MECHANIKA KAPALIN A PLYNŮ

- Tekutiny – tekuté, snadno dělitelné a mají vnitřní tření
- Ideální kapalina – dokonale tekutá = nemá vnitřní tření
  – nestlačitelná
- Ideální plyn – dokonale tekutý
  – dokonale stlačitelný

- Tlak v kapalinách a plynech – p

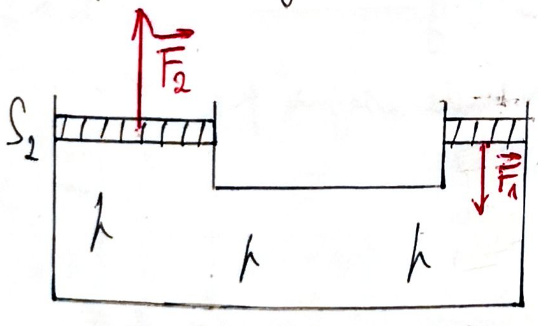
$$p = \frac{F}{S}$$ – síla působící kolmo na plochu S
– obsah plochy

$[p] = N \cdot m^{-2} = Pa$

- Tlak v kapalinách vyvolaný vnější silou – ve v plynech

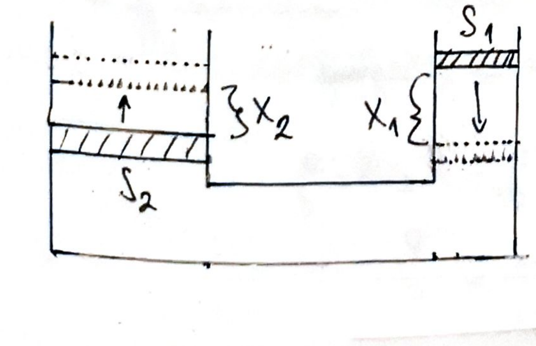
⇒ Pascalův zákon: Tlak v kapalině v uzavřené nádobě vyvolaný vnější silou je ve všech místech kapaliny stejný

⇒ využití: Hydraulické zařízení



$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

⇒ na S_1 tlačím málo a S_2 to zvedá hodně



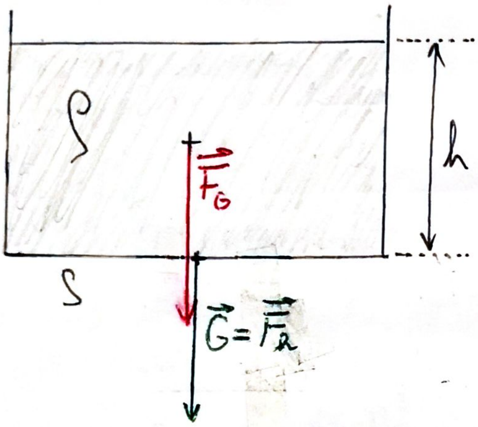
V posunutí vody je konstantní

$$V = S_1 \cdot X_1 = S_2 \cdot X_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{X_2}{X_1}$$

• Tlak v kapalinách vyvolaný tíhovou silou

⇒ Země působí na kapalné těleso tíhovou silou

⇒ kapalné těleso působí na dno a stěny nádoby a na ponořená tělesa Hydrostatickou tlakovou silou $\vec{F_h}$



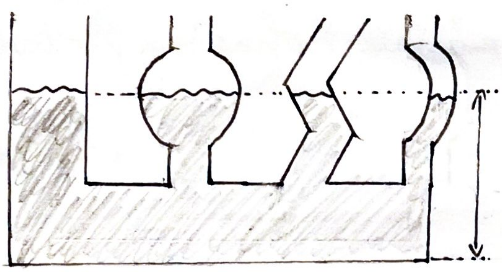
$F_h = G$

$F_h = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$

$F_h = S \cdot h \cdot \rho \cdot g$

$p_h = \frac{F_h}{S}$

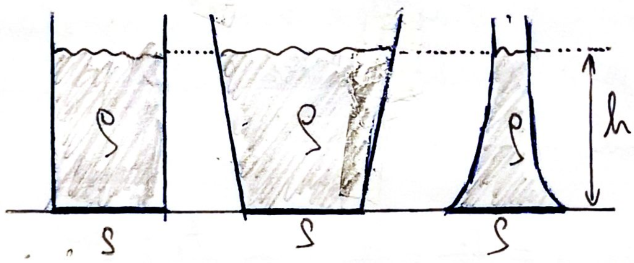
$p_h = h \cdot \rho \cdot g$



p_h je všude stejný

⇒ h je všude stejné

⇒ hydrostatický paradox



$F_h = S \cdot h \cdot \rho \cdot g$

⇒ všude stejné F_h

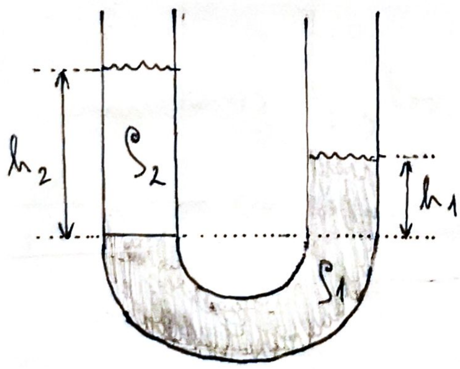
$p_h = h \cdot \rho \cdot g$

⇒ všude stejný p_h

protože stejné h a S a ρ

paradox protože jiný V kapaliny

⇒ 2 kapaliny s rozdílnou hustotou



⇒ p_h nad společným rozhraním je v obou kapalinách stejný

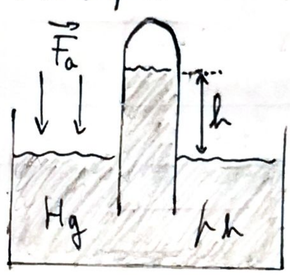
$p_h = h_1 \cdot \rho_1 \cdot g = h_2 \cdot \rho_2 \cdot g$

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$

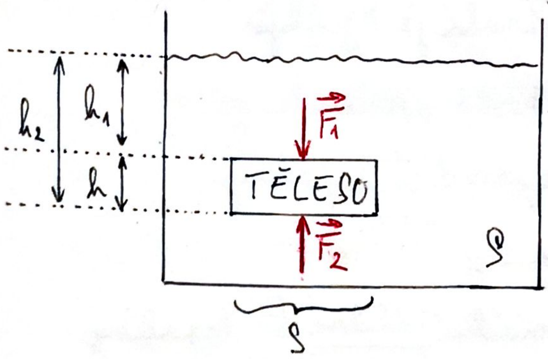
- **Tlak vzduchu vyvolaný tíhovou silou**
  - → kolem Země je vzdušný obal, na který Země působí tíhovou silou
  - ⇒ vzdušný obal působí atmosférickou tlakovou silou na povrch Země a na všechny tělesa na něm
  - → atmosférický tlak – p_a

    $p_a = \frac{F_a}{S}$ → nesnadný výpočet kvůli různé hustotě vzduchu
  - → Torricelliho pokus – měření p_a pomocí rtuťového sloupce
    - → vyteče tolik Hg že $p_a = p_h$

      $p_a = h \cdot \rho \cdot g$ → ρ = hustota Hg
      → h = výška rtuť. sloupce



- **vztlaková síla** – F_{vz}
  - → Archimédův zákon – platí pro plyny i kapaliny (aerostatická / → Hydrostatická)
    - Těleso ponořené do kapaliny v tíhovém poli je nadlehčováno vztlakovou silou, která se rovná tíze kapaliny o stejném objemu jako má ponořená část ponořeného tělesa



h = výška tělesa
S = obsah podstavy tělesa
ρ = hustota kapaliny

$$\left.\begin{aligned} F_{h_1} &= S \cdot h_1 \cdot \rho \cdot g \\ F_{h_2} &= S \cdot h_2 \cdot \rho \cdot g \end{aligned}\right\} h_2 > h_1 \Rightarrow F_2 > F_1$$

$$F_{vz} = F_2 - F_1 = S \cdot \rho \cdot g (h_2 - h_1) = S \cdot \rho \cdot g \cdot h$$

$$S \cdot h = V \Rightarrow F_{vz} = V \cdot \rho \cdot g = m \cdot g \quad \text{protože } \rho = \frac{m}{V}$$

m = tíha kapaliny o objemu ponořené části

- → chování těles zcela ponořených do kapaliny

$F_G = m \cdot g$	$F_G > F_{vz}$ ⇒ těleso klesá
$F_G = V_t \cdot \rho_{tělesa} \cdot g$	$F_G = F_{vz}$ ⇒ těleso se vznáší
$F_{vz} = V \cdot \rho_{kapaliny} \cdot g$ (↳ ponořené č. t.)	$F_G < F_{vz}$ ⇒ těleso plave s částí nad hladinou

→ F_{vz} se pak zmenší protože menší V a $F_{vz} = F_G$

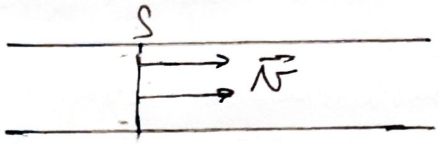
• <u>Proudění kapalin a plynů</u> = Hydrodynamika

⇒ převládá pohyb jedním směrem

• <u>ustálené proudění ideální kapaliny</u>

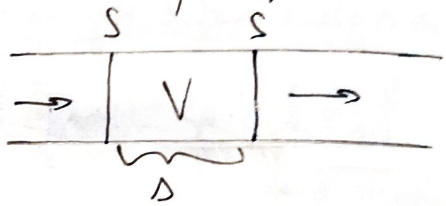
⇒ ve všech bodech je stejná rychlost a stejný směr

⇒ proudění kapaliny se znázorňuje proudnicemi



kolmý řez

⇒ kapalina se posune o s



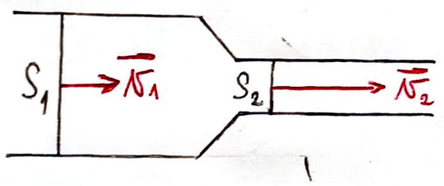
• <u>objemový průtok</u> - Q_V

$$Q_V = \frac{V}{t} = \frac{s \cdot S}{t} \Rightarrow Q_V = v \cdot S$$

$$[Q_V] = m^3 \cdot s^{-1}$$

• <u>rovnice kontinuity</u>

⇒ kapaliny jsou nestlačitelné ⇒ musí odtéct tolik co přiteče



$$Q_{V_1} = Q_{V_2}$$

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

↳ kapalina v užším potrubí je rychlejší

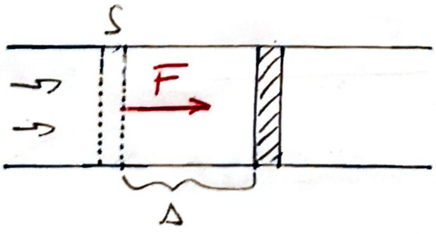
• <u>Bernoulliho rovnice</u>

⇒ zákon zachování mechanické energie proudící kapaliny

⇒ změna rychlosti kapaliny ⇒ změna E_K

⇒ změna E_K kapaliny = změna potenciální <u>tlakové</u> E kapaliny

⇒ <u>tlaková potenciální energie</u>



kapalina působí silou $\vec{F}$ na píst o obsahu S a posune ho po dráze s

⇒ koná práci

$$W = F \cdot s$$

$$W = p \cdot S \cdot s = p \cdot V \Rightarrow \Delta E_p = p \cdot V$$

→ ZZME

$E_k + E_p = konst.$

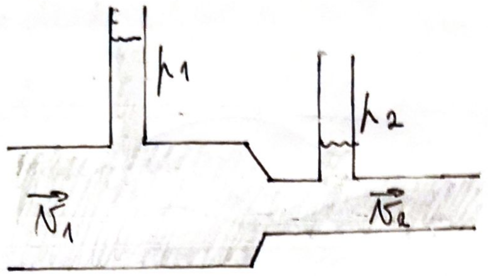
$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + p \cdot V = konst.$

$\frac{1}{2} V \cdot \rho \cdot v^2 + p \cdot V = konst.$ → pro jednotkový V platí

$\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + p = konst$ = Bern. rovnice

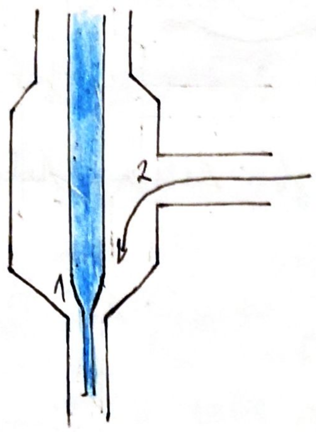
↳ $\uparrow v \Rightarrow \downarrow p$

→ Hydrodynamický paradoxon



$\boxed{\begin{array}{c} v_1 < v_2 \\ p_1 > p_2 \end{array}}$

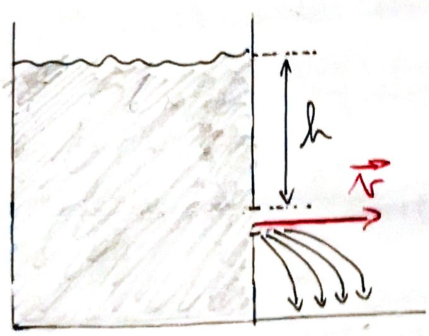
→ vodní vývěva



1. zmenšuje se trubice
   ⇒ ↑ rychlost ⇒ ↓ tlak
   ⇒ menší tlak než p_a ⇒ podtlak
2. nasávání vzduchu z venčí

→ výtoková rychlost

→ rychlost, kterou vytéká kapalina otvorem na stěně nádoby



→ ve výšce h je daný hydrostatický tlak

$E_p = p_h \cdot V = h \cdot \rho \cdot g \cdot V$

$E_k = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v^2$

$E_p = E_k$

$h \cdot \rho \cdot g \cdot V = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v^2$

$v^2 = 2 h \cdot g$

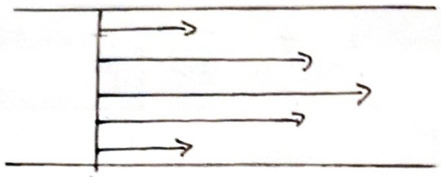
$v = \sqrt{2gh}$ → h = výška vodního sloupce nad otvorem

- Obtékání tělesa tekutinou

→ reálná tekutina

→ uvažujeme vnitřní tření = viskozita

→ v různých částech potrubí je různá rychlost

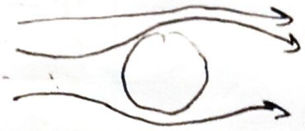


- ↑ rychlost na středu
- ↓ rychlost u stěn

→ laminární proudění

→ při malých rychlostech

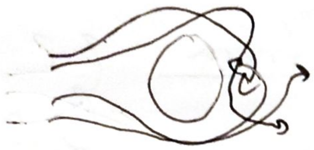
→ proudnice se neprotínají



→ turbulentní proudění

→ při větších rychlostech

→ proudnice se promíchávají a mění svůj směr

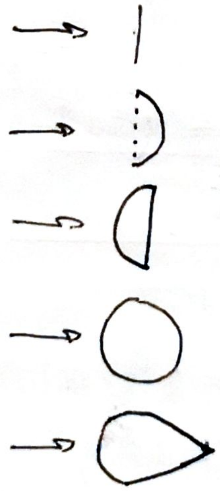


→ k obtékání dochází při relativním pohybu tělesa a tekutiny

⇒ odporová síla těles

→ závisí na → rychlosti tekutiny
→ hustotě tekutiny
→ obsahu kolmého řezu tělesa
→ tvaru tělesa

⇒ součinitel odporu – C



	1,2	rovná tenká deska
	1,3	dutá polokoule
	0,33	vypuklá polokoule
	0,5	koule
	0,037	aerodynamický tvar

$$F_{od} = \frac{1}{2} C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2$$ – platí pro většinu rychlostí

1) Na menší píst hydraulického zvedáku působí síla 140 N, která způsobí v kapalině pod pístem tlak 200 kPa. Větší píst zvedáku má obsah průřezu 350 cm^2. Vypočítejte hmotnost zvedaného předmětu (hmotnost většího pístu je možné zanedbat) a obsah průřezu menšího pístu. (g = 9,81 $m.s^{-2}$)

$(m = \frac{pS_2}{g} \doteq 714\,kg;\ S_1 = \frac{F_1}{p} = 7.10^{-4}\,m^2 (= 7\,cm^2))$

2) Skleněná miska tvaru válce o průměru 10 cm a výšce 5 cm plove na vodní hladině tak, že je ponořená do poloviny své výšky.
Jaká je hmotnost misky? Jaký objem vody je nutné nalít do misky, aby byla ponořená až po okraj stěny? (hustota vody je ρ_0 = 1 000 $kg.m^{-3}$)

$(m = \frac{\pi d^2 v \rho_0}{8} \doteq 0{,}196\,kg\ (= 196\,g);\ V' = \frac{\pi d^2 v}{8} \doteq 1{,}96.10^{-4}\,m^3 (= 196\,ml))$

3) Při rovnoměrném napouštění nádoby vyteklo z vodovodního kohoutku za 1 minutu 9 litrů vody. Vnitřní průměr kohoutku je 5 mm. Přívodní potrubí má obsah příčného řezu 5 cm^2, tlak vody v přívodním potrubí byl při napouštění nádoby 0,25 MPa. Hustota vody je 1 000 $kg.m^{-3}$. Vypočítejte objemový průtok vody, rychlost vody v přívodním potrubí, rychlost a tlak vody v kohoutku.

$(Q_V = \frac{V}{t} = 1{,}5.10^{-4}\,m^3.s^{-1}\ (= 0{,}15\,l.s^{-1});\ v_1 = \frac{V}{S_1 t} = 0{,}3\,m.s^{-1};\ v_2 = \frac{4V}{\pi d^2 t} \doteq 7{,}64\,m.s^{-1};$

$p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - \frac{1}{2}\rho\frac{V^2}{t^2}\left(\frac{16}{\pi^2 d^4} - \frac{1}{S_1^2}\right) \doteq 221\,kPa)$

4) Parašutista má i s výstrojí hmotnost 105 kg. S nerozevřeným padákem je jeho čelní obsah ve směru pohybu 0,8 m^2 a součinitel odporu jeho těla ve vzduchu 0,8. Rozvinutý padák má tvar kulového vrchlíku o průměru 8 m a součiniteli odporu ve vzduchu 1,4. Hustota vzduchu je 1,25 $kg.m^{-3}$, tíhové zrychlení 9,81 $m.s^{-2}$. Vypočítejte největší rychlost pádu parašutisty bez rozvinutého padáku a rychlost rovnoměrného pohybu parašutisty s rozevřeným padákem.

$(v_1 = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho}} \doteq 50{,}7\,m.s^{-1} (\doteq 183\,km.h^{-1});\ v_2 = \sqrt{\frac{8mg}{\pi C d^2 \rho}} \doteq 4{,}84\,m.s^{-1} (\doteq 17\,km.h^{-1}))$

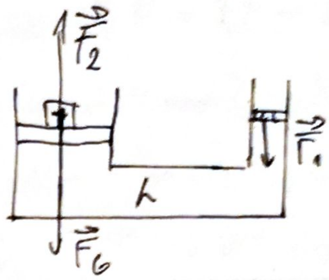
5) Nejhlubší místo v Tichém oceáně je v hloubce 11 034 m. Urči hydrostatický tlak v této hloubce. (hustota mořské vody je 1 020 $kg.m^{-3}$)

6) Z vodovodního kohoutku o průřezu 2 cm^2 vyteče 1 litr vody za 10 sekund. Vypočítej: objemový průtok vody z kohoutku, rychlost vody v přívodním potrubí o průměru 5 cm.

7) Chlapec zvedá žulový kámen ve vodě silou 32 N, na vzduchu silou 52 N. Jaká je hustota žuly?

MECHANIKA KAPALIN A PLYNŮ - viz Fyzika 1

1) $F_1 = 140\,N$



$p = 200\,kPa = 2\cdot 10^5\,Pa$

$S_2 = 350\,cm^2 = 350\cdot 10^{-4}\,m^2 = 3{,}5\cdot 10^{-2}\,m^2$

$m, S_1 = ?$

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow S_1 = \frac{F_1}{p} = \frac{140}{2\cdot 10^5}\,m^2 = \underline{\underline{7\cdot 10^{-4}\,m^2 = 7\,cm^2}}$$

$$F_2 = F_G \Rightarrow p = \frac{m\cdot g}{S_2} \Rightarrow m = \frac{p\cdot S_2}{g} = \frac{2\cdot 10^5\cdot 3{,}5\cdot 10^{-2}}{9{,}81} = \frac{7\cdot 10^3}{9{,}81} \doteq \underline{\underline{713{,}5\,kg}}$$

2) $d = 10\,cm = 10^{-1}\,m \quad \rightarrow r = \frac{1}{2}d$

$v = 5\,cm = 5\cdot 10^{-2}\,m \rightarrow h = \frac{1}{2}v \quad \rightarrow$ plove $\Rightarrow F_{vz} = F_G$

m_m, V'

$$F_{vz} = F_G \Rightarrow S\cdot h\cdot \varrho\cdot g = m\cdot g \Rightarrow \pi\cdot\frac{d^2}{4}\cdot\frac{v}{2}\cdot\varrho = m$$

$$m = \frac{\pi\cdot d^2\cdot v\cdot\varrho}{8} = \frac{\pi\cdot 10^{-2}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 10^3}{8}\,kg$$

$$m_m = \pi\cdot\frac{5}{80}\,kg = \frac{\pi}{16}\,kg \doteq \underline{\underline{0{,}196\,kg = 196\,g}}$$

$\rightarrow$ je ponořená až po okraj, když její ϱ = ϱ vody

$$\varrho = \frac{m}{V} \Rightarrow \varrho = \frac{m_m + \varrho\cdot V'}{\pi\cdot\frac{d^2}{4}\cdot v}$$

$$\frac{\pi}{4}\cdot v\cdot d^2\cdot\varrho = \frac{\pi}{8}\cdot v\cdot d^2\cdot\varrho + \varrho\cdot V'$$

$$V' = \frac{\pi}{4}\cdot v\cdot d^2 - \frac{\pi}{8}\cdot v\cdot d^2 = \frac{\pi}{8}\cdot v\cdot d^2$$

$$V' = \frac{\pi}{8}\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2} = \frac{10}{16}\pi\cdot 10^{-4} = \frac{\pi}{16}\cdot 10^{-3}\,m^3$$

$$\underline{\underline{V' \doteq 0{,}196\cdot 10^{-3}\,m^3 = 0{,}196\,l = 196\,ml}}$$

5) $h = 11034\,m$

$\varrho = 1020\,kg\cdot m^{-3}$

$p_h = ?$

$$p_h = h\cdot\varrho\cdot g = 11034\cdot 1020\cdot 9{,}81\,Pa \doteq \underline{\underline{112{,}5\,MPa}}$$

3) $t = 60\,s$

$V = 9\,l = 9\cdot 10^{-3}\,m^3$

$d_2 = 5\,mm = 5\cdot 10^{-3}\,m$

$S_1 = 5\,cm^2 = 5\cdot 10^{-4}\,m^2$

$p_1 = 0{,}25\,MPa = 25\cdot 10^4\,Pa$

$Q_V, v_1, v_2, p_2 = ?$

- $Q_V = \frac{V}{t} = \frac{9\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10} = 1{,}5\cdot 10^{-4}\,m^3/s = \underline{\underline{0{,}15\,l/s}}$

- $Q_V = v_1\cdot S_1 \Rightarrow v_1 = \frac{V}{t\cdot S_1} = \frac{9\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10\cdot 5\cdot 10^{-4}} = \frac{9}{30} = \underline{\underline{0{,}3\,m\cdot s^{-1}}}$

- $Q_V = v_2\cdot S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{V}{t\cdot S_2} = \frac{V}{t\cdot \pi\cdot \frac{1}{4}d_2^2} = \frac{4\cdot V}{\pi\cdot t\cdot d_2^2}$

$$v_2 = \frac{4\cdot 9\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot 6\cdot 10\cdot 25\cdot 10^{-6}} = \frac{6\cdot 100}{\pi\cdot 25} = \frac{24}{\pi} \doteq \underline{\underline{7{,}64\,m\cdot s^{-1}}}$$

- <u>Bernoulliho rovnice</u>: $\frac{1}{2}\rho\cdot v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\cdot v_2^2 + p_2$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\cdot\left(\frac{V^2}{t^2\cdot S_1^2} - \frac{16\cdot V^2}{\pi^2\cdot t^2\cdot d_2^4}\right)$$

$$p_2 = 25\cdot 10^4 + \frac{1}{2}\cdot 10^3\cdot\left(\frac{9}{10^2} - \frac{24^2}{\pi^2}\right)\,Pa$$

$$p_2 = 25\cdot 10^4 + 45 - \frac{24\cdot 12\cdot 10^3}{\pi^2}\,Pa$$

$$\underline{\underline{p_2 \doteq 220864\,Pa \doteq 221\,kPa \doteq 0{,}22\,MPa}}$$

4) $m = 105\,kg$

$S_1 = 0{,}8\,m^2$

$C_1 = 0{,}8$

$d = 8\,m$

$C_2 = 1{,}4$

$\rho = 1{,}25\,kg\cdot m^3$

$v_1, v_2 = ?$

$\rightarrow F_o < F_G \Rightarrow$ zrychluje dokud $F_o = F_G$

$F_o > F_G \Rightarrow$ zpomaluje dokud $F_o = F_G$

$\Rightarrow F_o = F_G \Rightarrow \frac{1}{2}C\cdot S\cdot\rho\cdot v^2 = m\cdot g$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mg}{C\cdot S\cdot\rho}}$

- $v_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 105\cdot 9{,}81}{0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 1{,}25}} \doteq \underline{\underline{50{,}7\,m\cdot s^{-1}}}$

$S_2 = \frac{\pi}{4}\cdot d^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{8\,mg}{C\cdot\pi\cdot d^2\rho}} = \sqrt{\frac{8\cdot 105\cdot 9{,}81}{1{,}4\cdot\pi\cdot 64\cdot 1{,}25}} \doteq \underline{\underline{4{,}84\,m\cdot s^{-1}}}$

6) $S_1 = 2\,cm^2 = 2\cdot 10^{-4}\,m^2$

$V = 1\,l = 10^{-3}\,m^3$

$t = 10\,s$

$d_2 = 5\,cm = 5\cdot 10^{-2}\,m$

$Q_V, v_2 = ?$

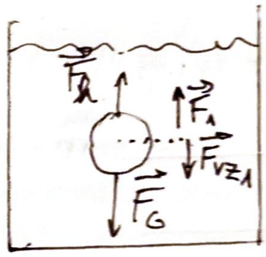
- $\underline{\underline{Q_V = \frac{V}{t} = 0{,}1\,l}}$
- $Q_V = S_2\cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{V}{t\cdot S_2} = \frac{V}{t\cdot \pi\cdot \frac{1}{4}d^2} = \frac{4V}{\pi\cdot t\cdot d^2}$

$$v_2 = \frac{4\cdot 10^{-3}}{\pi\cdot 10\cdot 25\cdot 10^{-4}} = \frac{4}{25\pi} \doteq 0{,}051\,m\cdot s^{-1} = \underline{\underline{5{,}1\,cm\cdot s^{-1}}}$$

7) $F_1 = 32\,N \rightarrow \rho_1 = 1000\,kg/m^3$

$F_2 = 52\,N \rightarrow \rho_2 = 1{,}25\,kg/m^3$

$\rho = ?$



$$\left\} \begin{array}{l} \vec{F}_1 = -\vec{F}_{vz_1} \\ F_1 = F_{vz_1} \end{array}\right.$$

$$F_1 = F_G - F_{vz_1} = m\cdot g - V\cdot\rho_1\cdot g = V\cdot\rho\cdot g - V\cdot\rho_1\cdot g = V\cdot g(\rho - \rho_1)$$

$$F_2 = F_G - F_{vz_2} = m\cdot g - V\cdot\rho_2\cdot g = V\cdot\rho\cdot g - V\cdot\rho_2\cdot g = V\cdot g(\rho - \rho_2)$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} \Rightarrow F_1\cdot\rho - F_1\cdot\rho_2 = F_2\cdot\rho - F_2\cdot\rho_1$$

$$\rho(F_1 - F_2) = F_1\cdot\rho_2 - F_2\cdot\rho_1$$

$$\rho = \frac{F_1\cdot\rho_2 - F_2\cdot\rho_1}{F_1 - F_2}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{52\cdot 10^3 - 32\cdot 1{,}25}{20}\,kg\cdot m^{-3} \doteq \underline{\underline{2598\,kg\cdot m^{-3}}}$$