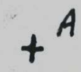
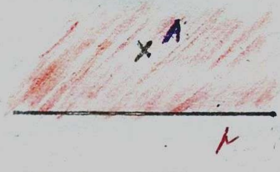
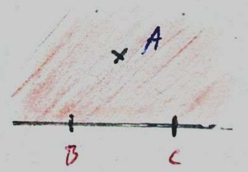
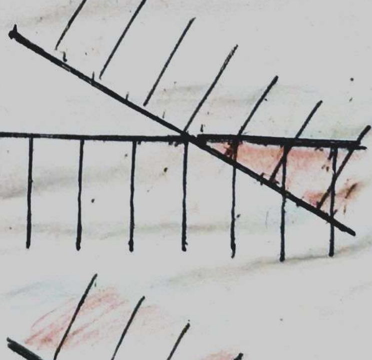
PLANIMETRIE

→ základní útvary v rovině

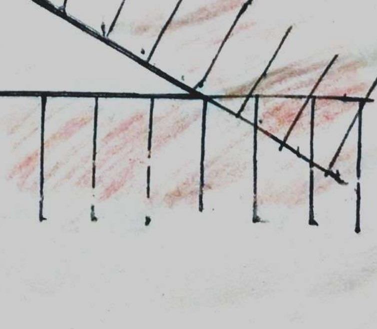
- **bod** – A – 
- **přímka** – $\overleftrightarrow{AB}$ – 
- **podmnožiny přímky**
  - **úsečka** – AB – 
  - **polopřímka** – ↦AB – 
  - **opačná** – ↤AB – 

- **polorovina**
  - → vymezená
    - → hraniční přímkou – přímka p, přímka BC
    - → vnitřním bodem – A
      - → polorovina pA ; BCA
        - ↦pA 
        - ↦BCA 

  - → průnik 2 polorovin
    - konvexní úhel – ∡ $< 180°$
    - ↦pA ∩ ↦qA

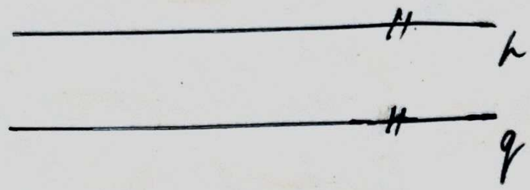


  - → sjednocení 2 polorovin
    - nekonvexní úhel – ∡ $> 180°$
    - ↦pA ∪ ↦qA



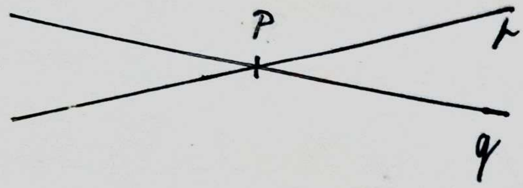
- vzájemná poloha
  - rovnoběžky – $p \parallel q$

    → $p \cap q = \emptyset$



  - různoběžné – $p \cap q = \{P\}$

    → P = průsečík



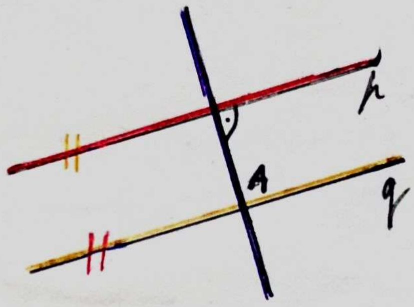
  - přímky totožné – $p = q$

    → $p \cap q = p$

  → každým bodem lze k dané přímce vést

  → 1 kolmici

  → 1 rovnoběžku

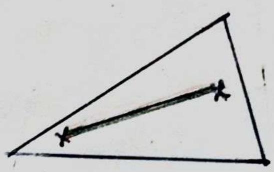


- úhly

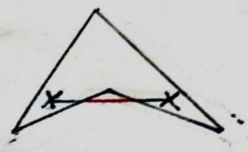
  → konvexní útvary

  → úsečka spojující 2 body v útvaru

  → je součástí tohoto útvaru



  → nekonvexní útvary

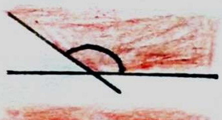


  → konvexní → ostrý

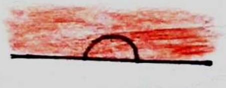
  → pravý

  $< 180°$

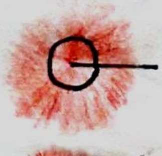
  → tupý



  → přímý



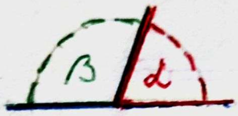
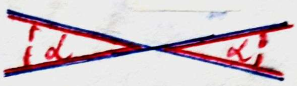
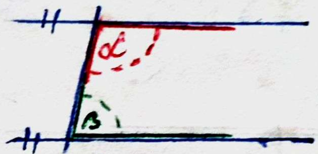
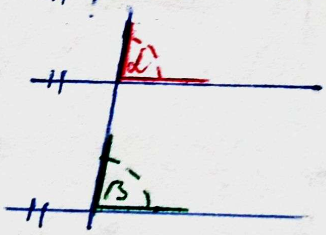
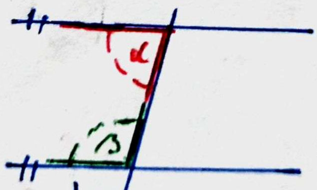
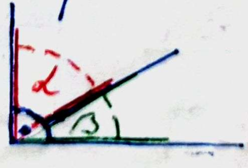
  → nekonvexní → plný

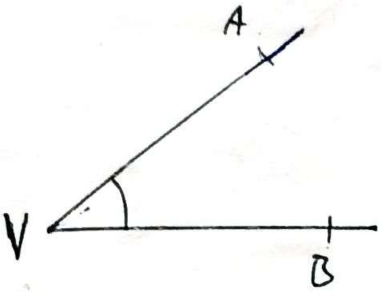


  $> 180°$

  → vypuklý

Úhly vzhledem k poloze

- → úhly vedlejší –  – $\alpha + \beta = 180°$
- → úhly vrcholové –  – $\alpha = \alpha$
- → úhly přilehlé –  – $\alpha + \beta = 180°$
- → úhly souhlasné –  – $\alpha = \beta$
- → úhly střídavé  – $\alpha = \beta$
- → úhly doplňkové  – $\alpha + \beta = 90°$

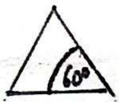


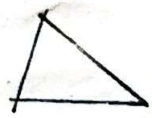
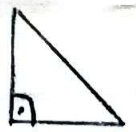
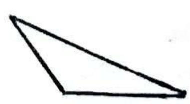
$\measuredangle AVB$

$\mapsto VA$ } ramena
$\mapsto VB$

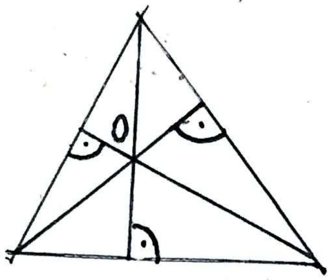
→ **velikost úhlů**

- **stupně** → $\frac{1}{360}$ plného úhlu $= 1°$
- **radiány** → $1\ rad \doteq 57°$

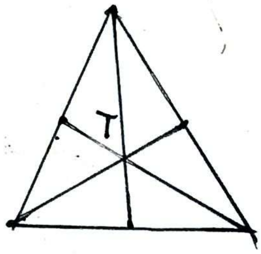
- **trojúhelníky**
  - → průnik 3 polorovin
  - → $a + b > c \wedge a + c > b \wedge b + c > a$
  - **úhly**
    - **vnitřní** – součet je $180°$
    - **vnější** – velikost vnějšího úhlu je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů při zbývajících vrcholech
  - **klasifikace Δ**
    - **podle stran** → **rovnostranný** 

      → **rovnoramenný** 
      → **obecný** 
    - **podle úhlů** → **ostroúhlý**
      → všechny úhly jsou ostré 
      → **pravoúhlý**
      → 1 jeho úhel je pravý 
      → **tupoúhlý**
      → 1 jeho úhel je tupý 

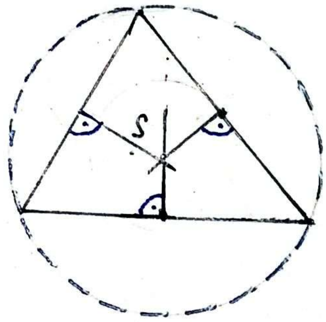
- Ortocentrum
  - → průsečík výšek
    - → kolmice ze strany v protilehlém rohu
    - → může ležet i vně trojúhelníku



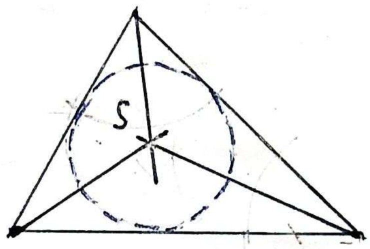
- Těžiště
  - → průsečík těžnic
    - → spojnice vrcholu a středu protilehlé strany
    - → těžiště leží $\frac{1}{3}$ od strany a $\frac{2}{3}$ od vrcholu



- Kružnice opsaná
  - → střed leží na průsečíku os stran
    - → kolmice na střed strany



- Kružnice vepsaná
  - → střed leží na průsečíku os úhlů
    - → polovina úhlu



- Shodnost △
  - → jsou shodné když se dají přemístěním ztotožnit
  - → stejné vnitřní úhly a délky stran
    - SSS – 2△ co se shodují ve 3 stranách
    - USU – 2△ co se shodují v 1 straně a úhlech k ní přilehlých
    - SUS – 2△ co se shodují ve 2 stranách a úhlu jimi sevřeným
    - SsU – 2△ co se shodují v 2 stranách a úhlu proti větší z nich
- Podobnost △
  - → jsou shodné pokud mají – shodnou dvojici úhlů
  - – poměr dvou stran

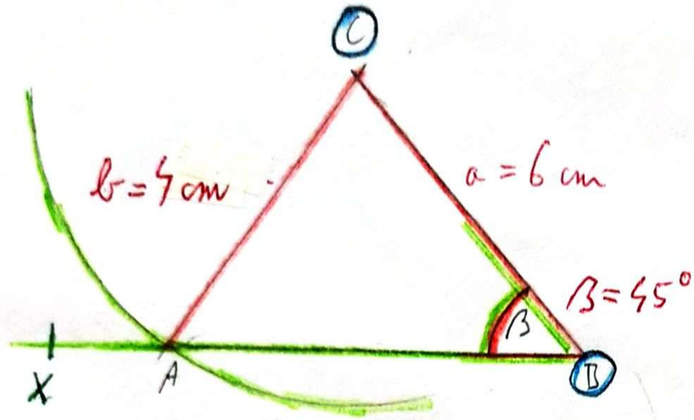
Konstrukce trojúhelníka

→ $\triangle ABC$: $a = 6$ cm

$b = 4$ cm

$\beta = 45°$

Rozbor:



→ Umístím BC → co vím o A?

- A : $|CA| = 4$ cm $\Rightarrow k(C, 4\,cm)$

: $|\sphericalangle CBA| = 45° \Rightarrow \sphericalangle CBX$

→ A je průsečík k a $\sphericalangle CBX$

Konstrukce:

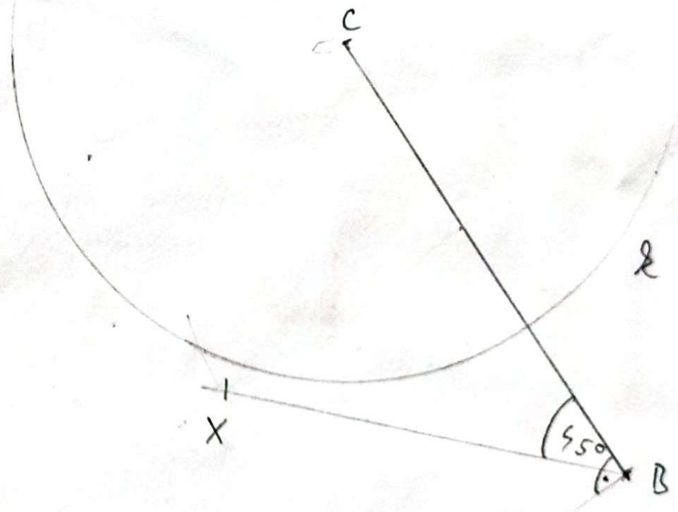
1, BC; $|BC| = 6$ cm

2, k; $k(C, 4\,cm)$

3, $\sphericalangle CBX$; $|\sphericalangle CBX| = 45°$

4, A; $A \in k \cap \overrightarrow{BX}$

5, $\triangle ABC$



Závěr

→ Úloha při daném zadání nemá řešení

→ $\triangle ABC$ nelze sestrojit

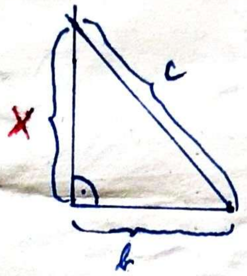
Pythagorova věta - PV

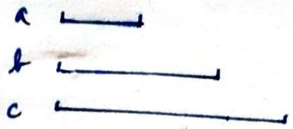
- $\underline{c^2 = a^2 + b^2}$

$\rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2}$

$\rightarrow a = \sqrt{c^2-b^2}$

$\rightarrow x = \sqrt{c^2-b^2}$



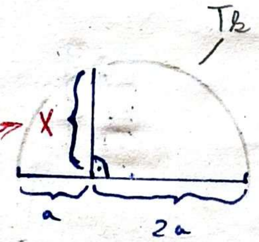


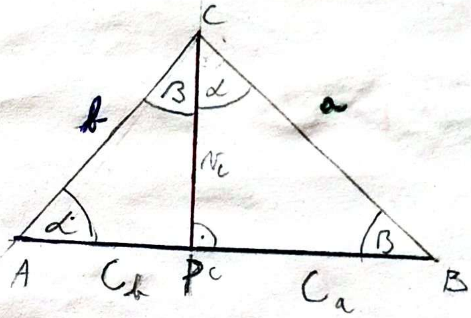
Eukleidova věta o výšce - EVV

- $\underline{v_c^2 = c_a \cdot c_b}$

$\rightarrow v_c = \sqrt{c_a \cdot c_b}$

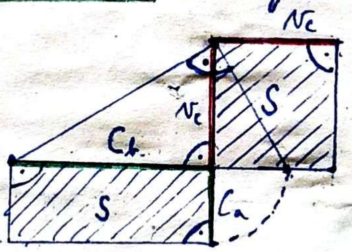
$\rightarrow x = \sqrt{a \cdot 2a}$





- obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony

↳

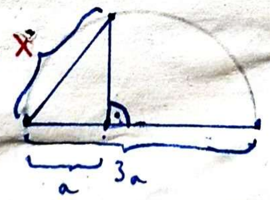


Eukleidova věta o odvěsně - EVO

- $\underline{a^2 = c \cdot c_a}$

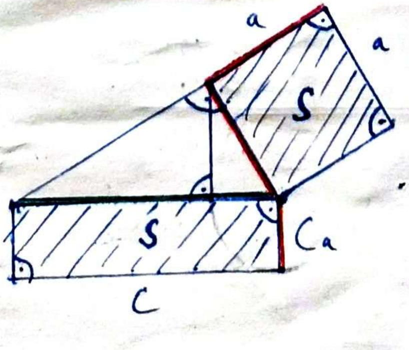
$\rightarrow a = \sqrt{c \cdot c_a}$

$\rightarrow x = \sqrt{a \cdot 3a}$



- obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlé

↳

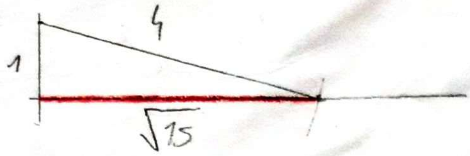


KONSTRUKCE $\sqrt{15}$

Pythagorova věta - PV

$\rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2} \rightarrow c = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{15} = \sqrt{4^2 - 1}$

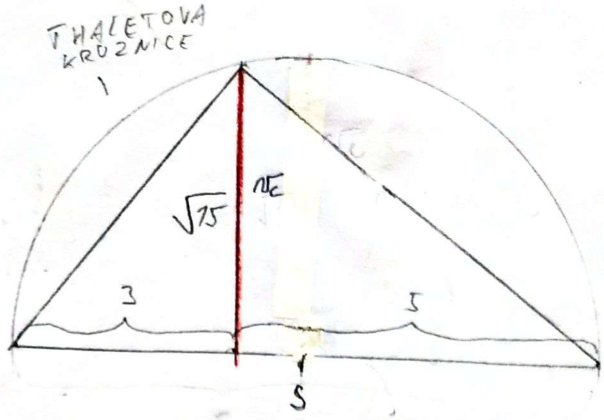


Euklidova věta o výšce - EVV

$\rightarrow \boxed{v_c^2 = c_a \cdot c_b} \rightarrow v_c = \sqrt{c_a \cdot c_b}$

$\sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5}$

$\hookrightarrow \left.\begin{array}{l} c_a = 3 \\ c_b = 5 \end{array}\right\} c = 8$

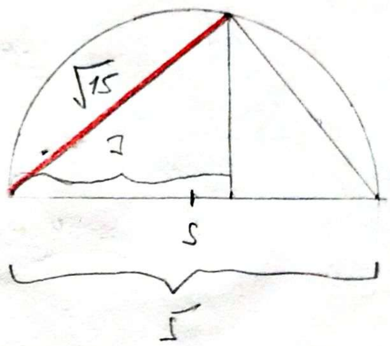


Euklidova věta o odvěsně - EVO

$\rightarrow \boxed{b^2 = c \cdot c_b} \rightarrow b = \sqrt{c \cdot c_b}$

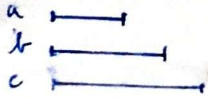
$\sqrt{15} = \sqrt{3 \cdot 5}$

$\hookrightarrow \begin{array}{l} c_b = 3\,cm \\ c = 5\,cm \end{array}$



Vyučití

- $x = \dfrac{a \cdot b\sqrt{6}}{\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{a \cdot y}{z}$ - 2 nahoře - 1 dole

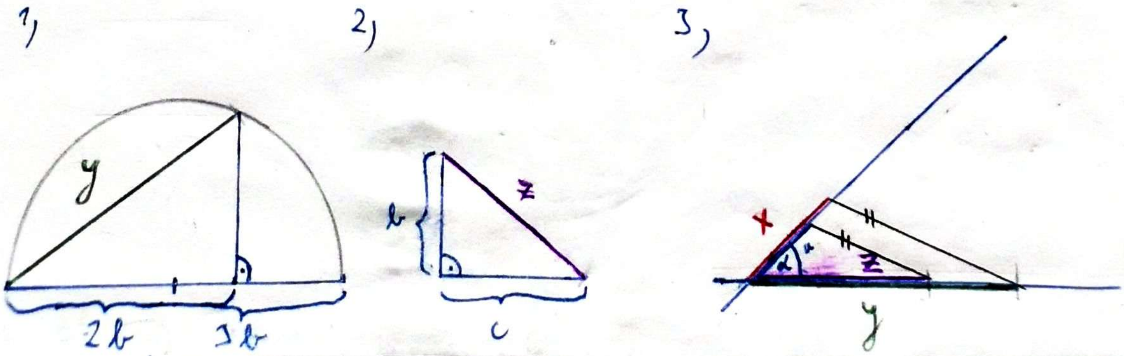


1) $y = b\sqrt{6} = \sqrt{6b^2} = \sqrt{3b \cdot 2b}$ - EVO

2) $z = \sqrt{b^2+c^2}$ - PV

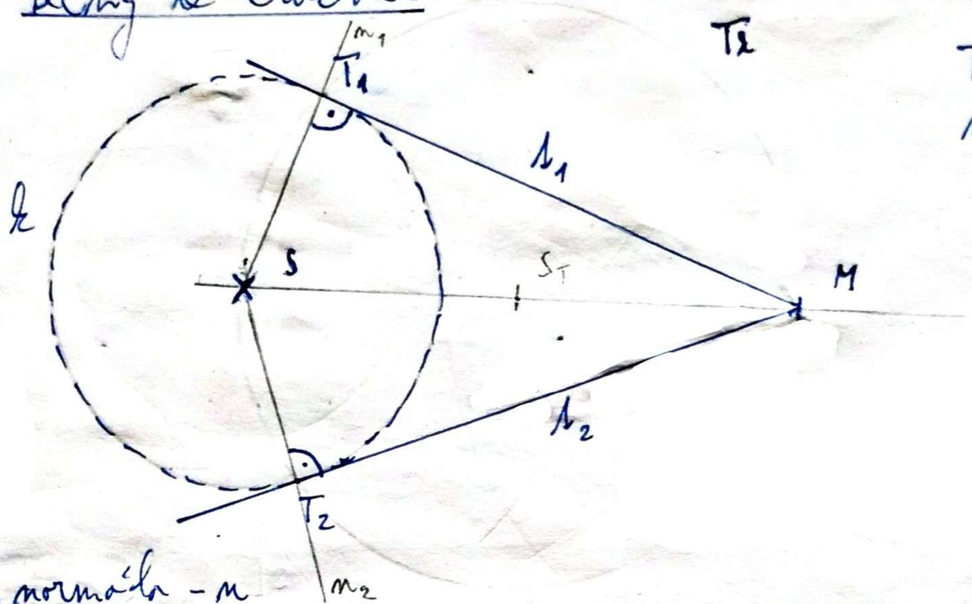
3) $x = \dfrac{a \cdot y}{z} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{z}$ - Podobnost Δ

1) 2) 3)



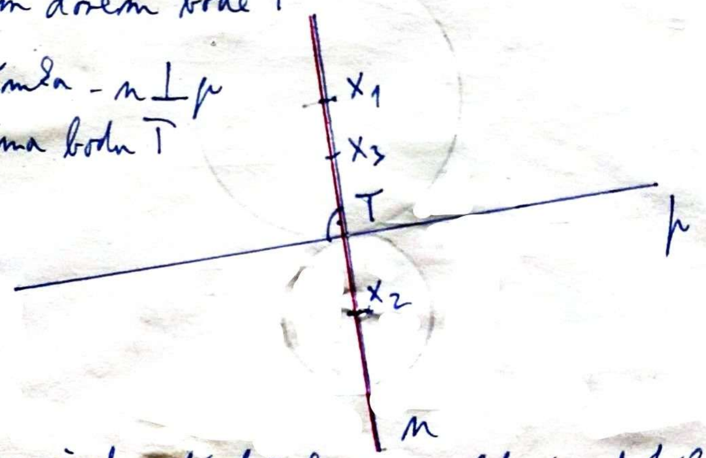
• Tečny ke kružnici

T_k = Thaletova kružnice
T_1 = bod dotyku
t_1 = tečna

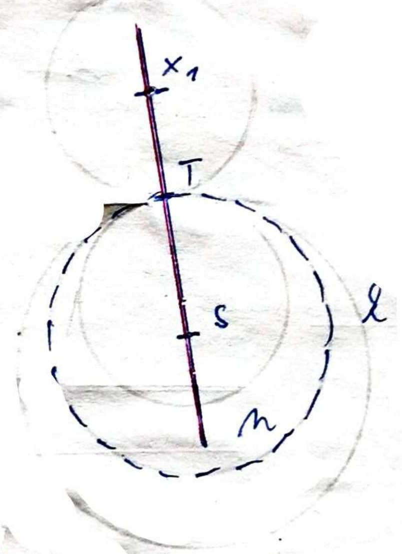


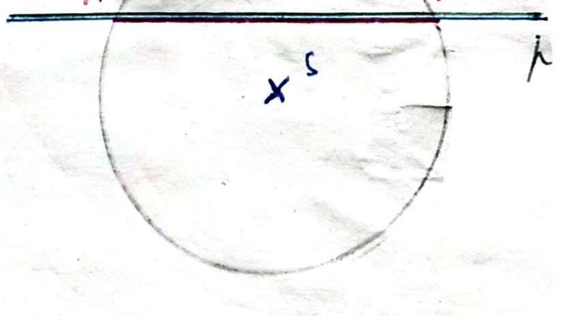
• normála – n

– přímky – množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T
→ přímka – n ⊥ p
→ vyjma bodu T



– kružnice – množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice k v jejím daném bodě T
→ přímka – n = ST
→ vyjma bodů S, T

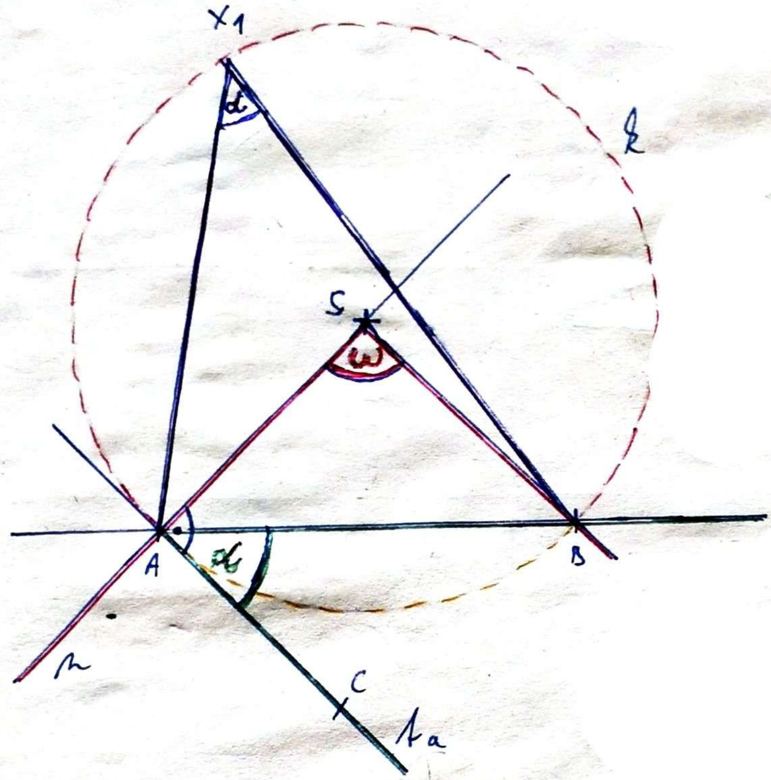




• tětiva

• sečna

• Úhly ke kružnici



→ $\widehat{AB}$ = oblouk AB

$k - \widehat{AB}$ = ten druhý oblouk, zbytek k

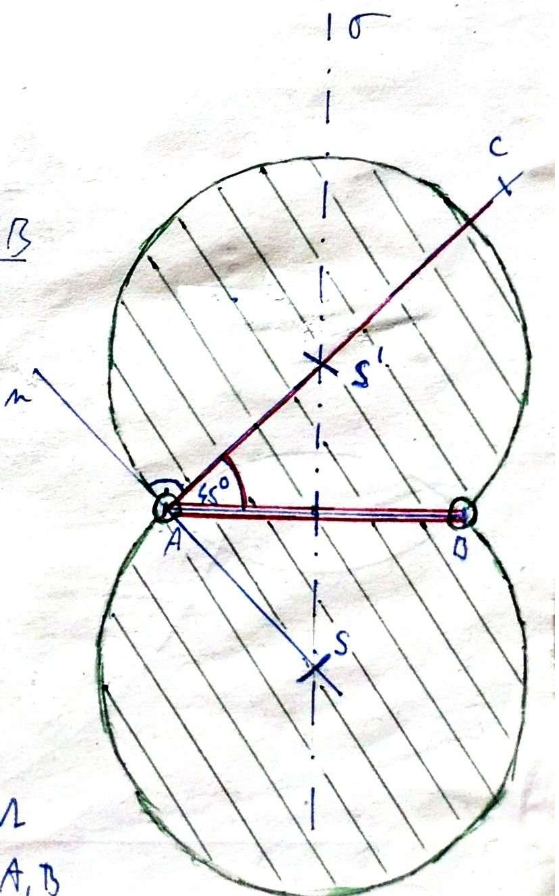
- **ω = středový úhel** - 1
  - ∢ASB → příslušný $\widehat{AB}$ → $\widehat{AB} \in \sphericalangle ASB$
- **α = obvodový úhel** - ∞
  - ∢AXB → příslušný $\widehat{AB}$ → $X \in k - \widehat{AB}$
- **α = úsekový úhel** - 2
  - $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ → $\widehat{AB} \subset \sphericalangle BAC$ ← PODMNOŽINA

$$\boxed{2\alpha = \omega}$$

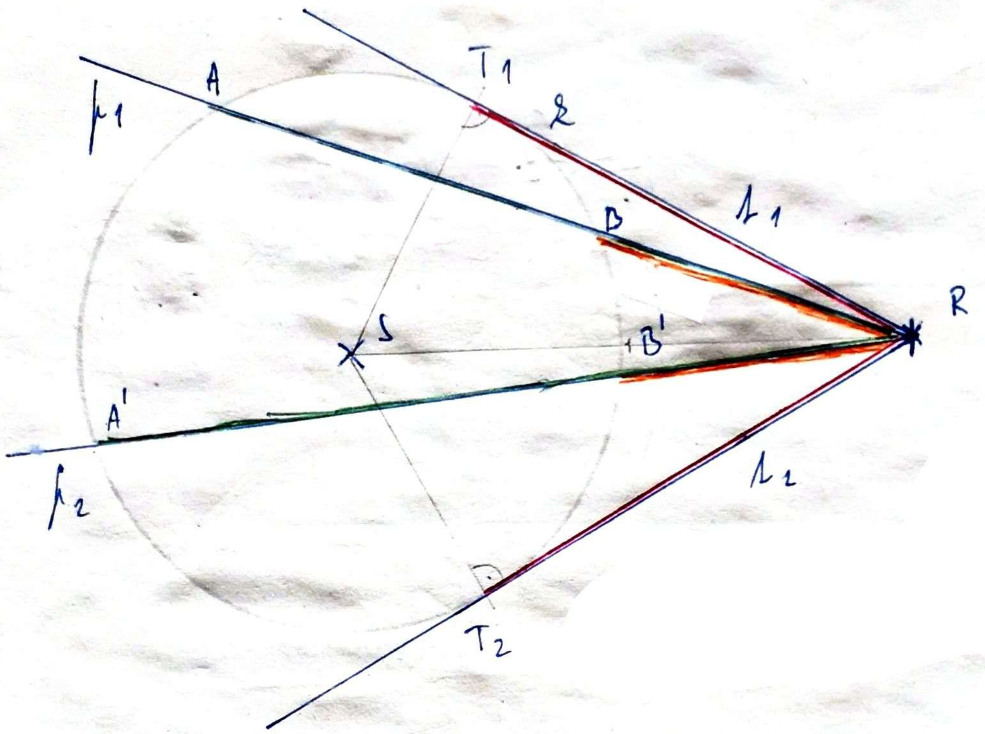
• Konstrukce úhlu ze kterého je vidět AB

→ $M = \{X \in \Pi_2 ; |\sphericalangle AXB| = 45°\}$; $|AB| = 4$ cm

→ Postup:
1, AB; $|AB| = 4$ cm
2, σ; σ – osa AB
3, $\sphericalangle BAC$; $|\sphericalangle BAC| = 45°$
4, n; $n \perp AC \wedge A \in n$
5, S; $S \in n \cap \sigma$
6, k; $k(S; r = |SA|)$
7, $\widehat{AB}$; $\widehat{AB} \subset k \wedge \widehat{AB} \not\subset \sphericalangle BAC$
8, $\widehat{AB}'$; σ (↔ AB): $\widehat{AB} \to \widehat{AB}'$ ← osová souměrnost
9, $\underline{M = \widehat{AB} \cup \widehat{AB}'} - \{A, B\}$ ← M bez bodů A, B



• Mocnost bodu ke kružnici



→ mocnost bodu R ke kružnici k

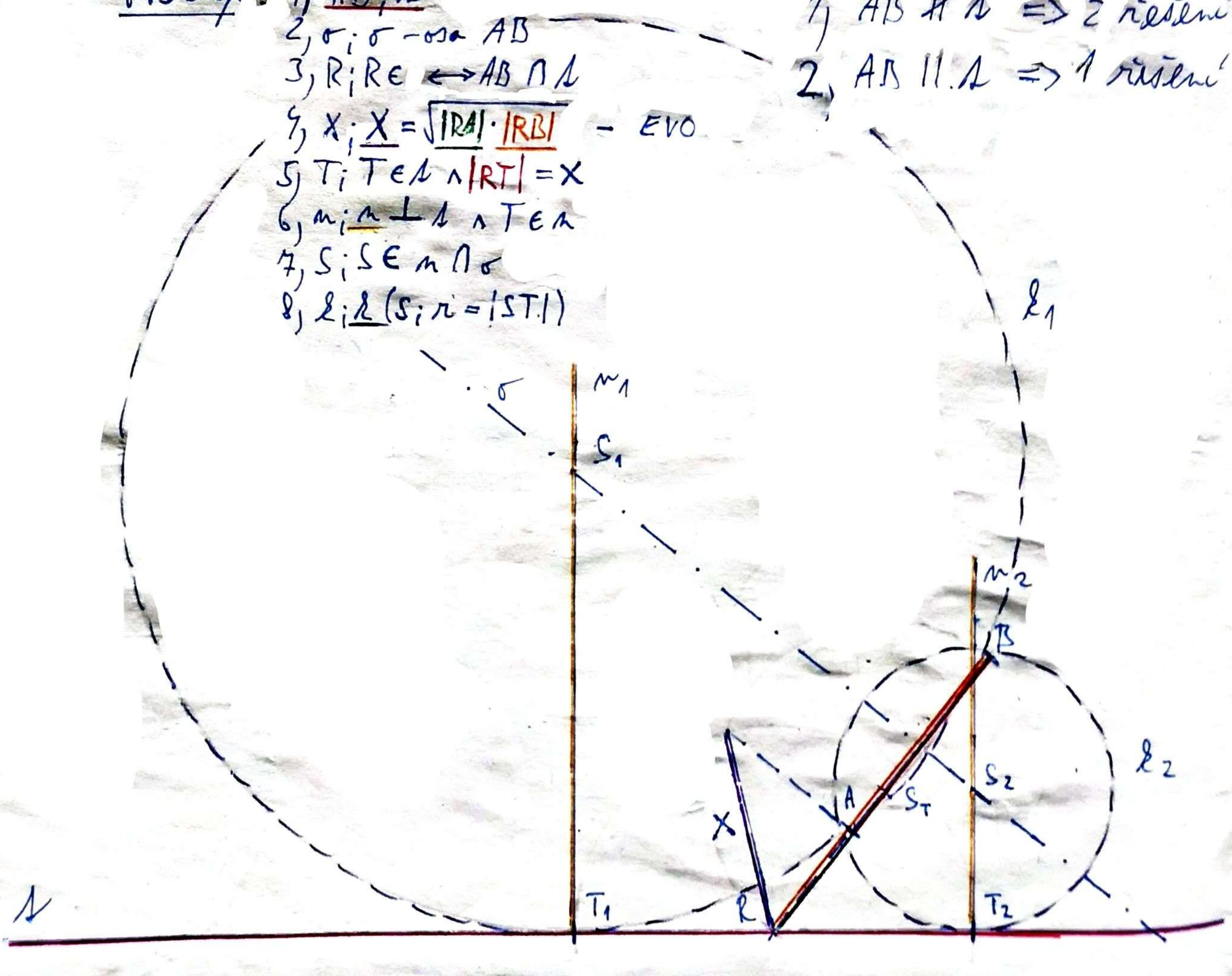
→ $|RA| \cdot |RB| = |RT|^2$ → konstantní

• **Užití**

→ k : s, A, B ($AB \cap s = \emptyset$)

→ **Postup**:
1, $\underline{AB}$; s
2, o; o – osa AB
3, R; R ∈ ↔AB ∩ s
4, X; $\underline{X} = \sqrt{|RA| \cdot |RB|}$ – EVO
5, T; T ∈ s ∧ $|RT| = X$
6, n; $\underline{n} \perp s$ ∧ T ∈ n
7, S; S ∈ n ∩ o
8, k; $\underline{k}$(S; r = |ST|)

1, AB ∦ s ⇒ 2 řešení
2, AB ∥ s ⇒ 1 řešení



• geometrický průměr

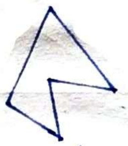
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n}$$

• aritmetický průměr

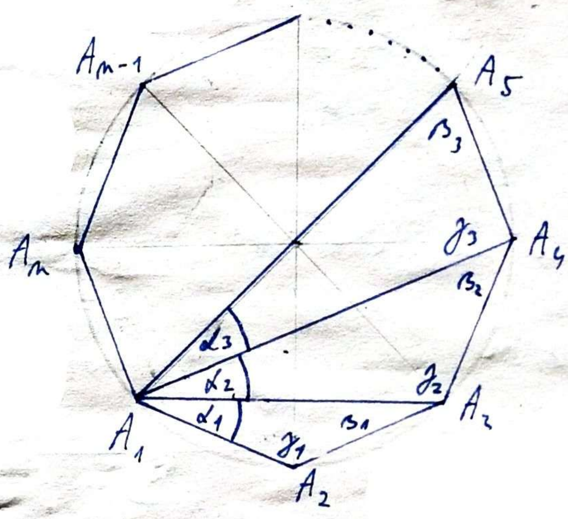
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

• N - úhelníky

• nekonvexní



• konvexní



Součet velikostí vnitřních úhlů

→ $S_\alpha = (n-2) \cdot 180°$

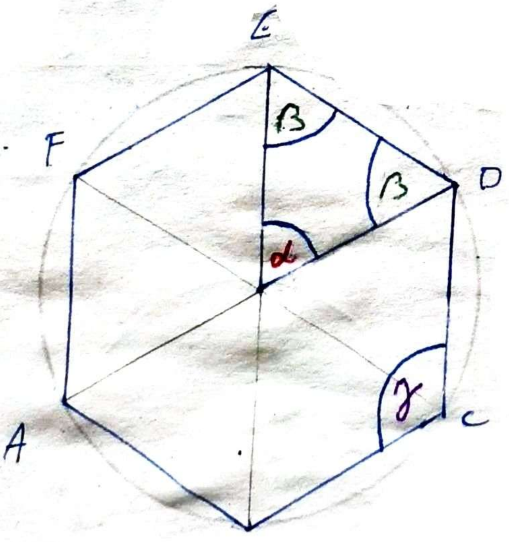
Počet úhlopříček

→ $P_ú = \frac{n(n-3)}{2}$

• Pravidelné N - úhelníky

→ každý pravidelný n-úhelník je tvořen rovnostrannými trojúhelníky

→ 6 - úhelník - rovnostranné trojúhelníky



$\alpha = \frac{360°}{n}$

$\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$

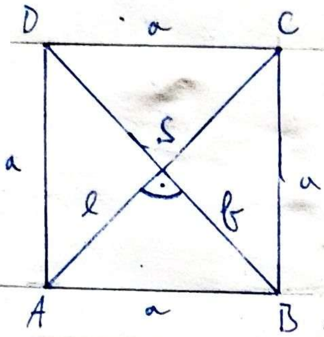
$\gamma = 180° - \alpha$

• 4-úhelníky

• rovnoběžníky

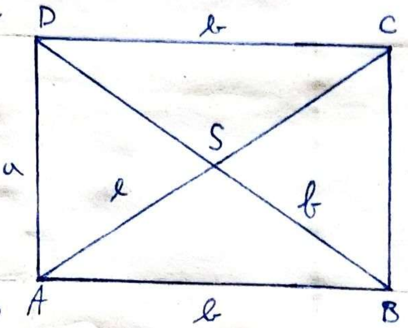
$e = AC$
$f = BD$

→ protilehlé strany jsou rovnoběžné
→ úhlopříčky se navzájem půlí



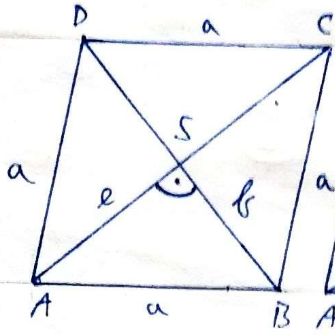
čtverec

e, f:
- stejně dlouhé
- navzájem kolmé
- půlí se



obdélník

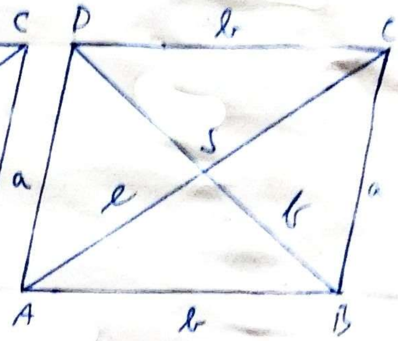
- stejně dlouhé
- půlí se



kosočtverec

- navzájem kolmé
- půlí se

$S = a \cdot v_a$



kosodélník

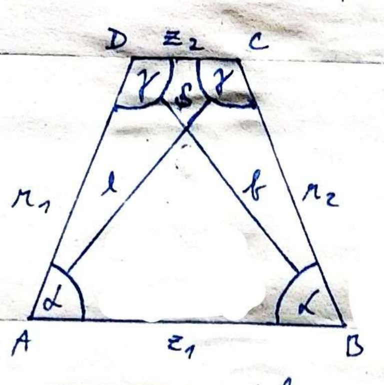
- půlí se

$S = b \cdot v_b$

• lichoběžníky

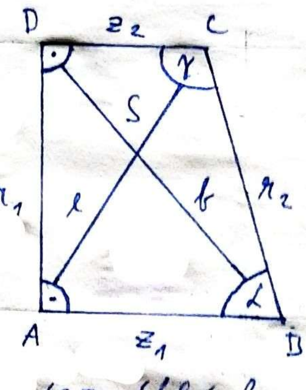
→ součet vnitřních úhlů při rameni = 180°
→ 2 základny − z_1, z_2 − AB, CD
→ 2 ramena − r_1, r_2 − AD, BC

$$S = \frac{(z_1 + z_2) \cdot v_z}{2}$$



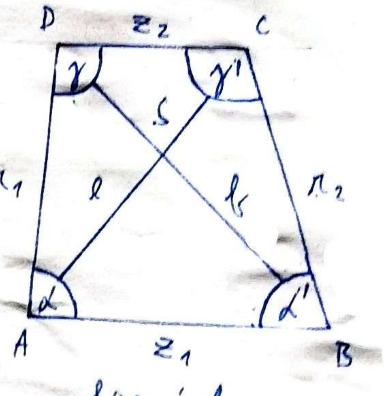
rovnoramenný l.

- ∢ při z_1, z_2 stejné
- ramena stejně dlouhá
- $e = f$
- $\alpha + \gamma = 180°$



pravoúhlý l.

- 1 pravý ∢ při z_1, z_2
- $\alpha + \gamma = 180°$

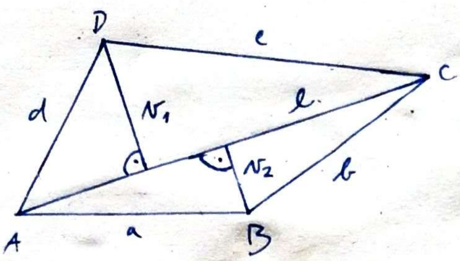


obecný l.

- $\alpha + \gamma = 180°$
- $\alpha' + \gamma' = 180°$

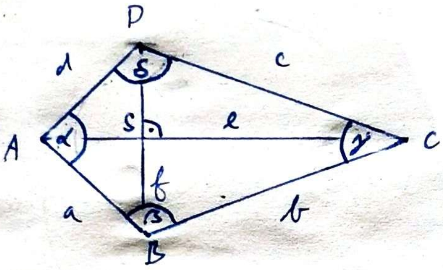
• **různoběžníky**

→ nemají žádnou dvojici rovnoběžných stran



$$S = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot e$$

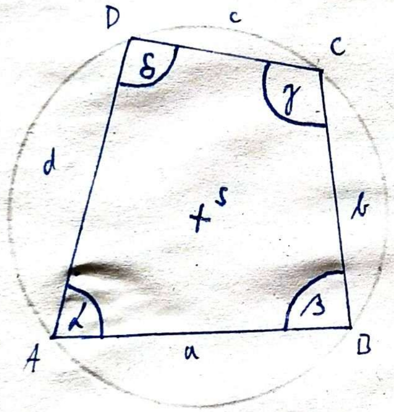
→ **deltoid** – tečnový

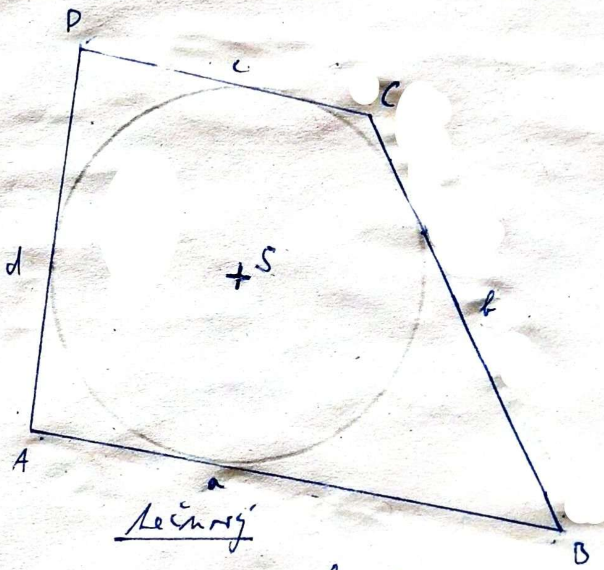


a = d
c = b
β = δ

→ hlavní úhlopříčka (e) půlí tu vedlejší (f)

$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$





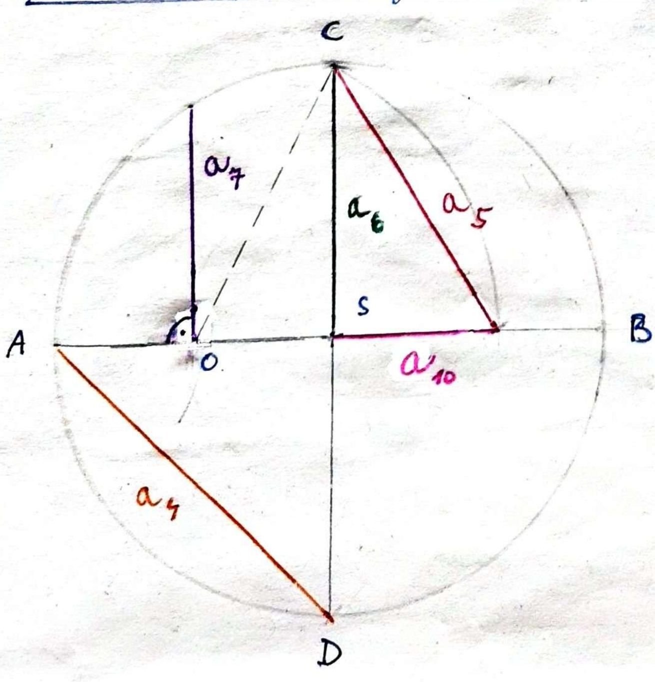
tětivový č.

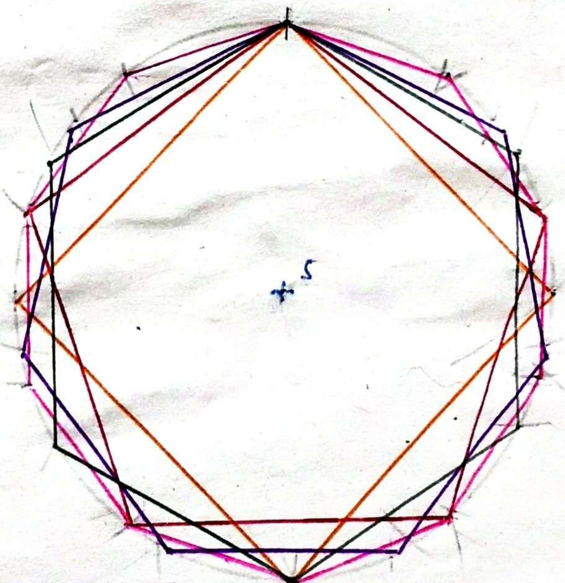
β + δ = 180°
α + γ = 180°

tečnový

a + c = b + d

• **Konstrukce pravidelných n-úhelníků**





- **Konstrukce lichoběžníka**
  - lichoběžník ABCD

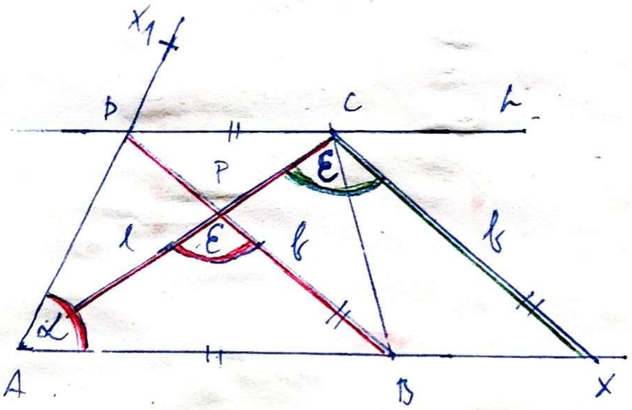
$|BD| = 6\,cm = f$

$|AC| = 8\,cm = e$

$\alpha = 45°$

$\varepsilon = 120°$ – $\sphericalangle APB$ – průsečík úhlopříček

- Rozbor



→ bodem C se udělá rovnoběžka s úhlopříčkou f

→ bod X

→ △ ACX – (SUS)

→ využiju ε a f → CX = f

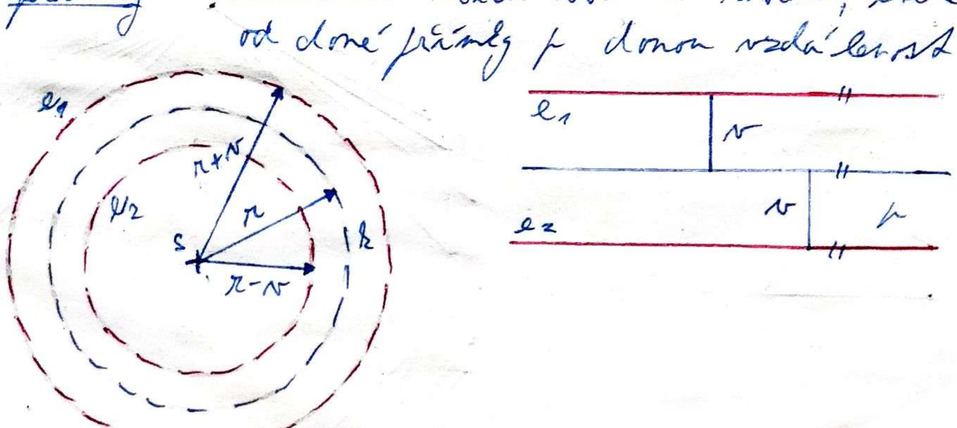
→ D: rovnoběžka s AX bodem C → DC – přímka p

rameno úhlu α – AX_1

úhlopříčka f

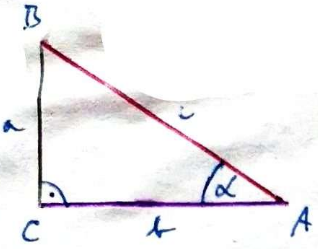
→ průsečík

- **Ekvidistanta**
  - přímky → množina všech bodů v rovině, které mají od dané přímky p danou vzdálenost v



- kružnice → množina všech bodů v rovině, které mají od dané kružnice k danou vzdálenost v

- <u>Goniometrické funkce</u> – ostrého úhlu



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

→ platí v pravoúhlém △

→ poměr velikosti stran

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(90-\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90-\alpha) &= \sin\alpha \\ \operatorname{tg}(90-\alpha) &= \operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(90-\alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \operatorname{cotg}\alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

→ <u>arc</u> ....

→ např. $\arccos = \cos^{-1}\alpha$

→ obrácená funkce $\qquad$ arcus = úhel

$\cos\alpha = 1 \rightarrow \arccos 1 = \alpha$

• Shodná zobrazení

- Z – shodné zobrazení $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in \Pi_2$; $Z: X \to X' \Rightarrow |XY| = |X'Y'|$
  $Z: Y \to Y'$
  → <u>důsledek</u>: shodné zobrazení zachová velikosti úseček a úhlů

• <u>Základní shodná zobrazení</u>

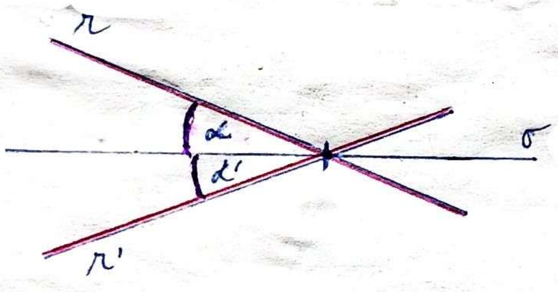
- O → osová souměrnost
- S → středová souměrnost
- R → otáčení (rotace)
- T → posunutí (translace)
- I → identita

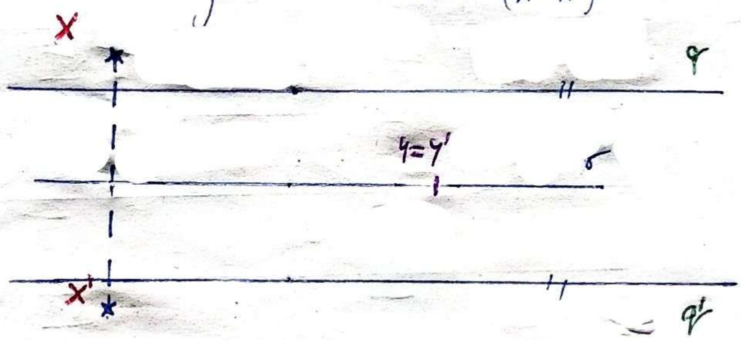
• <u>Osová souměrnost</u>

- je dána pevnou přímkou zvanou osa souměrnosti

$$O_{(o)} : X \to X'$$

- <u>bod X neleží na ose o</u>
  → jeho spojnice s obrazem je na osu kolmá a je osou půlená
- <u>bod X leží na ose o</u>
  → zobrazuje se sám na sebe → je SAMODRUŽNÝ ($X = X'$)





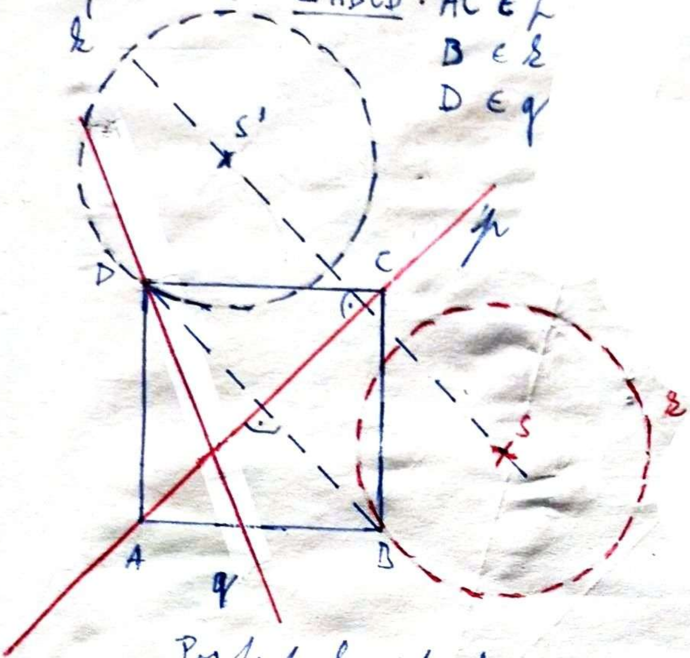
- osový útvar je takový, pro který existuje osová souměrnost ve, které je samodružný
  ↳ osa této osové souměrnosti se nazývá osa souměrnosti útvaru

• Příklad

→ dáno: p, q ($p \not\parallel q$)

$k(S; r)$

□ABCD: $AC \in p$
$B \in k$
$D \in q$



Rozbor

$AC \subset p \Rightarrow O(p)$

$O(p): B \Rightarrow D$
$k \to k'$

$B \in k \to D \in k'$

$D \in k \cap q$

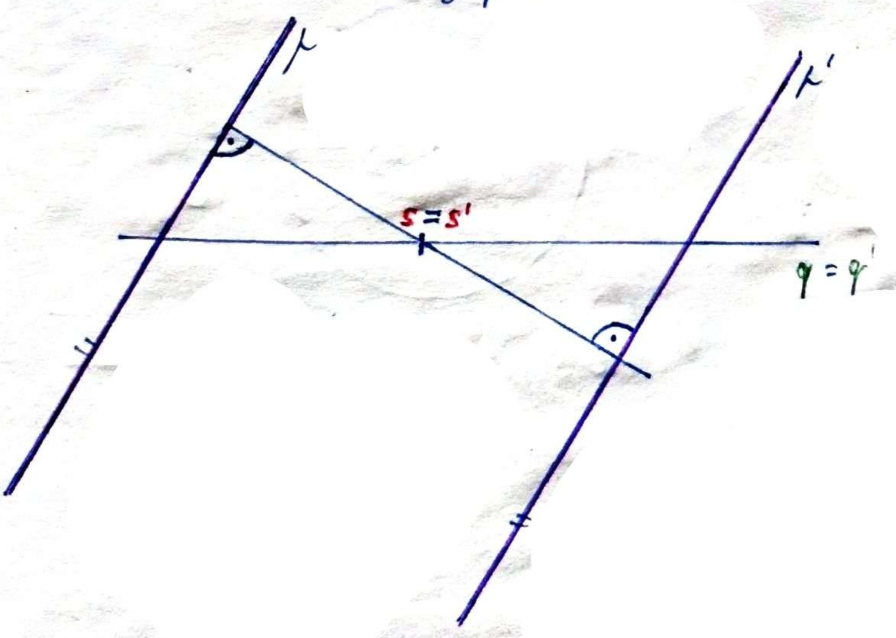
Postup konstrukce

1, k'; $O(p): k \to k'$
2, D; $D \in k' \cap q$
3, B; $O(p): D \to B$
4, S; $S \in DB \cap p$
5, A, C; $A, C \in p \wedge |AS| = |CS| = |BS|$
6, □ABCD

• Středová souměrnost

$S(S): X \to X'$

→ spojnice 2 bodů prochází středem a je středem půlená
→ samodružný je pouze střed S



• příklad

→ dáno: S, p, q ($p \nparallel q \wedge S \notin p \wedge S \notin q$)

$\square ABCD$: S – střed

$A \in p \wedge C \in q$

→ rozbor

S – střed

$\Rightarrow S_{(S)}: A \to C;$

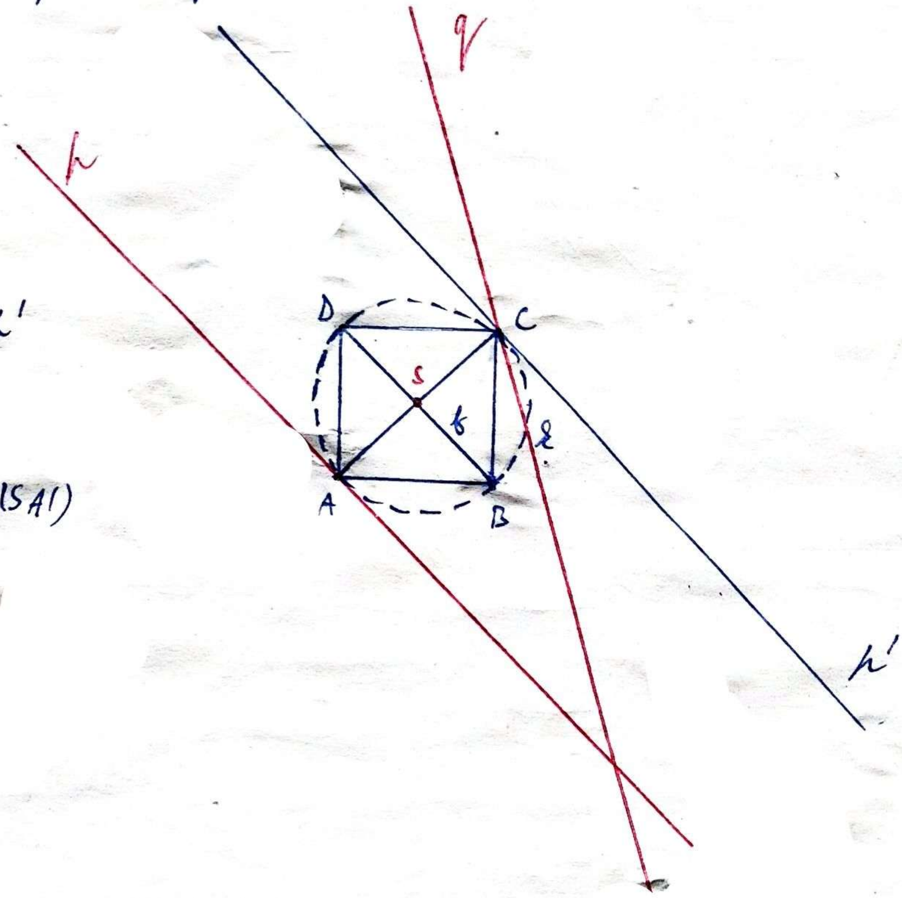
$p \to p'$

$A \in p \Rightarrow C \in p'$

$C \in p' \cap q$

D, B:

- kružnice $k(S; |SA|)$
- úhlopříčka f
- $D, B \in k \cap f$

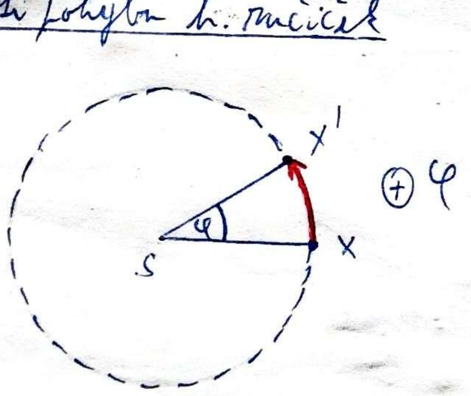


• Otáčení = Rotace

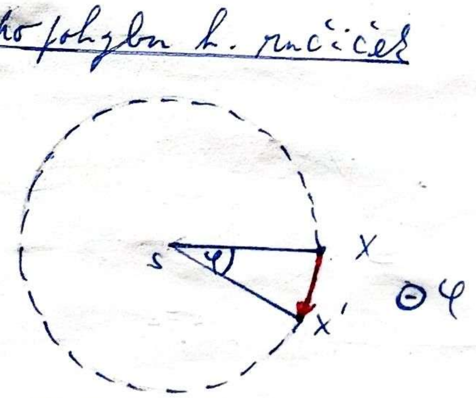
$R(S; \pm\varphi): X \to X'$

orientovaný úhel otáčení
pevný bod S = střed otáčení } rotace je tím určená

proti pohybu h. ručiček



po pohybu h. ručiček



→ vzdálenost vzoru a obrazu od S je stejná

→ úhel mezi vzorem, středem a obrazem je φ

→ orientace podle směru

$\varphi = \pm 180° \Rightarrow$ stredová súmernosť

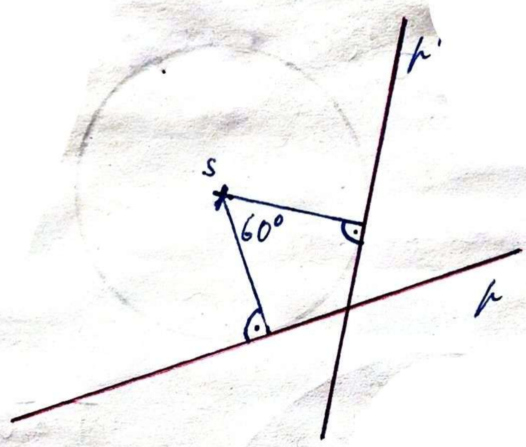
$R(S; \pm 180°) = S(s)$

$\varphi = \pm 360° \Rightarrow$ identita

$R(S; \pm 360°) = I \rightarrow X \equiv X' \rightarrow$ všetky body sú samodružné

→ otočenie priamky

$R(S; \pm 60°): p \rightarrow p'$



→ nájdem si pätu kolmice

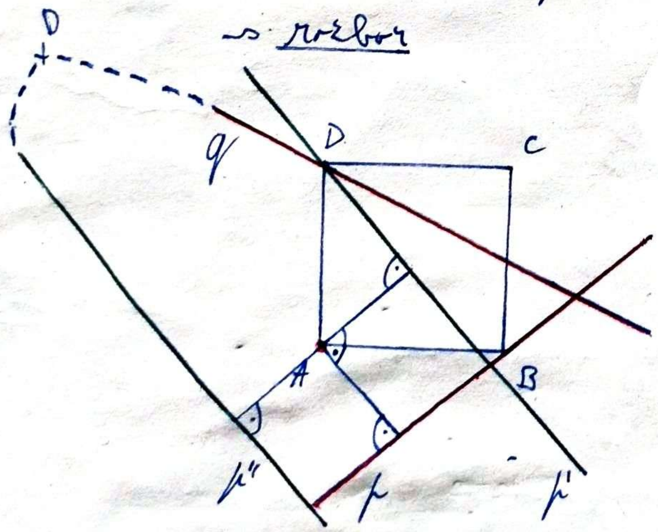
→ otočím ju aj s priamkou

→ príklad

→ dané: $A, p, q \ (p \nparallel q)$

$\square ABCD: B \in p; D \in q$

→ rozbor



$|AB| = |AD| \wedge |\sphericalangle BAD| = 90°$

$\Rightarrow R(A; \pm 90°); B \rightarrow D; p \rightarrow p'$

$B \in p \Rightarrow D \in p'$

$D \in p' \cap q$

→ postup

1, A, p, q

2, $p', p''; R(A; +90°): p \rightarrow p' \wedge R(A; -90°): p \rightarrow p''$

3, $D; D \in q \cap (p' \cup p'')$

4, $B; R(A; -90°): D \rightarrow B \Leftrightarrow D \in p' \wedge R(A; +90°): D \rightarrow B \Leftrightarrow D \in p''$

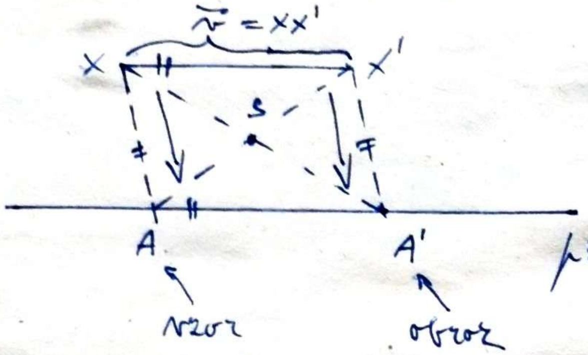
5, $C; O(BD): A \rightarrow C$

6, $\square ABCD$

- **Posunutí = Translace**

  → vektor posunu – $\vec{v}$ → orientovaná úsečka

$T(\vec{v} = XX'): A \to A'$



$|XX'| = |AA'|$

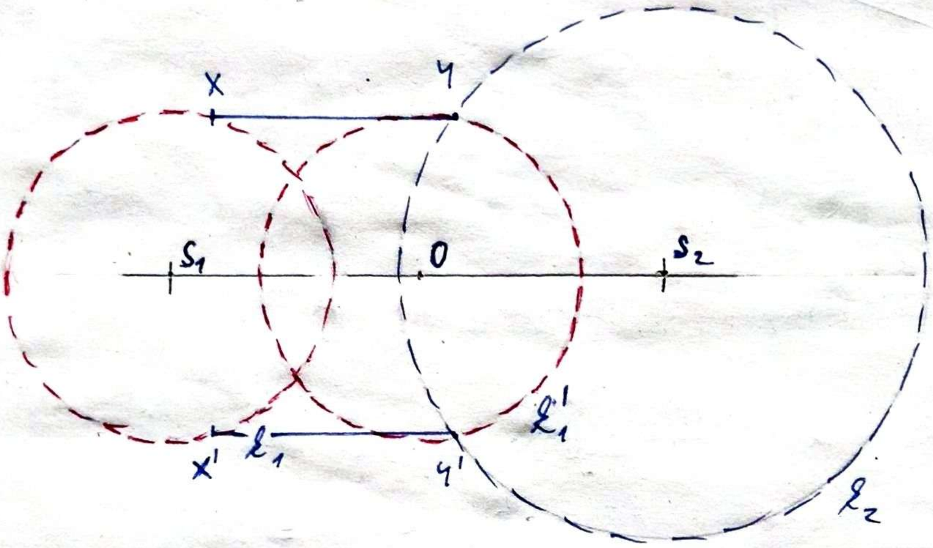
$p \equiv p'$

→ příklad

→ dáno: $XY \parallel S_1S_2 \wedge |XY| = \frac{1}{2}|S_1S_2| = |S_1O|$
$X \in k_1$
$Y \in k_2$

→ $\overrightarrow{S_1O}$ = vektor posunutí $\vec{v}$

→ rozbor



$T(\overrightarrow{S_1O}): X \to Y$
→ $X \in k_1 \Rightarrow Y \in k_1'$
$Y \in k_2 \cap k_1'$

- **Identita**

  → shodné zobrazení, kde všechny body jsou samodružné

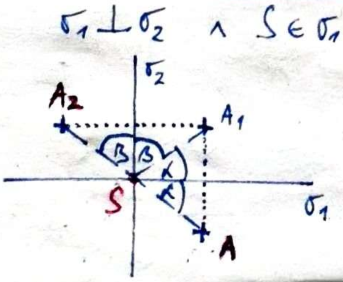
- **Základní shodné zobrazení**

  → skládáním osových souměrností můžeme dostat všechny ostatní shodná zobrazení

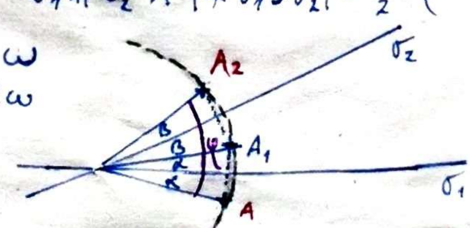
$S(s) = \sigma_1(o_1) \circ \sigma_2(o_2)$ skládám $R(S, \varphi) = \sigma_1(o_1) \circ \sigma_2(o_2)$

$o_1 \perp o_2 \wedge S \in o_1 \cap o_2$

$o_1 \nparallel o_2 \wedge |\sphericalangle o_1 S o_2| = \frac{1}{2} \cdot \varphi$

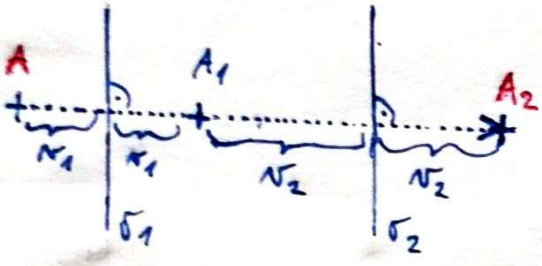


$\alpha + \beta = \omega$
$|\varphi| = 2\omega$



$\underline{T(\vec{v}) = \sigma_1(\sigma_1) \circ \sigma_2(\sigma_2)}$

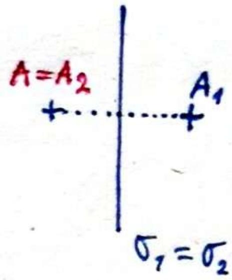
$\sigma_1 \parallel \sigma_2$



$|\vec{v}| = 2 \cdot (v_1 + v_2)$

$\underline{I = \sigma_1(\sigma_1) \circ \sigma_2(\sigma_2)}$

$\sigma_1 \equiv \sigma_2$



Dáno: $CS \wedge |CS| = 3\,cm$

$\triangle ABC$: $a + b + c = 12\,cm$

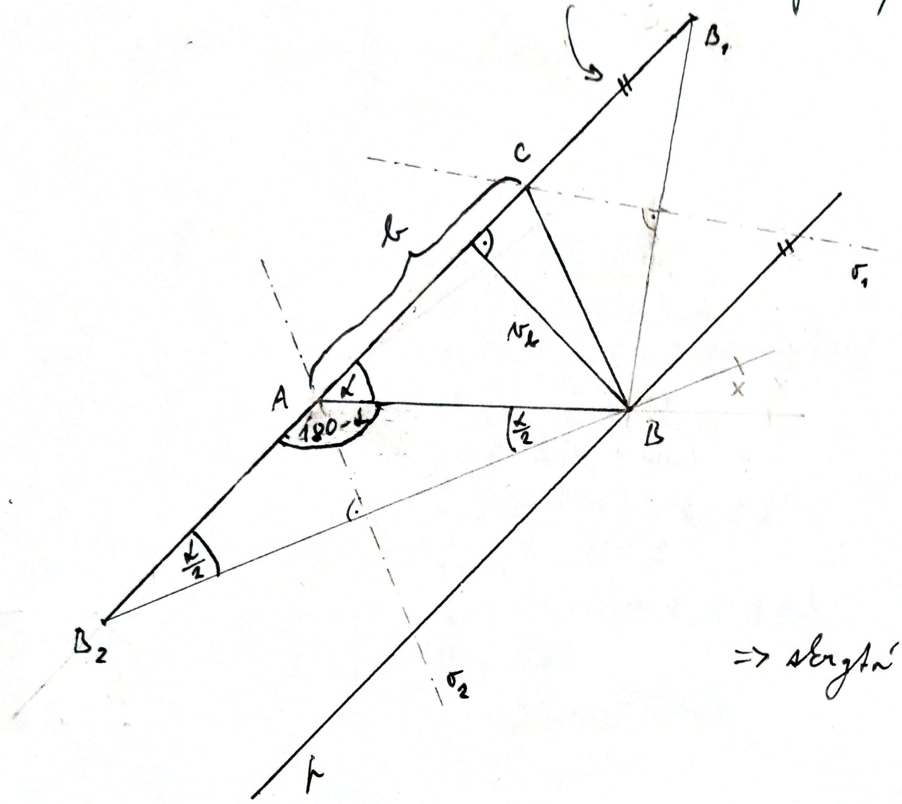
$v_b = 3\,cm$

$\alpha = 60°$

k b se mi vztahují údaje

⇒ udělám $a+b+c$ jako prodloužení strany b

Rozbor



B: rovnoběžka s AC → díky v_b

$\triangle B_2BA$ → rovnoramenný

⇒ můžu odvodit všechny úhly

⇒ prodloužím úhel B_1B_2X

⇒ $B \in p \cap \mapsto B_2X$

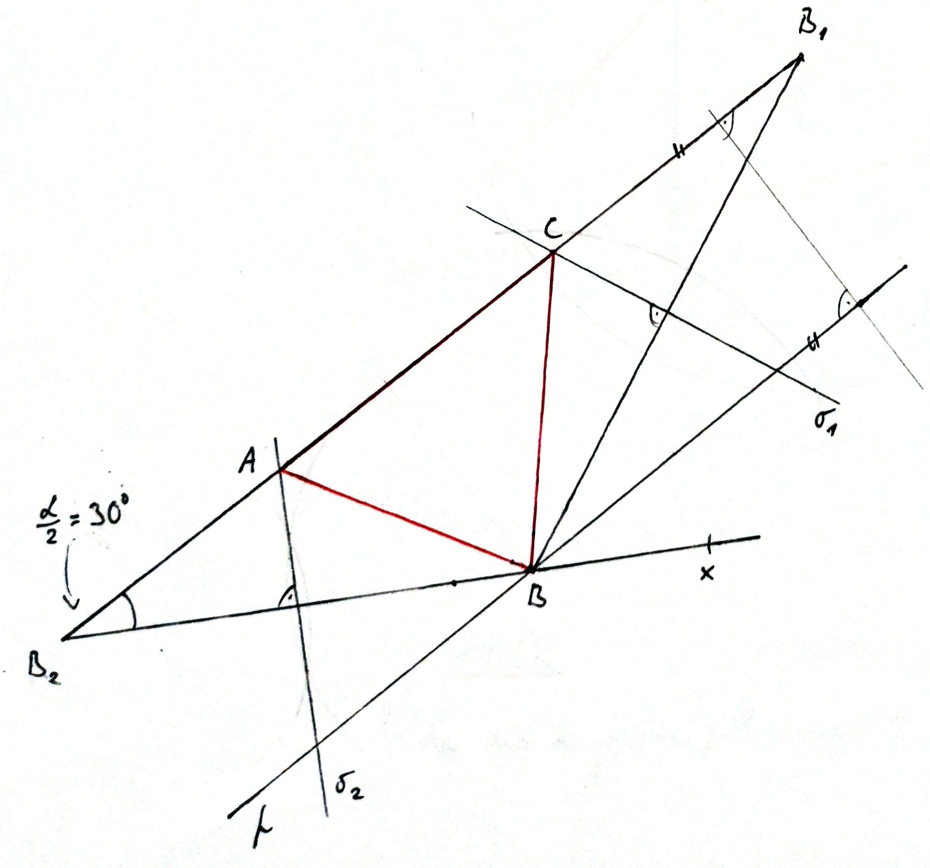
⇒ můžu sestrojit BB_1 a BB_2

→ přes osy přepon rovnoramenných △

⇒ A a C

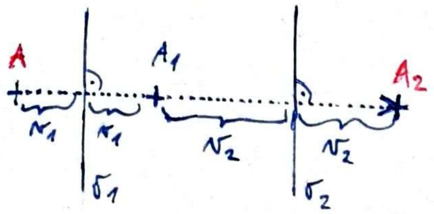
⇒ skrytá osová souměrnost

Konstrukce



$T(\vec{v}) = \sigma_1(\sigma_1) \circ \sigma_2(\sigma_2)$

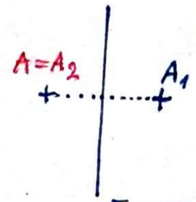
$\sigma_1 \parallel \sigma_2$



$|\vec{v}| = 2 \cdot (v_1 + v_2)$

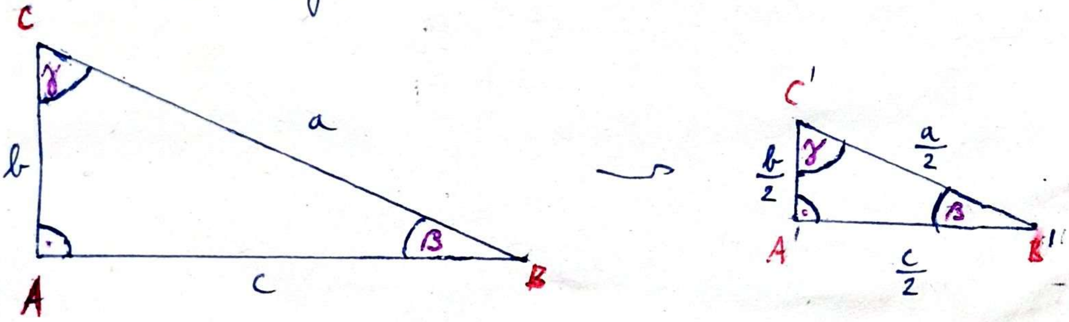
$I = \sigma_1(\sigma_1) \circ \sigma_2(\sigma_2)$

$\sigma_1 \equiv \sigma_2$



$\sigma_1 = \sigma_2$

• Podobnost + Stejnolehlost



$Z(k = \frac{1}{2})$: $A \to A'$
$B \to B'$
$C \to C'$

$|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$
$|B'C'| = \frac{1}{2}|BC|$
$|A'C'| = \frac{1}{2}|AC|$

• Podobnost s koeficientem podobnosti

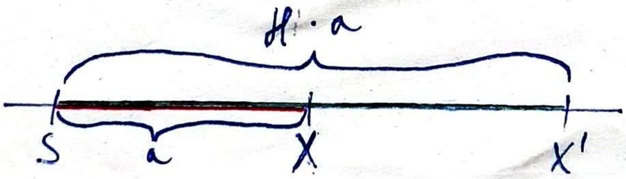
$k = \frac{1}{2}$ $\qquad k \in R^+$

→ podobné zobrazení zachovává velikosti úhlů a poměry úseček

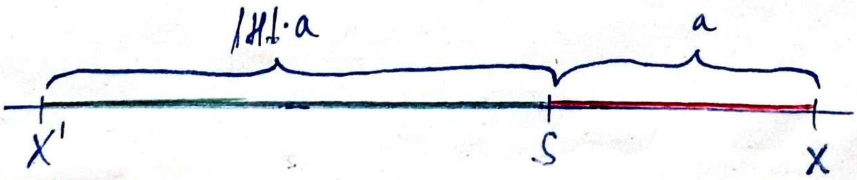
• Stejnolehlost = homothetie – H

→ podobné zobrazení, které je určeno pevným bodem S – středem stejnolehlosti a reálným nenulovým číslem $H \in R \setminus \{0\}$ – koeficientem stejnolehlosti

→ $H > 0 \Rightarrow |SX'| = H \cdot |SX| \wedge X' \in \mapsto SX$



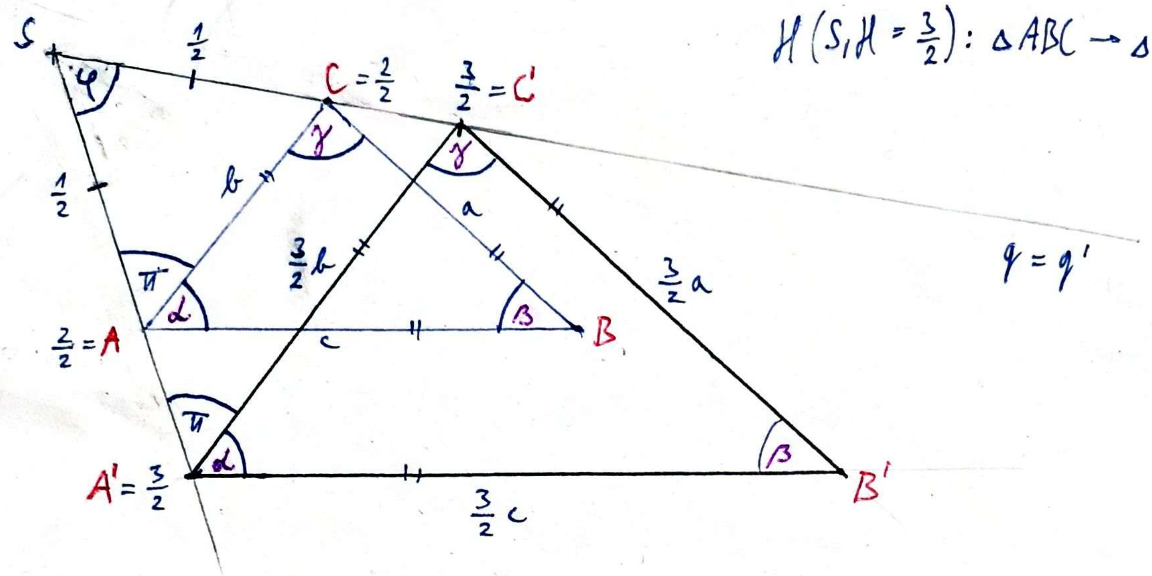
→ $H < 0 \Rightarrow |SX'| = |H| \cdot |SX| \wedge X' \in \leftarrow\!\!| SX$



→ poznámka

$H = 1 \to H(S; H = 1) = $ Identita
$H = -1 \to H(S; H = -1) = $ Středová s.

$H(S, H = \frac{3}{2}): \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$



→ vlastnosti H

1) H = podobnost s koeficientem $k = |H|$

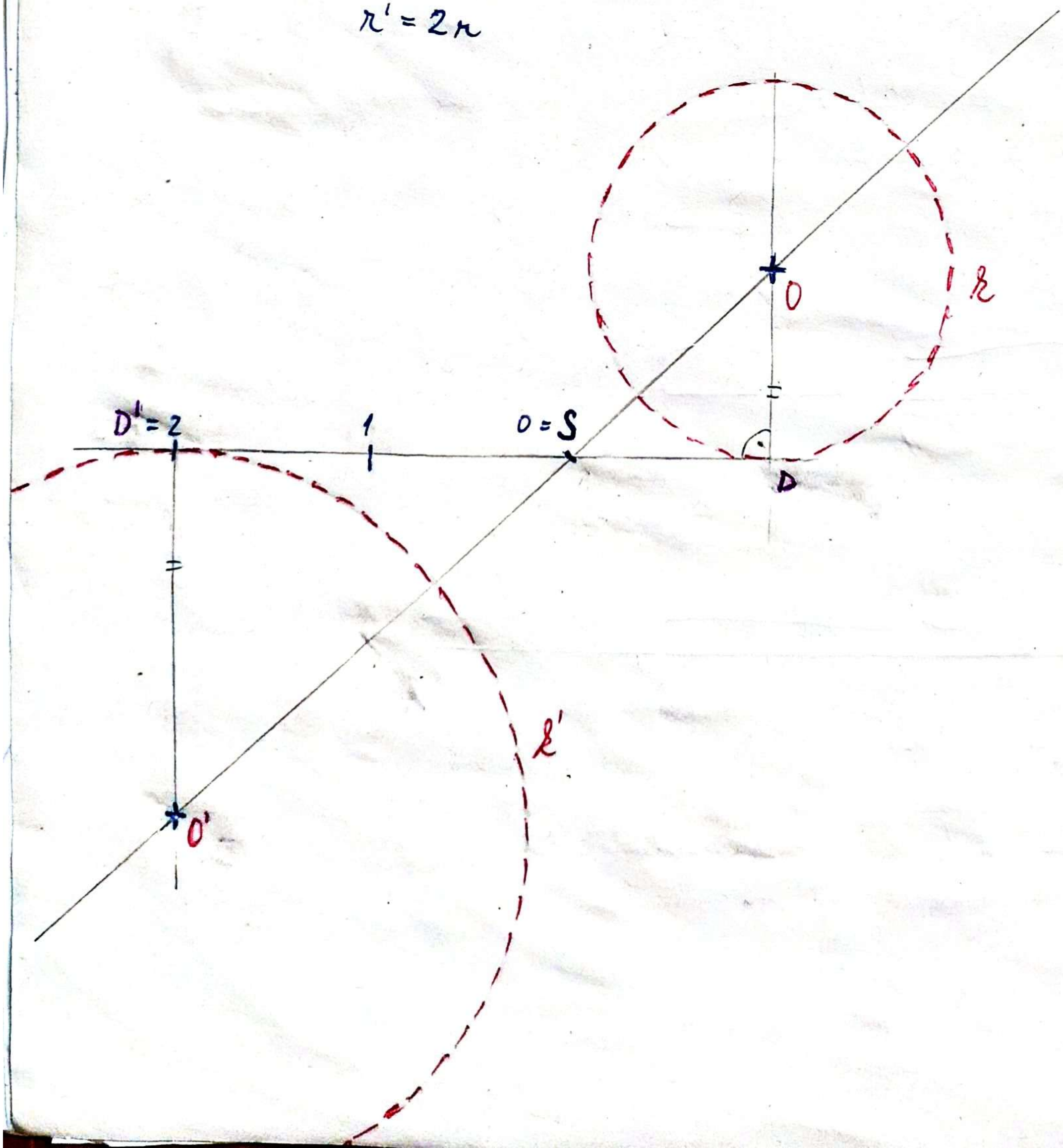
2) samodružné prvky – body: S $(H \neq 1)$

– přímky procházející středem

3) obrazem každé přímky co neprochází středem je přímka rovnoběžná

$H(S; H = -2): k(O, r) \to k'(O'; r')$

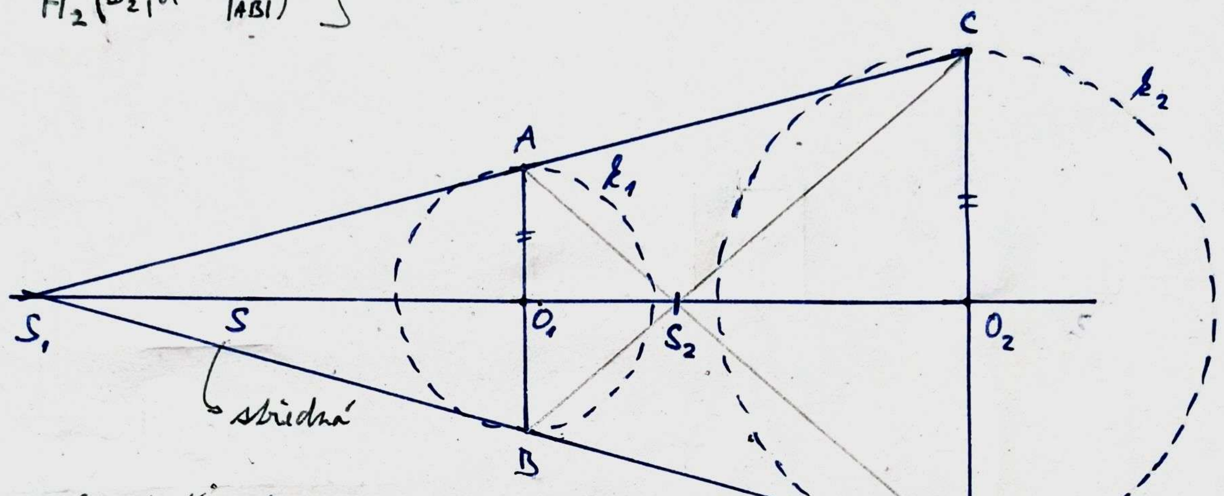
$r' = 2r$



• <u>Stejnolehlost kružnic</u>

→ každé 2 rovnoběžné úsečky různých velikostí jsou stejnolehlé 2 způsoby → <u>vnitřní</u> a <u>vnější</u> střed stejnolehlosti

$$\left.\begin{aligned} &H_1\left(S_1, \varkappa = \frac{|CD|}{|AB|}\right) \\ &H_2\left(S_2, \varkappa = -\frac{|CD|}{|AB|}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{stejnolehlost kružnic}$$

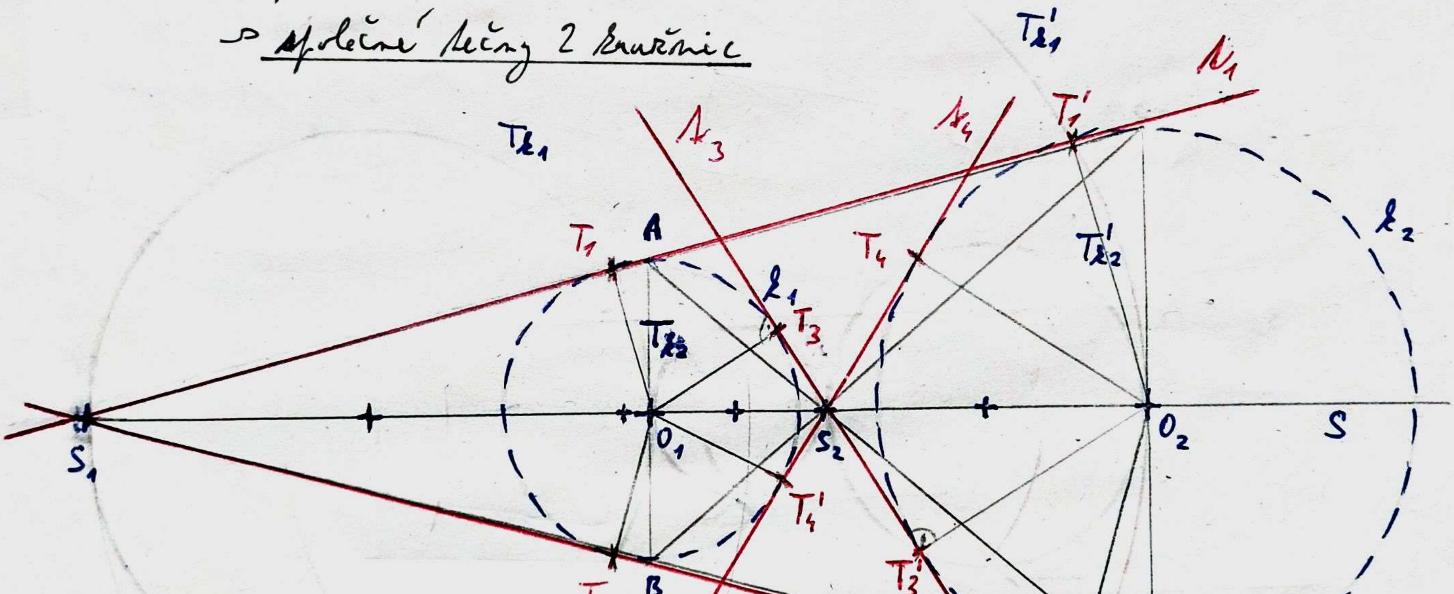


→ je nekonečně mnoho dvojic rovnoběžek

→ středy S_1 a S_2 jsou pro všechny dvojice stejné

→ pokud $O_1 = O_2$, pak $O_1 = O_2 = S_1 = S_2$

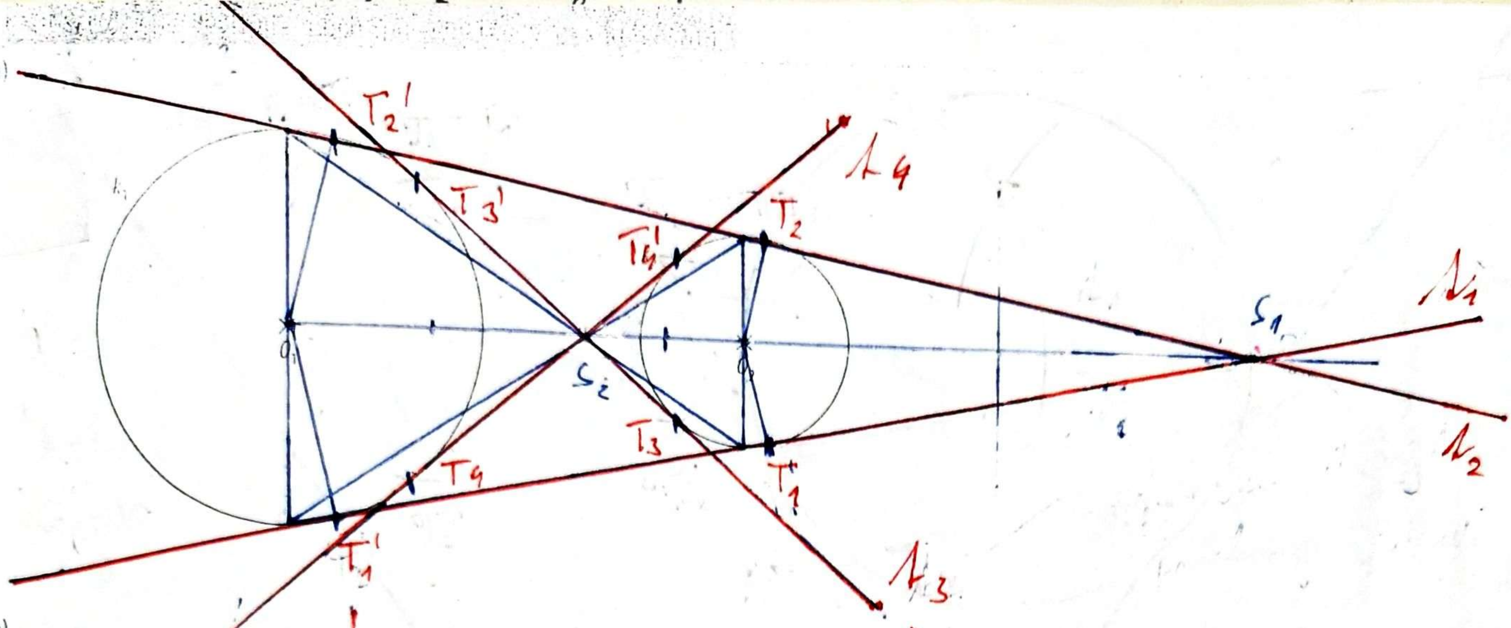
→ <u>společné tečny 2 kružnic</u>



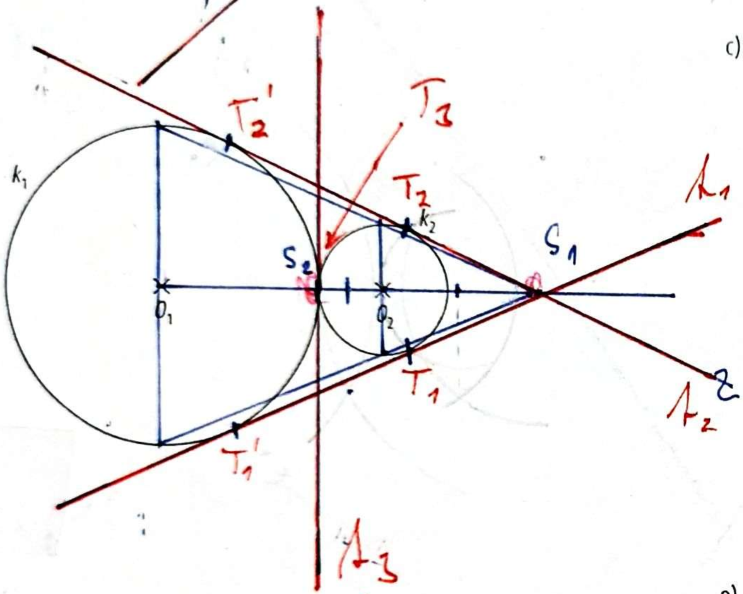
→ protínají se ve středech souměrnosti

→ najdeme je přes Thaletovy kružnice nad průměry: $S_1O_1, S_1O_2, S_2O_1, S_2O_2$

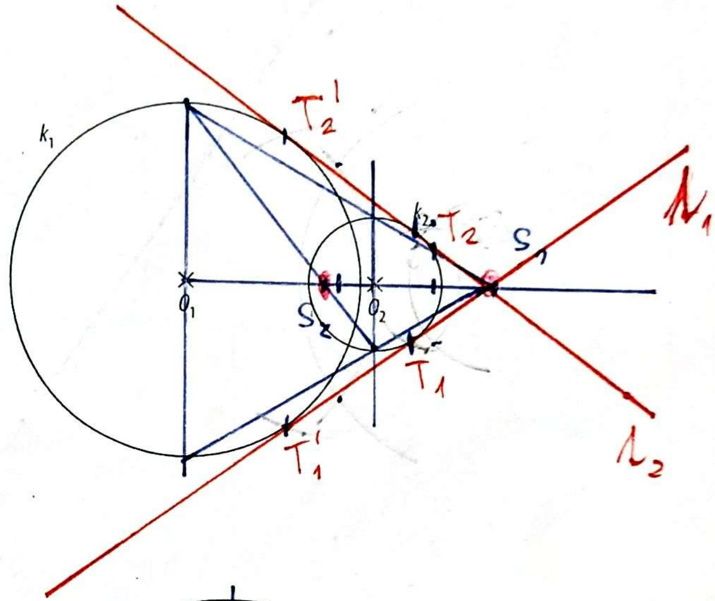
a)


T2'
T3'
T4'
T2
S1
O1
O2
S2
T3
T1'
T4
T1'

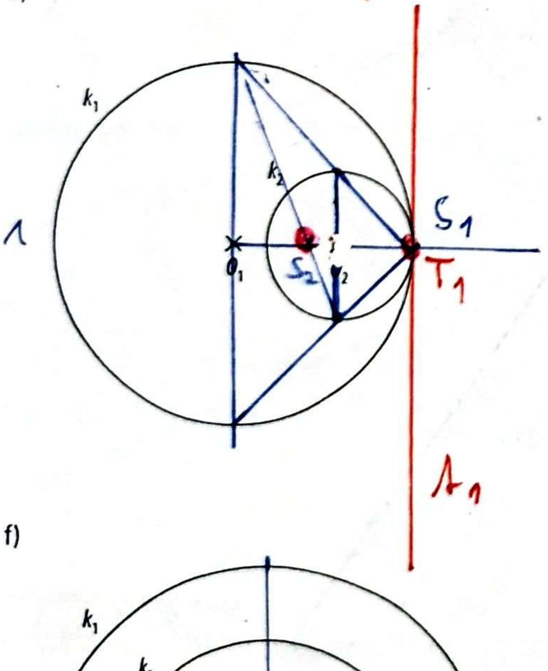
b)


T2'
T3
T2
k1
k2
S2
S1
O1
O2
T1
T1'

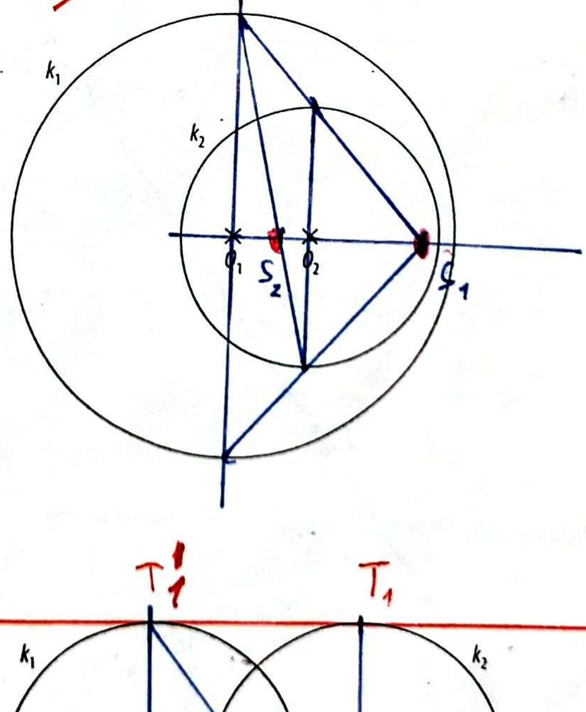
c)


T2'
k1
k2
T2
S1
O1
S2
O2
T1
T1'

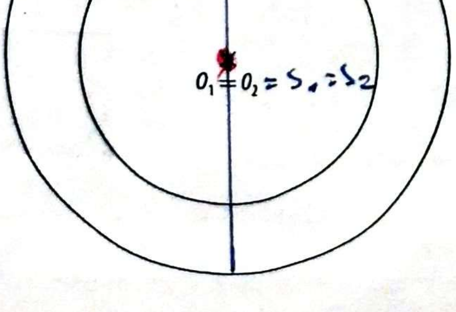
d)


k1
k2
S1
O1
S2
T1

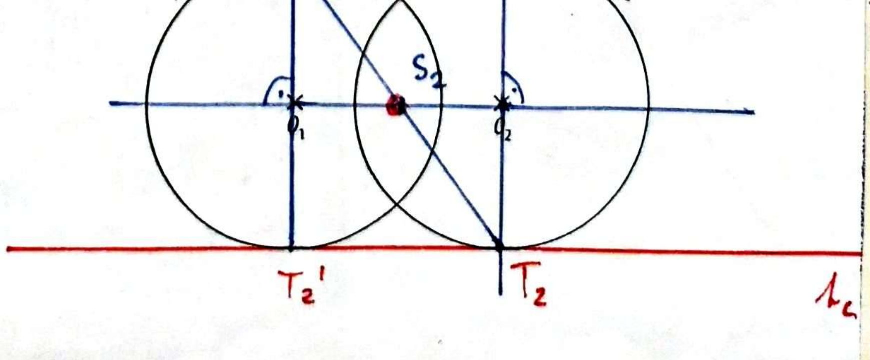
e)


k1
k2
O1
S2
O2
S1

f)

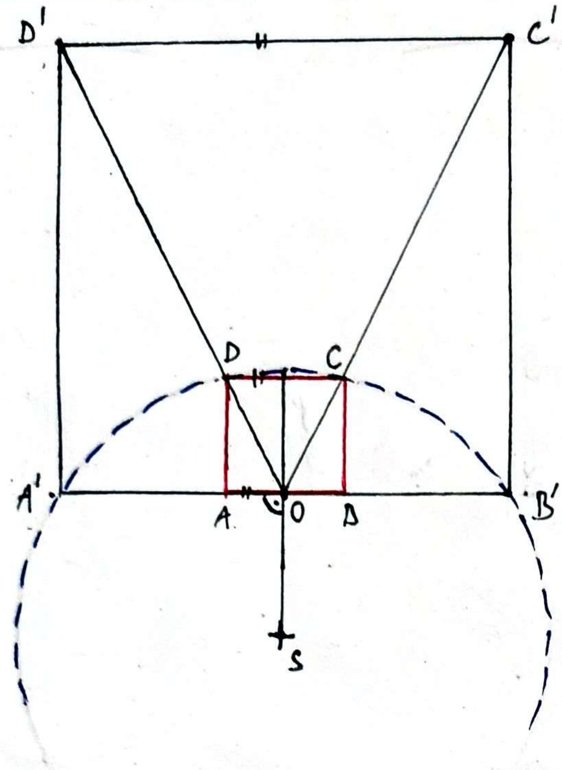

k1
k2
O1 = O2 = S1 = S2

g)


T1'
T1
k1
k2
S2
O1
O2
T2'
T2

- Vpisování útvarů do útvarů

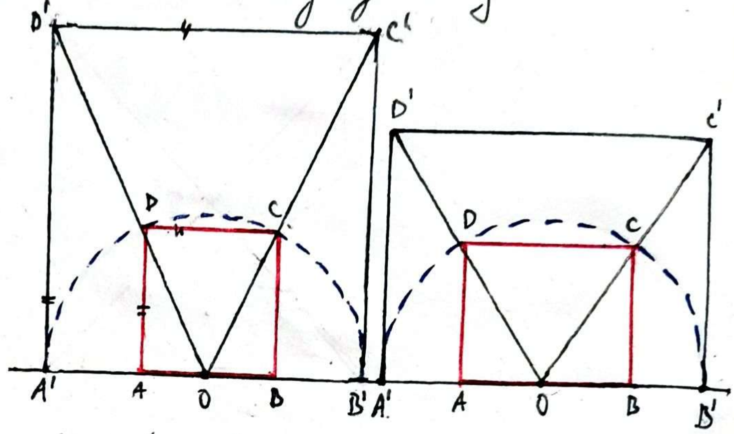
→ čtverec do kruhové úseče



→ střed AB = střed tětivy = střed A'B'

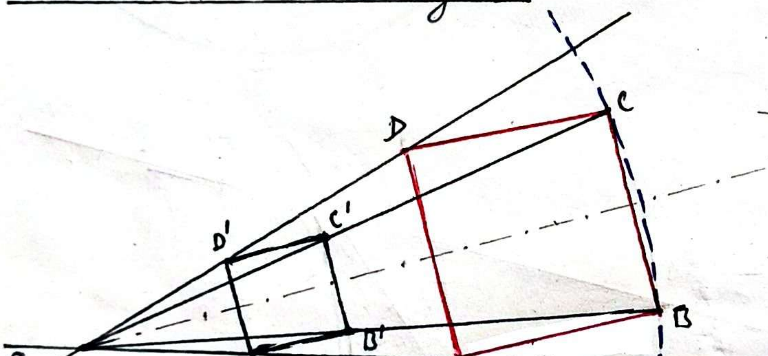
⇒ $\mathcal{H}(O, H)$: □ABCD → □A'B'C'D'

→ obdélník by byl stejně



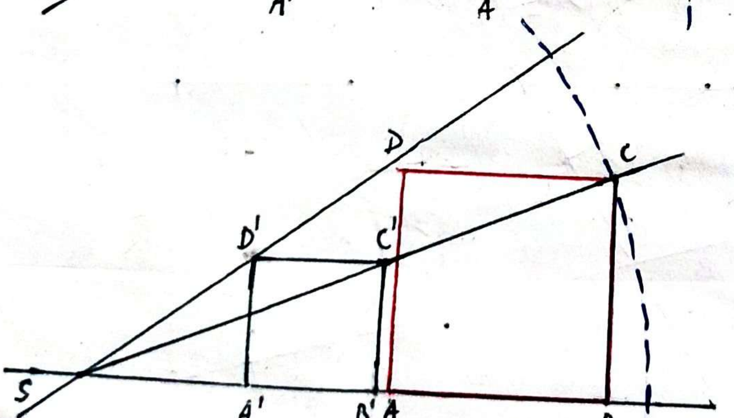
→ 1 poměr stran = 2 řešení

→ čtverec do kruhové výseče



→ obdélník by byl stejně

– společný bod – střed DA



→ obdélník by byl stejně

– společný bod – C

- Skládání schodných zobrazení a stejnolehlosti
  - Dáno: $k(O, r), p, C$ → $C \notin k \wedge C \notin p$
    - → $A \in k \wedge B \in p$
  - → pravoúhlý △ABC: $|\sphericalangle ACB| = 90° \wedge b = 2a$
  - Rozbor

$|\sphericalangle BCA| = 90° \Rightarrow R(C, \pm 90°): B \to B'$

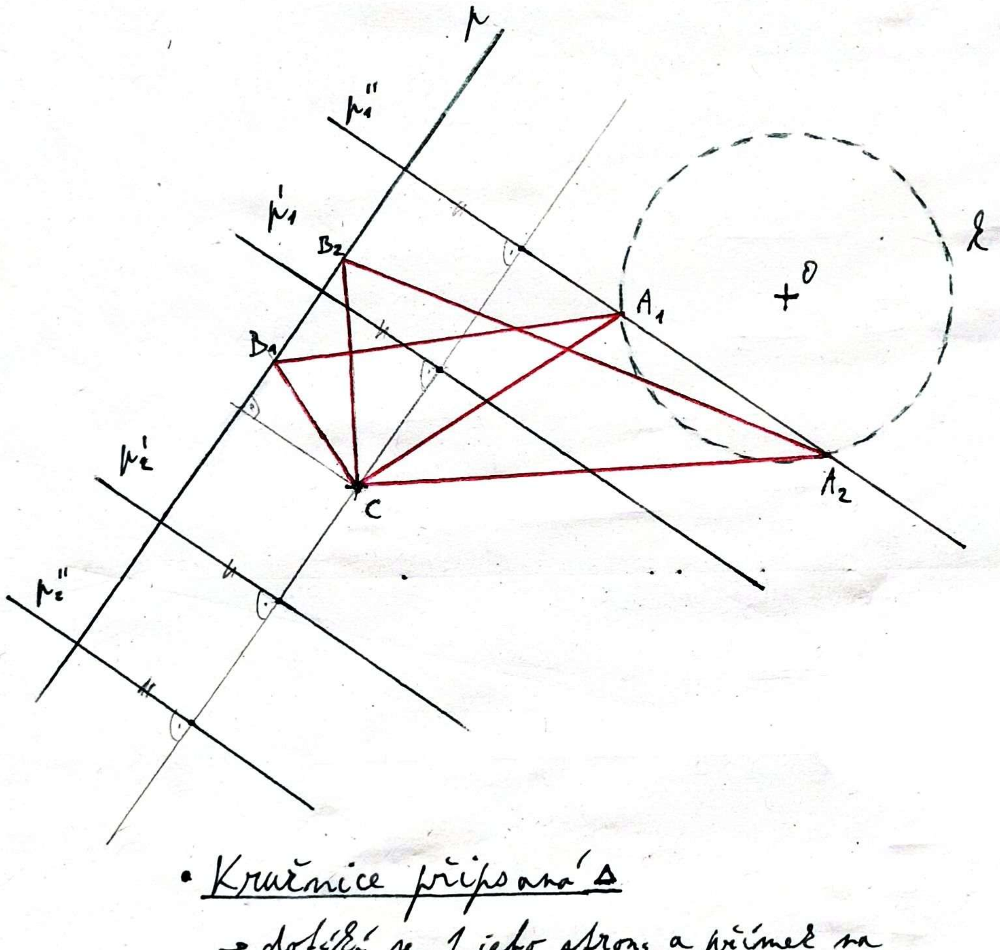
$|CA| : |CB| = 2 : 1 \Rightarrow |CA| : |CB'| = 2 : 1$

$\Rightarrow \mathcal{H}(C, \varkappa = 2): B' \to A$

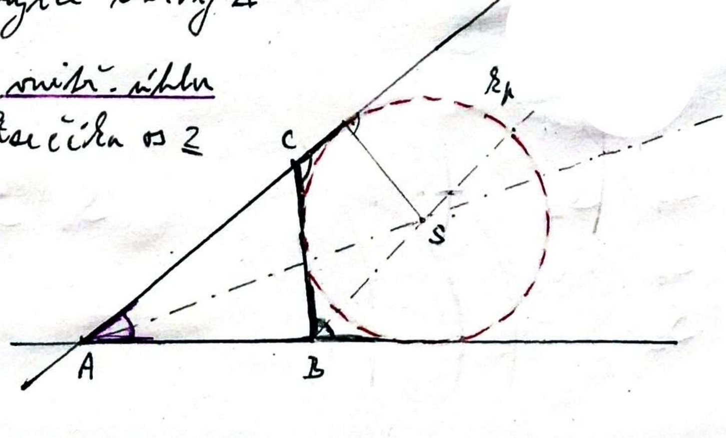
$Z = R \circ \mathcal{H}$ → skládání rotace a stejnolehlosti (Z – zobrazení)

$Z: p \to p''$

$\left.\begin{array}{l} R(C, \pm 90°): p \to p' \\ \mathcal{H}(C, 2): p' \to p'' \end{array}\right\} A \in p'' \cap k \qquad \left\{\begin{array}{l} A \in k \\ B \in p \Rightarrow A \in p'' \end{array}\right.$



- Kružnice připsaná △
  - dotýká se 1 jeho strany a přímek na nichž leží 2 zbývající strany △
  - každý △ má 3
  - střed leží na ose vnitř. úhlu
  - střed leží na průsečíku os 2 vedlejších úhlů

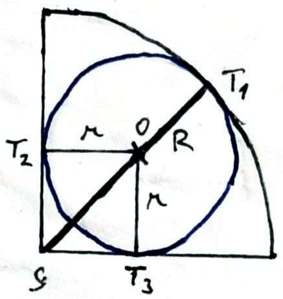


• Početní úlohy v planimetrii

→ Do čtvrtkruhu je vepsaná kružnice → určete poměr obsahu Δ a ○

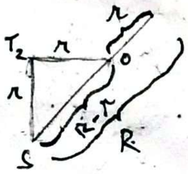
$\Delta - R \qquad S_\Delta = \frac{\pi R^2}{4}$

$\bigcirc - r \qquad S_0 = \pi r^2$



↳ $S_\Delta : S_0$

$\Delta SOT_2 : |SO| = R - r$



→ PYTHAGOROVA VĚTA

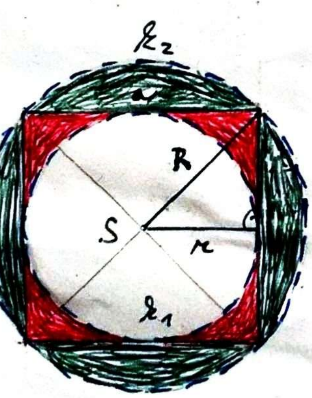
$$(R-r)^2 = r^2 + r^2$$
$$(R-r)^2 = 2r^2$$
$$R - r = r\sqrt{2}$$
$$R = r + r\sqrt{2}$$
$$R = r(1+\sqrt{2})$$
$$r = \frac{R}{1+\sqrt{2}}$$

$$S_0 = \pi r^2$$
$$S_0 = \pi \cdot \left(\frac{R}{1+\sqrt{2}}\right)^2$$
$$S_0 = \frac{\pi R^2}{(1+\sqrt{2})^2} \qquad S_\Delta = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\Rightarrow S_\Delta : S_0 = \frac{\pi R^2}{4} : \frac{\pi R^2}{(1+\sqrt{2})^2}$$
$$= \frac{1}{4} : \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4} : \frac{1}{(1+2\sqrt{2}+2)}$$
$$= \frac{1}{4} : \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \underline{\underline{3+2\sqrt{2} : 4}}$$

$$S_\Delta : S_0$$
$$\underline{\underline{3+2\sqrt{2} : 4}}$$

→ Urči poměr obsahů vyznačených ploch



$r = r$

$a = 2r$

$R = r\sqrt{2}$

↳ $R = \frac{1}{2}\underbrace{a\sqrt{2}}_{}$ úhlopříčka ve □

$R = \frac{1}{2} 2r\sqrt{2}$

$R = r\sqrt{2}$

$S_1 = \pi R^2 - a^2$

$S_1 = 2\pi r^2 - 4r^2$

$S_1 = 2r^2(\pi - 2)$

$S_2 = a^2 - \pi r^2$

$S_2 = 4r^2 - \pi r^2$

$S_2 = r^2(4 - \pi)$

$S_1 : S_2$

$S_1 = S_{k_2} - S_\square$

$S_2 = S_\square - S_{k_1}$

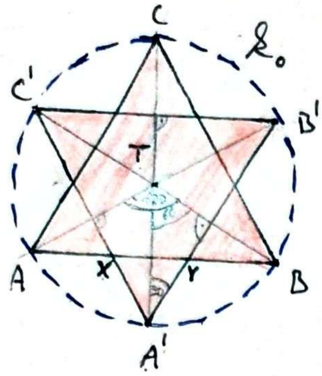
$S_1 : S_2$

$2r^2(\pi - 2) : r^2(4-\pi)$

$\underline{\underline{2(\pi - 2) : 4 - \pi}}$

→ 2 rovnostranné △ si odpovídají v otočení o středu v jejich těžišti o 60°

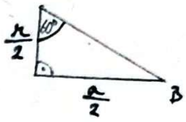
→ vyjádři obsah jejich sjednocení pomocí r kružnice opsané



$S = S_1 + 3S_2$

$S_1 = S_{\triangle ABC}$

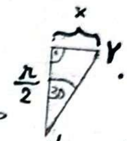
$S_2 = S_{\triangle A'XY}$



$tg\,60° = \frac{a}{2} : \frac{r}{2} = \frac{a}{r}$

$a = r \cdot tg\,60°$

$\underline{\underline{a = r\sqrt{3}}}$



$S_1 = \frac{3}{2}r \cdot \frac{1}{2}a$

$\underline{\underline{S_1 = \frac{3}{4}ra}}$

$S_2 = \frac{1}{2}r \cdot x$

$S_2 = \frac{1}{2}r \cdot \frac{1}{2}r \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\underline{\underline{S_2 = \frac{1}{12}r^2\sqrt{3}}}$

$tg\,30° = x : \frac{r}{2} = \frac{2x}{r}$

$2x = r \cdot tg\,30°$

$2x = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{1}{2}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$S = \frac{3}{4}ra + 3 \cdot \frac{1}{12}r^2\sqrt{3}$

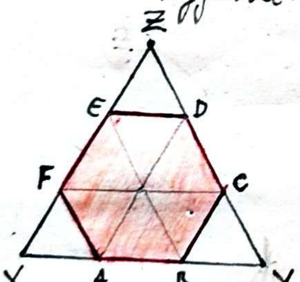
$S = \frac{3}{4}r \cdot r\sqrt{3} + \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$

$S = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3} + \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$

$\underline{\underline{S = r^2\sqrt{3}}}$

→ Body dělící strany rovnostranného △ na třetiny jsou vrcholy šestiúhelníku

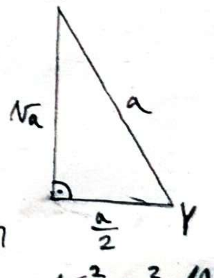
→ vyjádři obsah tohoto šestiúhelníku pomocí strany △ a



$S = S_1 - 3S_2$

$S_1 = S_{\triangle XYZ}$

$S_2 = S_{\triangle BCY}$



$S_2 = \frac{1}{9}S_1 \rightarrow S = S_1 - \frac{1}{3}S_1$

$S = \frac{2}{3}S_1$

$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$

$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

$\underline{\underline{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}}}$

$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

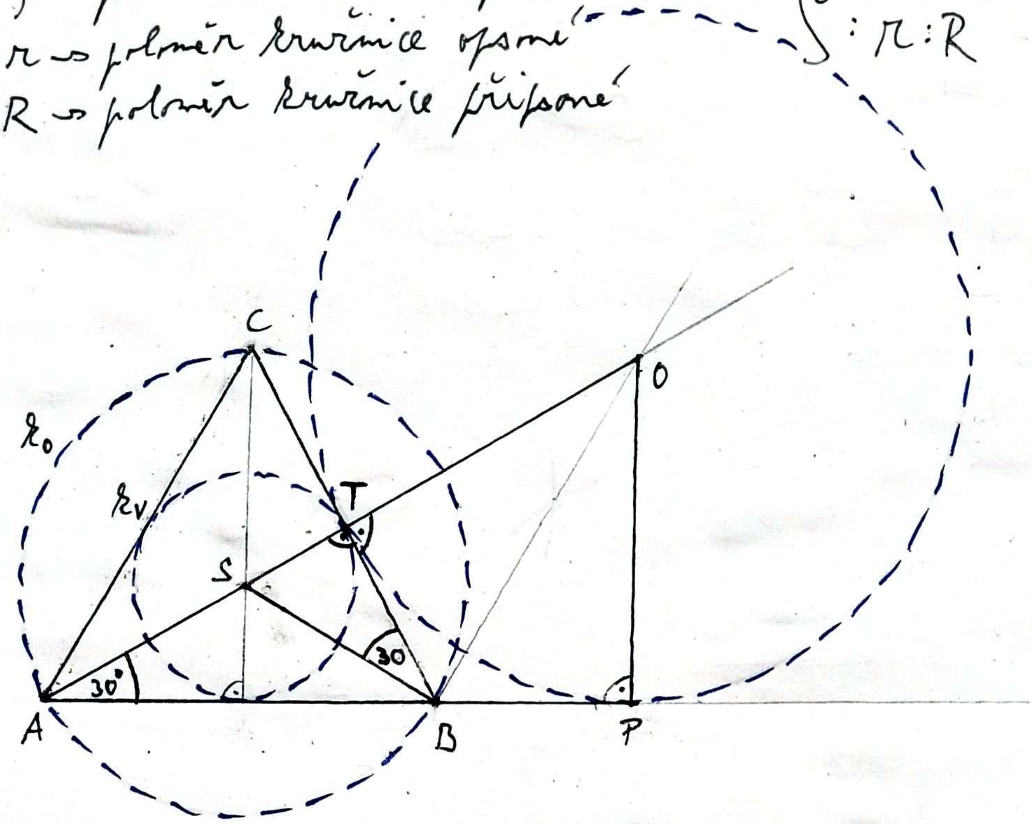
$v_a = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}$

$v_a = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

$\underline{\underline{v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a}}$

→ Urči pomer medzi polomermi kružnice vpísanej, opísanej a pripísanej rovnostranného Δ

ϱ → polomer kružnice vpísanej
r → polomer kružnice opísanej
R → polomer kružnice pripísanej



$\varrho = \varrho$

$r \rightarrow \triangle STB: \sin 30° = \frac{\varrho}{r}$

$$r = \frac{\varrho}{\sin 30°}$$

$$r = 2\varrho$$

$R \rightarrow \triangle AOP: \sin 30° = \frac{R}{r + \varrho + R}$

$$\frac{1}{2} = \frac{R}{3\varrho + R}$$

$$R = \frac{3}{2}\varrho + \frac{1}{2}R$$

$$\frac{1}{2}R = \frac{3}{2}\varrho$$

$$R = 3\varrho$$

$\varrho : r : R$

$1 : 2 : 3$