MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

- dokonale tuhé těleso
  - → nemění svůj tvar ani objem při působení sil
  - → působením sil se mění pouze jeho pohybový stav
- pohyby tuhého tělesa
  - translace
    - → přímočarý, křivočarý, rovnoměrný, nerovnoměrný pohyb
    - → každá část tělesa má stejnou rychlost
  - rotace
    - → kolem nehybné osy
    - → každá část tělesa opisuje kružnice se středem na ose o
    - → každá část tělesa má stejnou úhlovou rychlost, ale různou obvodovou rychlost
- těžiště tělesa
  - → je to působiště výsledné tíhové síly, kterou Země působí na těleso
  - → experimentální zjištění pomocí těžnic
  - → homogenní tělesa – v geometrickém středu
    – na ose souměrnosti
- Moment setrvačnosti – J
  - → vyjadřuje míru setrvačnosti při otáčivém pohybu
  - → body s větší hmotností nebo umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti

$J = m \cdot r^2$ $[J] = kg \cdot m^2$ – moment setrvačnosti 1 bodu

→ $E_K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$

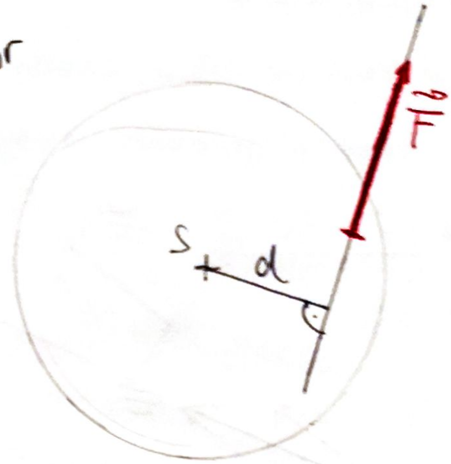
$E_K = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ ⇒ celková kinetická energie rotujícího tělesa

$$E_K = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

→ moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů

$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ → viz tabulky

- Moment síly – M
  - → vyjadřuje otáčivý účinek síly na těleso
  - → rameno síly – d
    - → pravoúhlá vzdálenost vektorové přímky síly od osy otáčení



⇒ $M = F \cdot d$

$[M] = N \cdot m$ – ne Joule

→ směr M
- → vektor $\vec{M}$ je kolmý na rovinu definovanou vektory $\vec{d}$ a $\vec{F}$
- → pravidlo pravé ruky – dohoda
  - → dlaň směrem k ose otáčení
  - → prsty míří se směrem síly
  - → vztyčený palec ukazuje směr $\vec{M}$

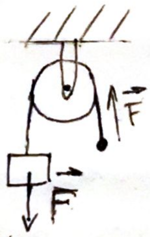
tady směr nahoru = z nákresny

→ výsledný moment sil
- → pokud na těleso působí více sil současně

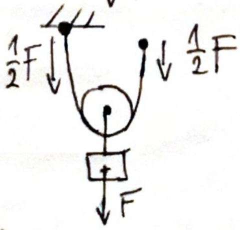
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$$

→ momentová věta
- → otáčivý účinek sil působících na těleso otáčivé kolem nehybné osy se ruší, pokud je výsledný moment sil roven nule

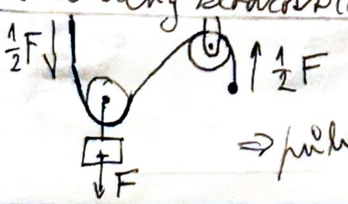
→ kladky
- → pevná kladka



- → volná kladka



- → jednoduchý kladkostroj



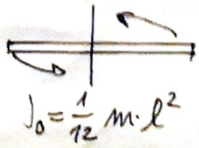
⇒ půlí potřebnou sílu

J pro různá tělesa

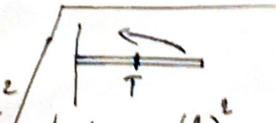
J_0 – když J vzhledem k ose souměrnosti

$J = J_0 + m \cdot d^2$ – d = vzdálenost T od osy rotace

- koule: $J_0 = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
- válec: $J_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
- kužel: $J_0 = \frac{3}{10} m \cdot r^2$
- tyč



$J_0 = \frac{1}{12} m \cdot l^2$



$J = J_0 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2$

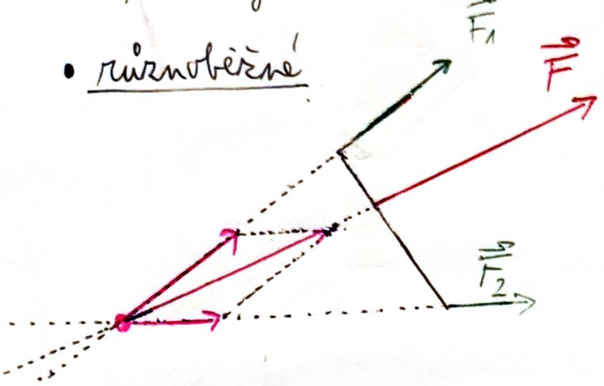
$J = m \cdot l^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$

$J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$

• Skládání sil

→ když na těleso působí více sil, hledáme výslednou sílu, která je může nahradit

• různoběžné

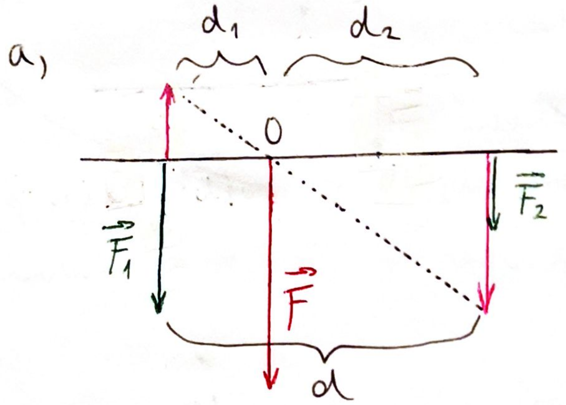


→ přenesu je do společného bodu

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

• rovnoběžné

a)



→ moment výsledné síly F vzhledem k ose jdoucí jejím působištěm = 0 (rameno síly = 0)

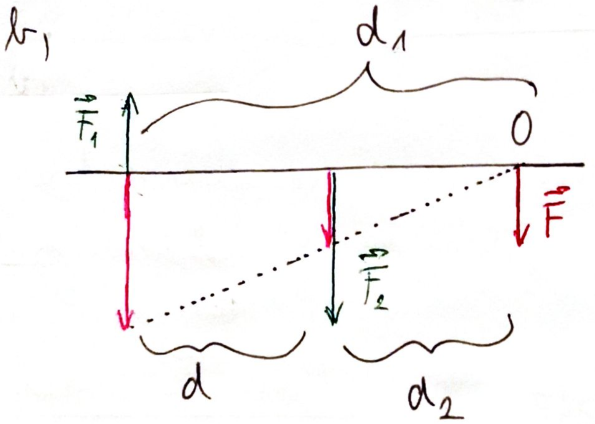
⇒ součet momentů původních sil k téže ose je také nulový

→ M_1, M_2 se navzájem ruší

→ opačný směr, stejná velikost

$\Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 \Rightarrow \underline{\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}}$ $\underline{F = F_1 + F_2}$

b)

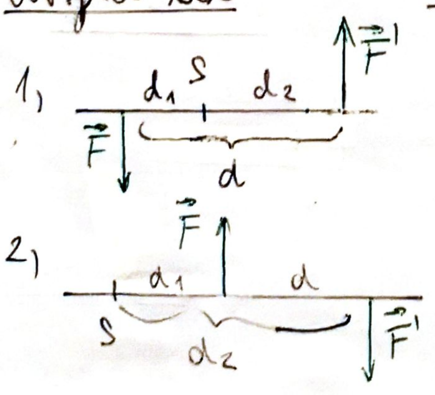


→ stejný princip jako u a

$\underline{\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1}}$ $\underline{F = |F_1 - F_2|}$

→ grafické řešení: zaměníme působiště obou sil a u jedné změníme orientaci

c) dvojice sil



→ $F = F'$ + mají opačný směr

→ není možné je nahradit 1 silou

1) $M = M_1 + M_2 = F \cdot d_1 + F' \cdot d_2 = F(d_1 + d_2) = F \cdot d$

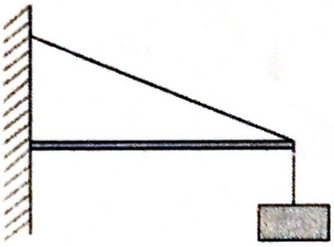
2) $M = |M_1 - M_2| = |F \cdot d_1 - F' \cdot d_2| = |F(d_1 - d_2)| = F \cdot d$

$\Rightarrow \underline{M = F \cdot d}$

1) Homogenní tyč hmotnosti m = 12 kg je umístěna vodorovně tak, že je podepřená v jedné třetině délky a konec delší části tyče je zavěšen na svislém závěsu. Vypočítejte sílu, kterou tyč napíná závěs. (g = 9,81 m.s^{-2})
$(F = \frac{mg}{4} = 29{,}43\ N)$

2) Těžítko se skládá ze dvou homogenních částí. Spodní část má tvar krychle o hraně a = 4 cm, horní část má tvaru válce, jehož průměru i výška jsou stejné jako délka hrany spodní krychle. Vypočítejte výšku těžiště.
$(h_T = \frac{4+3\pi}{8+2\pi} \cdot a \doteq 3{,}76\ cm)$

3) Lampa hmotnosti m = 0,5 kg je zavěšená na konci vodorovné tyče, která má délku l = 50 cm a zanedbatelnou hmotnost. Tyč se druhým koncem opírá o svislou zeď. Konec tyče s lampou drží závěs upevněný do zdi ve výšce h = 50 cm nad tyčí (viz obrázek). Vypočítejte sílu F_1, kterou je napínán závěs, a sílu F_2, kterou je tyč tlačena proti zdi. (g = 9,81 m.s^{-2})



$(F_1 = mg\frac{\sqrt{h^2+l^2}}{h} \doteq 6{,}937\ N;\ F_2 = mg\frac{l}{h} = 4{,}905\ N)$

4) Homogenní váleček se skutálel po nakloněné rovině s převýšením h = 15 cm. Vypočítejte rychlost válečku na konci nakloněné roviny. Zanedbejte odpor prostředí a valivý odpor. (g = 9,81 m.s^{-2})
$(v = 2 \cdot \sqrt{\frac{gh}{3}} \doteq 1{,}4\ m.s^{-1})$

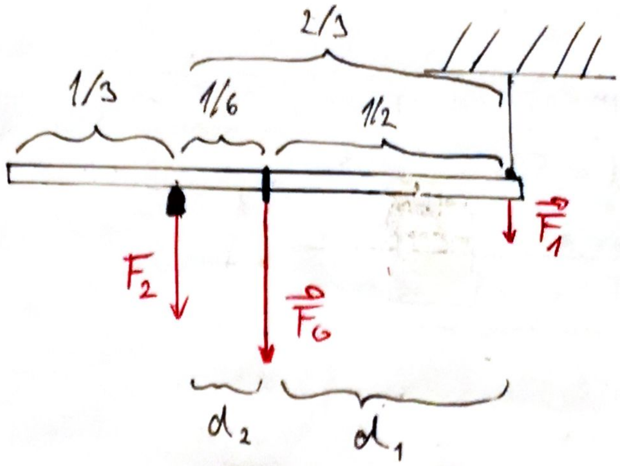
5) Na rovnoramennou páku o délce 2 m s osou procházející těžištěm jsou zavěšena tři tělesa. Na levé straně páky ve vzdálenosti 30 cm od osy je zavěšeno těleso o hmotnosti 2 kg a ve vzdálenosti 80 cm od osy těleso o hmotnosti 0,5 kg. Na pravé straně páky ve vzdálenosti 50 cm od osy je zavěšeno těleso o hmotnosti 4 kg. Urči, na který konec je třeba zavěsit závaží, aby nastala rovnováha na páce a vypočítejte hmotnost tohoto závaží.

6) Homogenní válec hmotnosti m a průměru d se bez klouzání kutálí po vodorovné rovině. Při kutálení se otáčí s konstantní frekvencí f. Vyjádři prostřednictvím zadaných veličin rychlost translační složky pohybu, úhlovou rychlost rotační složky pohybu a kinetickou energii válce. (moment setrvačnosti homogenního válce vzhledem k ose souměrnosti válce je $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$)

⇒ příklady

1) $m = 12\ kg$

$F_1 = ?$



$F_G = F_1 + F_2$

$F_2 = F_G - F_1$

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_G - F_1}{F_1} \Rightarrow F_1 d_1 = F_G\cdot d_2 - F_1\cdot d_2$$

$$F_1(d_1 + d_2) = F_G\cdot d_2$$

$$F_1 = m\cdot g\,\frac{d_2}{d_1 + d_2}$$

$$F_1 \doteq 12\cdot 9{,}81\cdot\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}}\ N$$

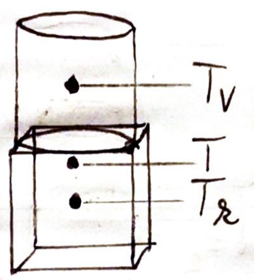
$$F_1 \doteq 29{,}43\ N$$

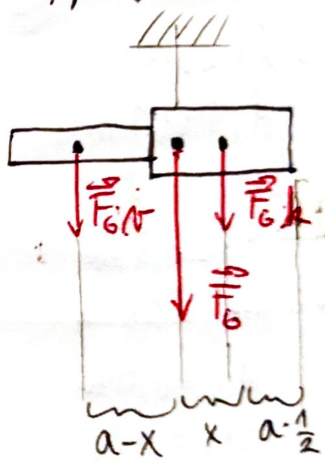
2) $a = 4\ cm$, $h = ?$ } pokud je těleso zavěšené na těžišti, pak je v rovnováze

• $V_k = a^3 \Rightarrow m_k = \rho\cdot a^3$

• $V_v = \pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot a = \pi\cdot\frac{a^2}{4}\cdot a$

$\Rightarrow m_v = \rho\cdot a^3\cdot\frac{\pi}{4}$





$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{F_2}{F_1} \Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{F_{Gk}}{F_{Gv}} = \frac{g\cdot\rho\cdot a^3}{g\cdot\rho\cdot a^3\cdot\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{a-x}{x} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow a\pi - x\pi = 4x \Rightarrow x(4+\pi) = a\pi$$

$$x = a\cdot\frac{\pi}{4+\pi}$$

• $h = \frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} + \frac{a\cdot\pi}{4+\pi} = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4+\pi}\right) = a\cdot\frac{4+\pi+2\pi}{8+2\pi} = a\cdot\frac{4+3\pi}{8+2\pi}$

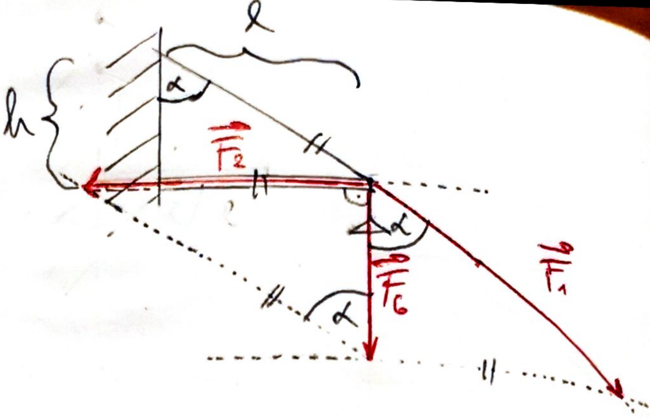
$$h = 4\cdot\frac{4+3\pi}{8+\pi}\ cm \doteq 3{,}76\ cm$$

3) $m = 0{,}5\ kg$

$l = 50\ cm = 0{,}5\ m$

$h = 50\ cm = 0{,}5\ m$

$F_1, F_2 = ?$



• $tg(\alpha) = \frac{l}{h} = \frac{F_2}{F_G}$

$$\Rightarrow F_2 = m \cdot g \cdot \frac{l}{h} \doteq 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot 1\ N \Rightarrow \underline{\underline{F_2 \doteq 4{,}905\ N}}$$

• $F_1^2 = F_G^2 + F_2^2 = F_G^2 + F_G^2 \cdot \frac{l^2}{h^2} = F_G^2\left(1 + \frac{l^2}{h^2}\right) = F_G^2 \cdot \frac{h^2 + l^2}{h^2}$

$$F_1 = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{h} \doteq 0{,}5 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\sqrt{0{,}25 + 0{,}25}}{0{,}5} = 9{,}81 \cdot \sqrt{0{,}5}\ N$$

$\underline{\underline{F_1 \doteq 6{,}937\ N}}$

5) $l = 2\ m$

$d_1 = 0{,}3\ m$

$m_1 = 2\ kg$

$d_2 = 0{,}8\ m$

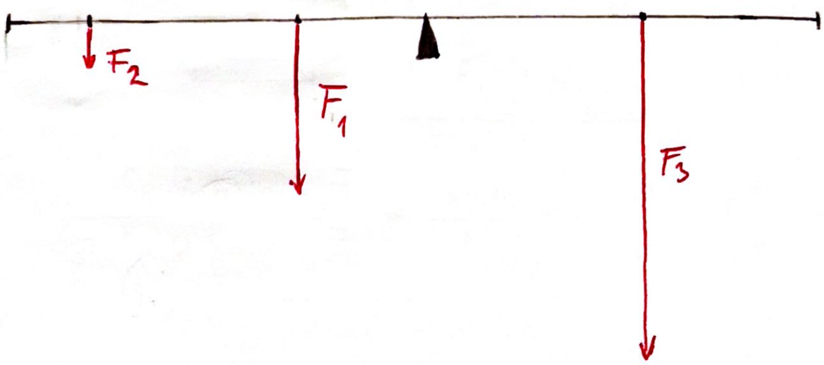
$m_2 = 0{,}5\ kg$

$d_3 = 0{,}5\ m$

$m_3 = 4\ kg$

$d_4 = 1\ m$

$m_4 = ?$



• $M_1 + M_2 = d_1 \cdot m_1 \cdot g + d_2 \cdot m_2 \cdot g = 6 + 4 = 10\ N \cdot m$

• $M_3 = d_3 \cdot m_3 \cdot g = 0{,}5 \cdot 4 \cdot 10 = 20\ N \cdot m$

$\rightarrow M_1 + M_2 < M_3 \Rightarrow$ 4. závaží bude nalevo

• $M_1 + M_2 + M_4 = M_3$

$$g\,(m_1 \cdot d_1 + m_2 \cdot d_2 + m_4 \cdot d_4) = m_3 \cdot d_3 \cdot g$$

$$m_4 \cdot d_4 = m_3 \cdot d_3 - m_1 \cdot d_1 - m_2 \cdot d_2$$

$$m_4 = \frac{m_3 \cdot d_3 - m_1 \cdot d_1 - m_2 \cdot d_2}{d_4} = \frac{2 - 0{,}6 - 0{,}4}{1}\ kg$$

$\underline{\underline{m_4 = 1\ kg}}$

6) $m, d, f \mid J_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2$

$v, \omega, E_K = ?$

$\pi \cdot d$ za 1 periodu $T = \frac{1}{f}$

- $v = \frac{s}{t} = \frac{\pi \cdot d}{\frac{1}{f}} = \underline{\underline{\pi \cdot d \cdot f}}$

- $\underline{\underline{\omega = 2\pi f}}$

- $E_K = E_{KT} + E_{KR} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2$

- $E_K = \frac{1}{2}\left(m \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot f^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{d^2}{4} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f^2\right) = \frac{1}{2}\left(m \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot f^2 + \frac{1}{2} m \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot f^2\right)$

- $\underline{\underline{E_K = \frac{3}{4} \pi^2 \cdot m \cdot d^2 \cdot f^2}}$

4) $h = 15\ cm = 15 \cdot 10^{-2}\ m$

$v = ? \quad (J_0 = \frac{1}{2} m \cdot r^2)$

$\Big\}$ E_K nakonci $= E_p$ na začátku

$$E_p = E_K = E_{KT} + E_{KR}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \quad v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} m \cdot r^2\right) \cdot \frac{v^2}{r^2}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{4} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{4} m \cdot v^2$$

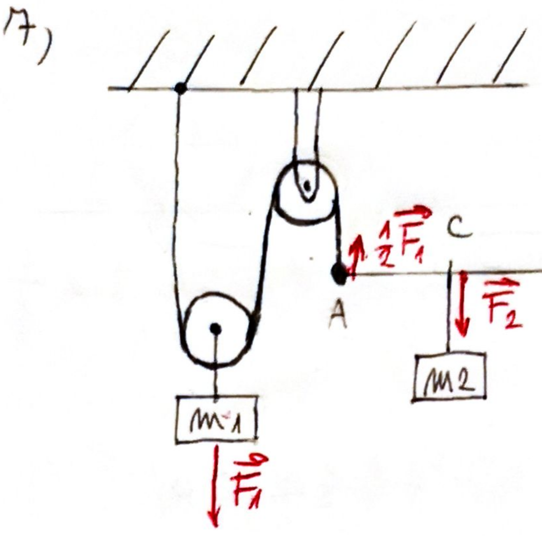
$$gh = \frac{3}{4} v^2$$

$$v^2 = 4 \cdot \frac{gh}{3}$$

$$v = 2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot h}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 9{,}81}{3}}\ m/s$$

$$\underline{\underline{v = 1{,}4\ m \cdot s^{-1}}}$$

7)



→ Tyč je v rovnováze

$m_1 = 30\ kg$

$m_2 = 25\ kg$

$AC = 40\ cm = 0{,}4\ m = d_1$

$AB = l = ?$

$$\Rightarrow M_1 = M_2 \Rightarrow \frac{1}{2} F_1 \cdot l = F_2 \cdot (l - d_1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot g \cdot l = m_2 \cdot g \cdot l - m_2 \cdot g \cdot d_1$$

$$m_2 \cdot d_1 = l\left(m_2 - \frac{1}{2} m_1\right)$$

$$l = \frac{m_2 \cdot d_1}{m_2 - \frac{1}{2} m_1}$$

$$l = \frac{25 \cdot 0{,}4}{25 - 15}\ m$$

$$\underline{\underline{l = 1\ m}}$$

8) → Tyč padá

$h = 5\ m$

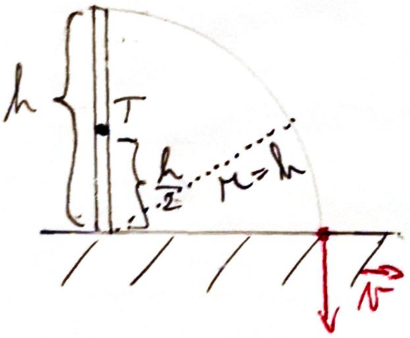
$J = \frac{1}{3} m \cdot h^2$

$v = ?$

Ep na začátku je stejná jako E_{KR} na konci

↳ Ep se odvozuje od výšky těžiště

↳ v = rychlost koncového bodu v okamžiku dopadu



$$\Rightarrow E_p = E_{KR} \Rightarrow m \cdot g \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 \qquad v = \omega \cdot r,\quad \omega = \frac{v}{r}$$

$$\frac{1}{2} m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} m \cdot h^2\right) \cdot \frac{v^2}{h^2}$$

$$g \cdot h = \frac{1}{3} v^2$$

$$v = \sqrt{3gh}$$

$$v = \sqrt{3 \cdot 10 \cdot 5}\ m/s$$

$$\underline{\underline{v \doteq 12{,}25\ m \cdot s^{-1}}}$$