné poloze je největší → $\varphi = k\pi$

⇒ amplituda rychlosti $v_m = \omega \cdot y_m$ ⇔ $\varphi = k \cdot 2\pi$

• **Zrychlení** $a = \frac{dv}{dt} = \omega y_m \cdot (-1) \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega$

$$\vec{a} = -\omega^2 y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$$

→ zrychlení vždy míří do rovnovážné polohy
→ v extrémech je zrychlení největší → $y = y_m$ v $y = -y_m$
→ v rovnovážné poloze je nulové → $y = 0$

⇒ amplituda zrychlení $a_m = \omega^2 y_m$

• **Dynamika pružinového oscilátoru** – 2 parametry: k, m

• l_0 = délka pružiny, když na ní nic nevisí → není natažená
• l = délka pružiny, když je na ní zavěšené těleso ustálené v rovn. poloze
• $\Delta l = l - l_0$ – o kolik se pružina prodloužila zavěšením tělesa do r. polohy
• $\Delta l - y$ – okamžité prodloužení pružiny během kmitání
• **tuhost pružiny** – k – $[k] = N \cdot m^{-1}$

$$k = \frac{F}{\Delta l - y}$$

F = síla, jejímž působením se pružina prodlužila z klidového stavu o $\Delta l - y$

• **síla pružnosti** – F_p

$$F_p = k \cdot (\Delta l - y)$$

• **vztah pro Δl**: rovnovážná poloha ($y = 0$): $F_p = F_G$, $k \cdot \Delta l = m \cdot g$ } $\Delta l = \frac{m \cdot g}{k}$

• **výsledná síla působící na oscilátor**

$\vec{F_v} = \vec{F_G} + \vec{F_p}$ → směr F_v vždy směřuje do rovnovážné polohy
⇒ $\vec{F_G}, \vec{F_p}$ mají vždy opačný směr

$$F_v = F_p - F_G = k \cdot (\Delta l - y) - m \cdot g = k \cdot \left(\frac{m \cdot g}{k} - y\right) - mg = mg - ky - mg = -ky$$

$\vec{F_v} = -ky$ → stejný směr jako $\vec{a}$ – do r. polohy

2.NPZ: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = -m\omega^2 y$ ⇒ $\vec{F_v} = -m\omega^2 y$

→ F_p se mění, F_G je konstantní

* **Vlastní kmity** *

$$\vec{F}_v = -ky = -m\omega^2 y \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \wedge T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

⇒ vlastní úhlová frekvence (ω_0), frekvence (f_0), perioda (T_0)
→ závisí na parametrech oscilátoru
⇒ na parametrech oscilátoru a na čase závisí vše
→ $\omega_0, f_0, T_0 \Rightarrow y \Rightarrow v, a, F_v \Rightarrow E$
→ vlastní kmity probíhají bez působení vnějších sil ⇒ ideální oscilátor

* **Tlumené kmity**

→ pokud nezanedbáváme působení vnějších sil (odpor vzduchu), tak oscilátor vykonává tlumené kmity ⇒ postupně se zmenšuje y_m
⇒ oscilátor nakonec zůstane v klidu v rovnovážné poloze

* **Nucené kmity**

→ aby kmity nebyly tlumené, tak jim musíme dodávat energii
a) v určitých časových intervalech – např. úderem
⇒ netlumené kmitání, není harmonické
b) během celé periody
→ působením proměnlivé síly $F = F_m \sin(\omega t)$ — ω = ú. f. zdroje
⇒ netlumené kmitání, je harmonické, ale s jinou ú. f., než je ú. f. vlastních kmitů oscilátoru
⇒ $\omega \neq \omega_0$

→ rezonance → já můžu měnit ω zdroje ⇒ pokud $\omega \doteq \omega_0$, tak nastává rezonance
→ při rezonanci dochází k posílení nucených kmitů ⇒ zvětšení amplitudy | $\omega = \omega_0$ ⇒ největší y_m

* **Skládání kmitů**

→ hm. bod koná více h. kmitavých pohybů současně
→ mají okamžité výchylky $y_1, y_2, \dots y_k$
⇒ výsledný kmitavý pohyb má okamžitou výchylku $y = \sum_{i=1}^{k} y_i$
→ princip superpozice
→ výsledná poloha tělesa, které současně koná více pohybů je stejná, jako by tyto pohyby konalo po sobě v libovolném pořadí
→ pokud jsou ty pohyby ve fázi, tak se jen sčítají amplitudy → harmonické k.

• Energie pružinového oscilátoru

→ potenciální – největší je v extrémech $\quad\quad * \; k = m\omega^2$

→ kinetická – největší je v rovnovážné poloze

• Kinetická – pohybová

$$\underline{E_K = \frac{1}{2} m v^2} = \frac{1}{2} m \omega^2 y_m^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) = \underline{\underline{\frac{1}{2} k y_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{K_m} = \frac{1}{2} k y_m^2}$$

• Potenciální – polohová

→ E_p je určena vůči dohodnuté nulové potenciální hladině = r. poloha

$\Rightarrow E_p$ je v rovnovážné poloze nulová

• Energie pružnosti – E_{p1} → vycházím ze vzorce pro energii pružiny natažené o l $\Rightarrow E = \frac{1}{2} F_p l = \frac{1}{2} k l^2$

$$E_{p1} = \underbrace{\frac{1}{2} k(\Delta l - y)^2}_{} - \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

nulová potenciální hladina ~ klidový stav pružiny

$\Rightarrow$ posunutí dolů o Δl $(-\frac{1}{2} k \Delta l^2)$ do rovnovážné polohy

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k\left[(\Delta l^2 - 2\Delta l y + y^2) - \Delta l^2\right] = \underline{\underline{\frac{1}{2} k y^2 - k \Delta l y}}$$

• Potenciální energie tíhového pole – E_{p2}

→ nulová potenciální hladina je v rovnovážné poloze

$$E_p = mgh \Rightarrow \underline{\underline{E_{p2} = mg \cdot y}}$$

• Celková potenciální energie

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2} k y^2 - k \Delta l y + mgy = \quad \wedge \quad \Delta l = \frac{mg}{k}$$

$$= \frac{1}{2} k y^2 - mgy + mgy = \frac{1}{2} k y^2$$

$$\Rightarrow \underline{E_p = \frac{1}{2} k y^2} = \frac{1}{2} k y_m^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \underline{E_{pm} = \frac{1}{2} k y_m^2}$$

• Celková mechanická energie

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k y_m^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k y_m^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} k y_m^2 \left[\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2} k y_m^2$$

$$\Rightarrow \underline{E = \frac{1}{2} k y_m^2}$$

→ pokud na oscilátor nepůsobí žádné vnější síly (takže při vlastních kmitech), tak platí ZZME

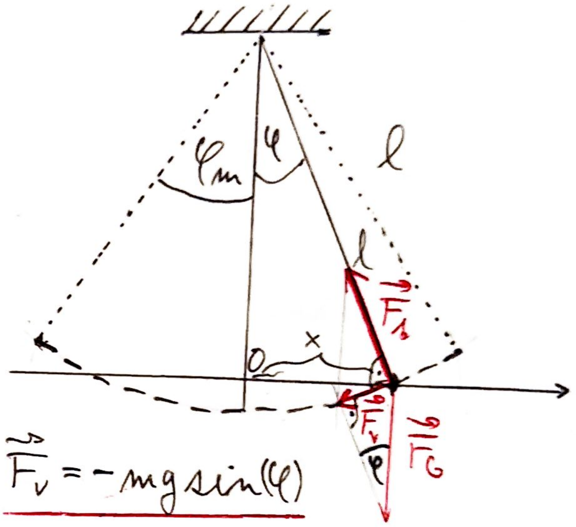
• **Potenciální energie - odvození pomocí práce**

→ v r. poloze je E_p nulová a E_k největší - když y roste do y_m, tak E_k klesá a E_p roste ⇒ práce, kterou pružina vykoná $= \Delta E_p$

$$\Delta E_p = W = \int_0^y F(y)\,dy = \int_0^y ky\,dy = \left[\frac{ky^2}{2}\right]_0^y = \underline{\underline{\frac{1}{2}ky^2}}$$

$\Delta E_p = E_p(y) - E_p(0)$ ∧ E_p je v r. poloze nulová ⇒ $E_p = \Delta E_p = \frac{1}{2}ky^2$

• **Kyvadlový oscilátor**



→ těleso je zavěšené na vlákně

→ působí na něj – $\vec{F}_G$ = tíhová síla

 – $\vec{F}_1$ = tahová síla

→ výsledná síla $\vec{F}_v = \vec{F}_G + \vec{F}_1$

 → vždy míří do rovnovážné polohy

• $\sin(\varphi) = \frac{x}{l} = \frac{F_v}{F_G} \Rightarrow \vec{F}_v = -\frac{\vec{x}}{l} m \cdot g \Rightarrow \underline{\vec{F}_v = -mg\sin(\varphi)}$

→ kmitavý pohyb začíná v pravém extrému - když $\varphi = \varphi_m$

 → φ_m = amplituda úhlové výchylky

 → kmit - zprava doleva a zpět doprava → doba kmitu $= T$

 → kyv - zprava doleva → doba kyvu $= \tau$ ∧ $\underline{2\tau = T}$

→ kyvadlo nevykonává harmonické kmity, ale pro malé hodnoty φ_m jsou přibližně harmonické

→ pro tečné zrychlení platí - $v = \omega l$, l = poloměr kružnice

$$a = \frac{dv}{dt} = l \cdot \frac{d\omega}{dt} \wedge \omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow a = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow \underline{a = l \cdot \ddot{\varphi}}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\text{2.NPZ:}}\ F_v &= m \cdot a = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \\ F_v &= -mg \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}\right\}\ l\ddot{\varphi} = -g\sin(\varphi)$$

⇒ pohyb kyvadla je popsán diferenciální rovnicí: $\underline{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0}$

→ $\underline{\text{pro malé } \varphi_m}$: $\sin(\varphi) \approx \varphi \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \doteq 0$

$$\Rightarrow \underline{\varphi \doteq \varphi_m \cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\,t\right)} \Rightarrow \underline{\omega \doteq \sqrt{\tfrac{g}{l}} \doteq 2\pi f = \tfrac{2\pi}{T}} \quad \to T = \frac{2\pi}{\omega}$$

→ $F_v = -\frac{g}{l}mx \doteq -\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\right)^2 mx = -\omega^2 mx \Rightarrow \underline{a \doteq -\omega^2 x}$

1) Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 35 cm, periodou 250 ms a počáteční fází 5π/6.
a) napište rovnici závislosti okamžité výchylky harmonického kmitavého pohybu hmotného bodu na čase,
b) vypočítejte hodnotu okamžité výchylky, rychlosti a zrychlení hmotného bodu v čase t_1 = 1/12 s a t_2 = 7/48 s.
(a) $\{y\} = 0{,}35.\sin\left(8\pi\{t\} + \frac{5}{6}\pi\right)$;
b) $y_1 = -y_m = -0{,}35\ m;\ v_1 = 0;\ a_1 = a_m \doteq 221\ m.s^{-2};\ y_2 = 0;\ v_2 = v_m \doteq 8{,}796\ m.s^{-1};\ a_2 = 0$)

2) Závaží o hmotnosti 1,50 kg zavěšené na pružině harmonicky kmitá s periodou vlastních kmitů 370 ms. Jakou hmotnost má závaží, které na stejné pružině kmitá s frekvencí 1,00 Hz? Jaká je tuhost pružiny?
($m_2 = \frac{m_1}{T_1^2 f_2^2} \doteq 11\ kg;\ k = 4\pi^2 \frac{m_1}{T_1^2} = 4\pi^2 f_2^2 m_2 \doteq 433\ N.m^{-1}$)

3) Určete délku matematického kyvadla s dobou kyvu 1 s (tzv. sekundové kyvadlo) pro místo na rovníku Měsíce, Venuše a Marsu. Tíhové zrychlení na rovníku Měsíce je 1,62 $m.s^{-2}$, Venuše 8,9 $m.s^{-2}$ a Marsu 3,7 $m.s^{-2}$.
($l = \frac{\tau^2}{\pi^2} \cdot g \Rightarrow l_{☽} \doteq 0{,}164\ m;\ l_{♀} \doteq 0{,}902\ m;\ l_{♂} \doteq 0{,}375\ m$)

4) Na konci lana pro bungee jumping harmonicky kmitá ve svislém směru člověk hmotnosti 85,0 kg. Vzdálenost mezi jeho nejvyšší a nejnižší polohou při kmitání je 3,00 m a perioda kmitavého pohybu je 2,50 s. Vypočítejte celkovou mechanickou energii kmitavého pohybu a rychlost při průchodu rovnovážnou polohou.
($E = \frac{1}{2}\pi^2 \frac{m.h^2}{T^2} \doteq 604\ J;\ v = v_{max} = \pi\frac{h}{T} \doteq 3{,}77\ m.s^{-1}$)

5) Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou výchylky 1,2 cm a s periodou 0,25 s. Urči amplitudu rychlosti, amplitudu zrychlení a frekvenci kmitů.

6) Hmotný bod kmitá harmonicky s frekvencí 400 Hz a s amplitudou výchylky 2 mm. Počáteční fáze kmitání je 30°. Napište rovnici pro okamžitou výchylku hmotného bodu. Urči:
a) okamžitou výchylku hmotného bodu v počátečním okamžiku,
b) dobu, za kterou hmotný bod dospěje do rovnovážné polohy,
c) rychlost hmotného bodu v rovnovážné poloze.

7) Pružina se po zavěšení tělesa prodlouží o 2,5 cm. Vypočítej frekvenci a periodu vlastního kmitání takto vzniklého oscilátoru.

HARMONICKÉ KMITÁNÍ

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 4$

1) $y_m = 35\ cm$
$T = \frac{1}{4}\ s$
$\varphi_0 = \frac{5}{6}\pi$
$t_1 = \frac{1}{12}\ s$, $t_2 = \frac{7}{48}\ s$
$\to y, v, a = ?$

$\{y\} = 0{,}35 \sin\left(8\pi\{t\} + \frac{5}{6}\pi\right)$

$\frac{4+5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi$

- $t = \frac{1}{12}\ s$: $y = 0{,}35 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5}{6}\pi\right)\ m = \underline{\underline{-0{,}35\ m}}$

$\Rightarrow v = 0$, $a = \omega^2 y_m \doteq \underline{\underline{221\ m\,s^{-2}}}$

- $t = \frac{7}{48}\ s$: $y = 0{,}35 \sin\left(\frac{7}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi\right) = 0$

$\Rightarrow v = \omega y_m \doteq \underline{\underline{8{,}8\ m\,s^{-1}}}$, $a = 0$

2) $m_1 = 1{,}5\ kg$
$T_1 = 37 \cdot 10^{-2}\ s$
$f_2 = 1\ Hz \to T_2 = 1\ s$
$m_2, k = ?$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega^2 \Rightarrow m_1 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = m_2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2$

$\Rightarrow m_2 = m_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1{,}5 \cdot \frac{1}{37^2 \cdot 10^{-4}}\ kg \doteq 11\ kg$

$\Rightarrow k = m_2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 \doteq 11 \cdot 4\pi^2\ N\,m^{-1} \doteq \underline{\underline{433\ N\,m^{-1}}}$

3) $\tau = 1\ s$
$g_M = 1{,}62\ m\,s^{-2}$
$l = ?$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow l = \frac{g}{\omega^2} = \frac{\tau^2}{\pi^2} g = \frac{1{,}62}{\pi^2}\ m \doteq \underline{\underline{164\ mm}}$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau}$

4) $m = 85\ kg$
$y_m = 1{,}5\ m$
$T = 2{,}5\ s$
$E, v_m = ?$

$v_m = \omega y_m = \frac{2\pi}{T} y_m = \frac{2\pi\, 1{,}5}{2{,}5}\ m/s \doteq \underline{\underline{3{,}77\ m\,s^{-1}}}$

$E = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} \cdot 85 \cdot 3{,}77^2\ J \doteq \underline{\underline{604\ J}}$

5) $y_m = 1{,}2\ cm$
$T = \frac{1}{4}\ s$
$v_m, a_m, f = ?$

$f = 4\ Hz \Rightarrow \omega = 8\pi$

$v_m = \omega y_m = 8\pi \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ m/s \doteq \underline{\underline{0{,}3\ m\,s^{-1}}}$

$a_m = \omega^2 y_m = 64\pi^2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ m\,s^{-2} \doteq \underline{\underline{7{,}6\ m\,s^{-2}}}$

7) $\Delta l = 2{,}5\ cm$
$f, T = ?$

$k = m\omega^2$ $\quad mg = \Delta l\, k$

$\omega = 2\pi f$

$\Rightarrow \frac{mg}{\Delta l} = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}}$

$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}81}{25}}\ Hz \doteq \underline{\underline{0{,}31\ Hz}}$

$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \doteq \underline{\underline{3{,}17\ s}}$