GRAVITAČNÍ POLE A POHYBY V NĚM

- Newtonův gravitační zákon
  - v okolí každého tělesa je gravitační pole
  - každá 2 tělesa na navzájem působí přitažlivými silami stejně velkými opačného směru
    - říká se jim gravitační síly
  - gravitační konstanta – G nebo $\mathcal{H}$, K – kappa

    $G \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

    $\Rightarrow F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ → směr $\vec{F_g}$ do středu Země → r = vzdálenost těžišť těles

- Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země
  - gravitační zrychlení – a_g
    - těleso o hmotnosti m_1 se nachází v gravitačním poli tělesa o hmotnosti m_2 ⇒ na těleso působí F_g

    $F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

    2.NGZ: $F_g = m_1 \cdot a_g$

    $\Rightarrow a_g = G \cdot \frac{m_2}{r^2}$ → $r = R + h$

    - na povrchu Země: $a_g = G \cdot \frac{M_Z}{R_Z^2}$ — $M_Z = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$, $R_Z = 6{,}38 \cdot 10^6\ m$
    - směr zrychlení: do středu Země – jako $\vec{F_g}$
  - kruhová rychlost – v_k
    - pohybuje-li se těleso rychlostí v_k ve vodorovném směru, tak se pohybuje po kružnici se středem v těžišti Země a poloměrem $r = R_Z + h$

    $\Rightarrow F_g = G \cdot \frac{M_Z \cdot m}{r^2}$

    $\Rightarrow F_g = F_d = m \cdot \frac{v_k^2}{r}$

    $G \cdot \frac{M_Z}{r} = v_k^2$

    $v_k = \sqrt{G \cdot \frac{M_Z}{R_Z + h}}$, $v_k \sim \frac{1}{h}$

- 1. kozmická rychlosť – v_k

⇒ keď je výška h zanedbateľná a zanedbáme i odpor prostredia

$$v_k = \sqrt{G \cdot \frac{M_Z}{R_Z}} \Rightarrow v_k \doteq 7900\ m \cdot s^{-1}$$

- 2. kozmická rychlosť – v_p

⇒ úniková rychlosť = parabolická rychlosť

$$v_p = \sqrt{2} \cdot v_k = \sqrt{2G \cdot \frac{M_Z}{R_Z}}$$

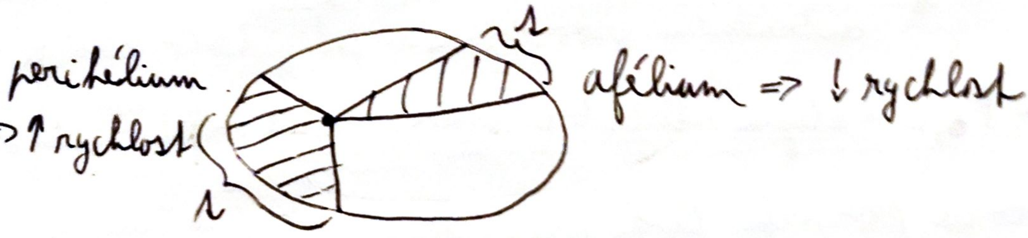
- Keplerovy zákony
  - 1. K.Z

⇒ planety obiehajú okolo Slunce po eliptických trajektóriách, v jejichž jednom společném ohnisku je Slunce

- 2. KZ

⇒ obsahy plôch opísaných průvodičem planety (spojnice P a S) za stejný čas jsou stejně velké

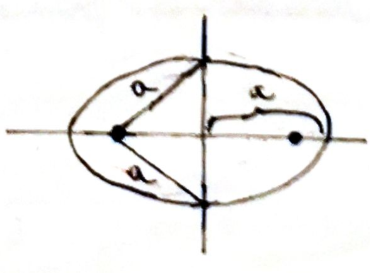
⇒ plošná rychlost je konstantní



- 3. KZ

⇒ pomer druhých mocnin obežných dob dvou planet je stejný jako pomer třetích mocnin délek jejich hlavních poloos

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



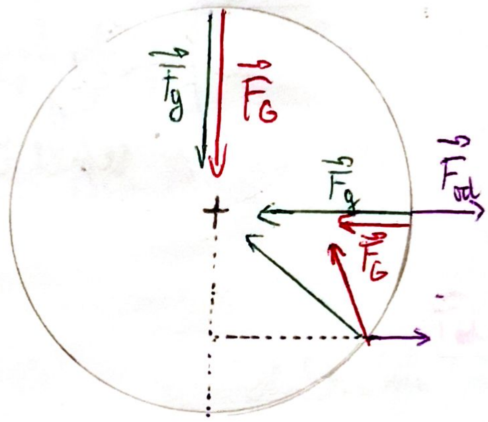
→ Pohyby těles v homogenním gravitačním poli Země = vrhy

- **homogenní pole**
  - → blízko povrchu Země
  - → nemění se, ve všech místech jsou stejné vlastnosti
    - → všude je stejné g a stejný směr $\vec{g}$

- **tíhové zrychlení** – g
  - → uvažujeme rotační pohyb Země okolo své osy } setrvačnost
  - → Země je neinerciální vztažná soustava
  - ⇒ na všechna tělesa v blízkosti Země působí F_g a $F_{odstředivá}$

$$\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_{od} \quad \wedge \quad g = \frac{\vec{F}_G}{m}$$

- **na rovníku**
  F_{od} je největší ⇒ F_G je nejmenší
- **na pólech**
  $F_{od} = 0 \Rightarrow F_G = F_g \Rightarrow F_G$ je největší



- **tíha** – $\vec{G}$
  - → síla, kterou těleso působí na podložku nebo na závěs
  - → ! F_G = síla, kterou Země působí na tělesa ve svém homogenním poli
  - → ! F_g = síla, kterou na sebe navzájem působí tělesa v centrálním gravitačním poli jednoho z nich
  - – F_G, G – stejná velikost a směr, rozdíl v působišti a vzniku

⇒ vzorce pro vrhy platí pouze pokud zanedbáme odpor prostředí

→ všechny vrhy mají počáteční rychlost v_0

→ všechny vrhy jsou složené pohyby
- volného pádu
- rovnoměrného přímočarého pohybu

- **svislý vrh dolů**
  - směr r. přímočarého pohybu: dolů

    $\Rightarrow v = v_0 + g \cdot t$

    $\Rightarrow s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$

- **svislý vrh vzhůru**
  - směr r.p.p.: vzhůru

    $\Rightarrow v = v_0 - g \cdot t$

    $\Rightarrow s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$

  - výška a doba výstupu

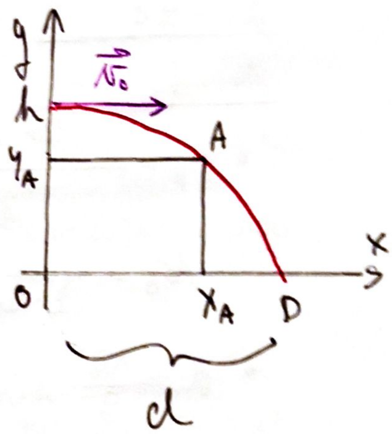
    → těleso přestalo stoupat → $v = 0$

    $t = \frac{v_0}{g}$ $\quad h = \frac{v_0^2}{2g}$

- **vodorovný vrh**
  - směr r.p.p.: vodorovný
  - pro libovolný bod A trajektorie platí:

    $x_A = v_0 \cdot t$

    $y_A = h - \frac{1}{2} g t^2$



  - doba a délka vrhu

    $D \Rightarrow y_D = 0 \wedge x_D = d$

    $t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\quad d = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$

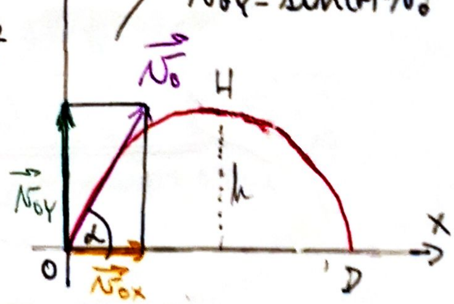
- **šikmý vrh**
  - směr r.p.p.: pod úhlem α = pod elevačním úhlem
  - pro libovolný bod A trajektorie platí:

    $x_A = v_{0x} \cdot t \quad \Rightarrow x_A = v_0 \cdot t \cdot \cos(\alpha)$

    $y_A = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_A = v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t^2$

$v_{0x} = \cos(\alpha) \cdot v_0$

$v_{0y} = \sin(\alpha) \cdot v_0$



  - doba a délka vrhu

    $D \Rightarrow y_D = 0 \wedge x_D = d$

    $t_d = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$ $\quad d = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$

    $\Rightarrow$ nejdelší vrh pro $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow$ pro $\alpha = 45°$

    → ostatní vrhy jsou speciální případy šikmého vrhu

    ↳ včetně volného pádu

→ dodatek k šikmému vrhu

- v počátku a v D je stejná v_y ale opačného směru

$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$$

- bod H - nejvyšší bod trajektorie vrhu

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t_h = 0$$

$$t_h = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} = \frac{1}{2} t_d$$

⇒ trvá stejnou dobu vystoupat do H jako z něj dopadnout na zem

$$y_A = h \Rightarrow h = v_0 \cdot t_h \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g t_h^2$$

$$h = v_0 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g} \cdot \sin(\alpha) - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g^2}$$

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g}$$

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g}$$

z h padá těleso volným pádem o rychlosti $g \cdot t$ kde t je doba, před kterou těleso prolétlo bodem H

⇒ v D se dá výška tohoto volného pádu spočítat:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t_h^2 = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{t_d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} g \cdot \frac{t_d^2}{4}$$

$$h = \frac{1}{8} g \cdot t_d^2$$

1) Dva hmotné body, jeden o hmotnosti 245 000 tun, druhý o hmotnosti $4{,}5.10^7$ kg, na sebe navzájem působí přitažlivou gravitační silou 66,7 N. Jaká je vzdálenost mezi oběma hmotnými body? ($\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2})

$\left(r = \sqrt{\kappa \frac{m_1 m_2}{F_g}} = 105\ m\right)$

2) Golfový míček odpálený pod úhlem 30° dopadl po 4 s letu nad vodorovným povrchem. Vypočítejte velikost počáteční rychlosti míčku, největší výšku nad povrchem a vzdálenost bodu dopadu od místa odpalu. Zanedbejte vliv odporu vzduchu na pohyb míčku. (g = 10 m.s^{-2})

$\left(v_0 = \frac{gt}{2\sin\alpha} = 40\ m.s^{-1}\ (= 144\ km.h^{-1});\ h = \frac{1}{8}gt^2 = 20\ m\,;d = \frac{1}{2}gt^2 \cdot \cot\alpha = 80 \cdot \sqrt{3}\ m \doteq 138{,}56\ m\right)$

3) Parašutista s rozvinutým padákem klesá rovnoměrným pohybem rychlostí 5 m.s^{-1}. Ve výšce 10 m nad zemí se z výstroje parašutisty uvolní karabina, která se zanedbatelným odporem vzduchu dopadne na zem. Vypočítejte za jak dlouhou dobu a jakou rychlostí dopadne karabina na zem. (g = 10 m.s^{-2})

$\left(t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g} = 1\ s; v = \sqrt{v_0^2 + 2hg} = 15\ m.s^{-1}\right)$

4) Poloměr Země je $6{,}378.10^6$ m, gravitační zrychlení na jejím povrchu 9,79 m.s^{-2}. Vypočítejte hmotnost Země a velikost 1. a 2. kosmické rychlosti Země. ($\kappa = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2})

$\left(M_Z = \frac{R_Z^2 \cdot a_g}{\kappa} \doteq 5{,}97.10^{24} kg; v_k = \sqrt{R_Z \cdot a_g} \doteq 7\,902\ m.s^{-1} \doteq 7{,}9\ km.s^{-1};\right.$
$\left.v_p = \sqrt{2 \cdot R_Z \cdot a_g} \doteq 11\,175\ m.s^{-1} \doteq 11{,}2\ km.s^{-1}\right)$

5) V jaké vzdálenosti od povrchu planety je velikost gravitačního zrychlení poloviční vzhledem k jeho velikosti na povrchu planety (např. Země)?

6) Z okna výškového domu vyhodil chlapec vodorovným směrem míč, který dopadl za dobu 3 s do vzdálenosti 15 m od domovní zdi. Urči výšku okna nad zemí, počáteční rychlost míče a rychlost míče při dopadu.

7) Sonda Lunar Prospector obíhala v únoru 1998 po kruhové dráze kolem Měsíce ve výšce 120 km nad jeho povrchem. Vypočítej rychlost sondy vzhledem k Měsíci a její oběžnou dobu.

8) Doba oběhu Marsu kolem Slunce je přibližně 1,9 roku. Určete jeho střední vzdálenost od Slunce.

→ příklady

1) $m_1 = 24{,}5 \cdot 10^7\ kg$

$m_2 = 4{,}5 \cdot 10^7\ kg$

$F_g = 66{,}7\ N$

$r = ?$

$$F_g = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$r^2 = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F_g}$$

$$r = \sqrt{G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{F_g}}$$

$$r = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 24{,}5 \cdot 10^7 \cdot 4{,}5 \cdot 10^7}{66{,}7}}$$

$$r = \sqrt{24{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 10^2}$$

$$\underline{\underline{r = 105\ m}}$$

2) $\alpha = 30^\circ$

$t_v = 4\ s$

$v_0, h, d = ?$

- $$t_v = \frac{2 v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$$

$$v_0 = \frac{t_v \cdot g}{2 \cdot \sin(\alpha)}$$

$$v_0 \doteq \frac{4 \cdot 10}{2 \cdot \frac{1}{2}}\ m \cdot s^{-1}$$

$$\underline{\underline{v_0 \doteq 40\ m \cdot s^{-1}}}$$

- $$d = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

$$d = \frac{\frac{t_v^2 \cdot g^2}{4 \cdot \sin^2(\alpha)}}{g} \cdot 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

$$d = \frac{t_v^2 \cdot g}{4 \cdot \sin^2(\alpha)} \cdot 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} g \cdot t_v^2 \cdot \cot g(\alpha)$$

$$\underline{\underline{d = 5 \cdot 16 \cdot \sqrt{3}\ m = 80\sqrt{3}\ m \doteq 138{,}56\ m}}$$

- $$h = \frac{1}{2} g \cdot t_h^2 = \frac{1}{2} g \frac{t_v^2}{4} = \frac{1}{8} g \cdot t_v^2$$

$$\underline{\underline{h \doteq \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 16\ m = 20\ m}}$$

3) $v_0 = 5\ m\cdot s^{-1}$

$h = 10\ m$

$t, v = ?$

- $h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$

$\left(\frac{1}{2}g\right)\cdot t^2 + (v_0)\cdot t - h = 0$

$D = v_0^2 + 2gh$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{D}}{g}$

může jen ⊕ → čas nemůže být ⊖

$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$

$t = \frac{-5 + \sqrt{25 + 200}}{g}\ s$

$t = 1\ s$

- $v = v_0 + g \cdot t$

$v = v_0 - v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

$v = \sqrt{225}\ m\cdot s^{-1}$

$v = 15\ m\cdot s^{-1}$

4) $R_Z = 6{,}378 \cdot 10^6\ m = 6378 \cdot 10^3$

$a_g = 9{,}79\ m\cdot s^{-2}$

$M_Z, v_k, v_p = ?$

- $a_g = G \cdot \frac{M_Z}{R_Z^2}$

$M_Z = \frac{1}{G} \cdot a_g \cdot R_Z^2$

$M_Z = \frac{9{,}79 \cdot 6378^2 \cdot (10^3)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}\ kg$

$M_Z = \frac{9{,}79 \cdot 6378^2}{6{,}67} \cdot 10^{17}\ kg$

$M_Z \doteq 5{,}97 \cdot 10^{24}\ kg$

- $v_k = \sqrt{G \cdot \frac{M_Z}{R_Z}} = \sqrt{\frac{G}{R_Z} \cdot \frac{a_g \cdot R_Z^2}{G}} = \sqrt{a_g \cdot R_Z}$

$v_k = \sqrt{9{,}79 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6}\ m$

$v_k \doteq 7902\ m\cdot s^{-1}$

- $v_p = \sqrt{2} \cdot v_k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a_g \cdot R_Z} = \sqrt{2 a_g R_Z}$

$v_p \doteq 11\,175\ m\cdot s^{-1}$

5) $a_{gP} = x$

$a_g = \frac{1}{2} \cdot x$

$h = ?$

$$a_{gP} = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$a_g = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$

$$a_g = \frac{1}{2} a_{gP}$$

$$G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{1}{2} G \cdot \frac{M}{R^2}$$

$$(R+h)^2 = 2R^2$$

$$R+h = R\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{h = R(\sqrt{2}-1)}}$$

6) $t_v = 3\,s$

$d = 15\,m$

$h, v_0, v = ?$

• $d = t_v \cdot v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{d}{t_v}$

$$\underline{\underline{v_0 = \frac{15}{3} = 5\,m \cdot s^{-1}}}$$

• $t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$t_v^2 = \frac{2h}{g}$$

$$h = \frac{1}{2} g t_v^2$$

$$\underline{\underline{h = 5 \cdot 9\,m = 45\,m}}$$

ale to je jen volný pád takže jsem to nemusel odvozovat

• $v^2 = v_0^2 + v_y^2$

$$v^2 = \frac{d^2}{t_v^2} + g^2 \cdot t_v^2$$

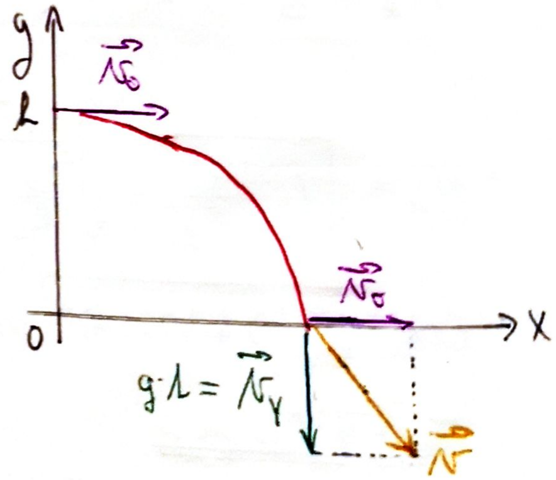
$$v^2 = \frac{d^2}{t_v^2} + \frac{g^2 \cdot t_v^2 \cdot t_v^2}{t_v^2}$$

$$v^2 = \frac{d^2 + g^2 \cdot t_v^4}{t_v^2}$$

$$v = \frac{\sqrt{d^2 + g^2 \cdot t_v^4}}{t_v}$$

$$v = \frac{\sqrt{225 + 100 \cdot 81}}{3}\,m \cdot s^{-1}$$

$$\underline{\underline{v \doteq 30\,m \cdot s^{-1}}}$$



7) $h = 120\,km = 12 \cdot 10^4\,m$

$M_M \doteq 7{,}35 \cdot 10^{22}\,kg$

$R_M \doteq 1{,}74 \cdot 10^6\,m$

$v_K,\ T = ?$

- $v_K = \sqrt{G \cdot \frac{M_M}{R_M + h}}$

$v_K = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{1{,}74 \cdot 10^6 + 12 \cdot 10^4}}$

$v_K \doteq 1624\ m \cdot s^{-1}$

- $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi \cdot (R_M + h)}{v_K}$

$T = \frac{2\pi (1{,}74 \cdot 10^6 + 12 \cdot 10^4)}{1624}$

$T \doteq 7196\,s \doteq 120\,min = 2\,h$

8) $T = 1{,}9\,r \doteq 59{,}96 \cdot 10^6\,s$

$M_S \doteq 1{,}989 \cdot 10^{30}\,kg$

$r = ?$

$$\left.\begin{aligned} v_K &= \sqrt{G \cdot \frac{M_S}{r}} \\ T &= \frac{s}{v} = \frac{2\pi \cdot r}{v_K} \end{aligned}\right\} T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}}} \Rightarrow T \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{r}} = 2\pi r$$

$$T^2 \cdot \frac{G M_S}{r} = 4\pi^2 \cdot r^2$$

$$T^2 \cdot G \cdot M_S = 4\pi^2 \cdot r^3$$

$$r^3 = \frac{T^2 \cdot G \cdot M_S}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_S}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{59{,}96^2 \cdot 10^{12} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}}{4\pi^2}}\ m$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{59{,}96 \cdot 59{,}96 \cdot 6{,}67 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{31}}{4\pi^2}}\ m$$

$r \doteq 2{,}2946 \cdot 10^{11}\,m = 2{,}2946 \cdot 10^8\,km$

$r \doteq 229{,}5 \cdot 10^6\,km$

1) Chlapec vystřelil prakem svisle vzhůru kámen rychlostí 20 $m.s^{-1}$. Určete do jaké největší výšky od místa vystřelení kámen vystoupí.

2) Z okna domu ve výšce 20 m nad vodorovnou rovinou vyhodil chlapec vodorovným směrem tenisový míček rychlostí 5 $m.s^{-1}$. Určete:
a) za jakou dobu a v jaké vzdálenosti od domu míček dopadne,
b) jak velká je rychlost dopadu míčku.

3) Jak velkou rychlostí tryská voda z trubice vodotrysku svisle vzhůru, jestliže vystupuje do výšky 5 m?

4) Míč vržený svisle vzhůru se vrátil na zem za dobu 4 s. Do jaké výšky vystoupil?

5) Těleso vržené svisle vzhůru vystoupilo do výšky 20 m. Jak velká byla jeho počáteční rychlost?

6) Při jakém elevačním úhlu je výška výstupu stejná jako délka vrhu?

1) $v_0 = 20\ m\cdot s^{-1}$

$h = ?$

• $v = v_0 - g\cdot t$ – těleso přestalo stoupat → $v = 0$

$t = \frac{v_0}{g}$

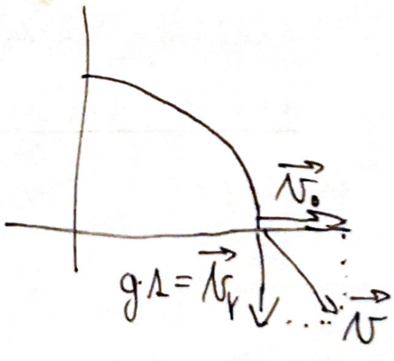
• $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}g\cdot\frac{v_0^2}{g^2} \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$

• $h = \frac{20^2}{20}\ m = 20\ m$

2) $h = 20\ m$

$v_0 = 5\ m\cdot s^{-1}$

$t_d, d, v = ?$



• $t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2\ s$

• $d = v_0\cdot t_d = 5\cdot 2 = 10\ m$

• $v^2 = v_0^2 + v_y^2$

$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_d^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2\cdot\frac{2h}{g}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

$v = \sqrt{25 + 20\cdot 20}\ m\cdot s^{-1}$

$v \doteq 20{,}6\ m\cdot s^{-1}$

3) $\dfrac{h = 5\,m}{v_0 = ?}$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$v_0^2 = 2gh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \Rightarrow \underline{\underline{v_0 = \sqrt{20 \cdot 5} = 10\,m \cdot s^{-1}}}$$

4) $\dfrac{t = 4\,s}{h = ?}$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \wedge s = 0 \quad (\text{dopad na zem})$$

$$\underline{t\left(v_0 - \frac{1}{2} g t\right) = 0}$$

$$\underline{\underline{v_0 = \frac{1}{2} g t}} \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\frac{1}{4} \cdot g^2 t^2}{2g} = \underline{\underline{\frac{1}{8} g t^2}}$$

$$\underline{\underline{h = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 16 = 20\,m}}$$

5) $\dfrac{h = 20\,m}{v_0 = ?}$ } viz 3)

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{20^2} = \underline{\underline{20\,m \cdot s^{-1}}}$$

6) $\dfrac{h = d}{\alpha = ?}$

$$h = d \Rightarrow \frac{v_0^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

$$\frac{1}{2} \sin^2(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

$$\sin^2(\alpha) - 4 \sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0$$

$$\underline{\sin(\alpha)\left(\sin(\alpha) - 4\cos(\alpha)\right) = 0}$$

$$\sin(\alpha) = 0 \quad \vee \quad \sin(\alpha) = 4\cos(\alpha)$$

$$\underline{\underline{\alpha = k\pi}} \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = 4$$

$$\underline{\underline{\alpha = \arctan(4) + k\pi}}$$

↳ 0, 180

↳ 76, 256