- vlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to a} = A$

- vlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} = A$

- nevlastní limita ve vlastním bodě $\lim_{x \to a} = \pm\infty$

- nevlastní limita v nevlastním bodě $\lim_{x \to \pm\infty} = \pm\infty$

- vzorce pro limity

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{4^x + x^{159}}{5^x}\right) = 0$$

1) $x \to \infty$

$\log < \text{pol} < \exp$ – co se týče rychlosti růstu v nekonečnu

2) $x = 0$

$$0 \leq \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(6x)}{6x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \rightarrow \cos(0) = 1 \wedge 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$$

$$1 - \cos(2x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0}\left(\frac{1 - \cos(2x) + \mathrm{tg}^2(x)}{x \cdot \sin(x)}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{2\sin^2(x) + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{x \cdot \cancel{\sin(x)}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x} \cdot \left(2 + \cos^2(x)\right)\right) = 1 \cdot (2+1) = \underline{\underline{3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0}\left(\frac{\mathrm{tg}(x)}{x}\right) = 1 \quad \nearrow \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \cos(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Zobecnění: $\lim_{x \to a}\left(\frac{\sin(f(x))}{f(x)}\right) = 1 \iff \lim_{x \to a} f(x) = 0$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to \infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right) = 1 \iff \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

→ jednostranné limity

• $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{5}{x-3}\right)$ → nevím co s lim

$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{5}{x-3}\right) = \frac{5}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{5}{x-3}\right) = \frac{5}{0^+} = +\infty$

původní limita neexistuje

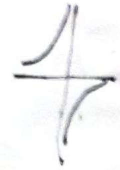
• $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|3-x|}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{|3-x|}{x-3}$ hodnota stejná, znaménka jiná $= \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3} = \underline{\underline{-1}}$ $\wedge\ x<3$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{|3-x|}{x-3} = \underline{\underline{1}}$


✓

→ spojitost fce

→ fce je spojitá, pokud ji můžu nakreslit 1 čarou  X

→ fce f je spojitá v bodě $x_0$ pokud platí:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)) = f(x_0)$$ → když není, tak bod nespojitosti

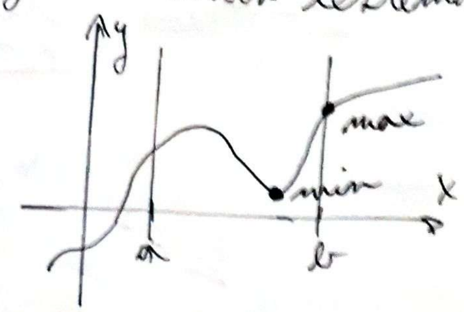
→ fce je na intervalu $\langle a;b\rangle$ spojitá, pokud jsou spojité všechny body na $(a;b)$ a bod a je spojitý zprava a b zleva

→ věty o spojitosti

• pokud je v $x_0$ spojitá fce f i g, pak jsou tam spojité i fce:
$f \pm g$, $f \cdot g$, $f : g$ − (pokud $g(x_0) \neq 0$)

• pokud je funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$ spojitá, pak je na něm i omezená a nabývá lokálních extrémů

↳ Weierstrassova věta



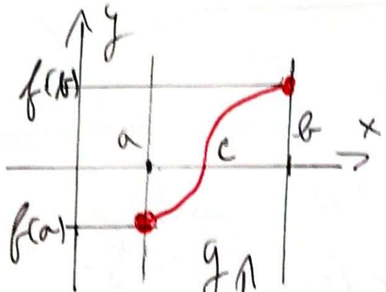

→ fce f je spojitá $\Leftrightarrow \forall x_0 \in D_f: \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

- pokud je fce $f$ spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak na něm nabývá všech hodnot mezi svými lokálními extrémy

↳ Bolzanova věta

- ⇒ „Cauchy – Bolzanova věta"

pokud je fce $f$ spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a $f(a)\cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a; b) \wedge f(c) = 0$



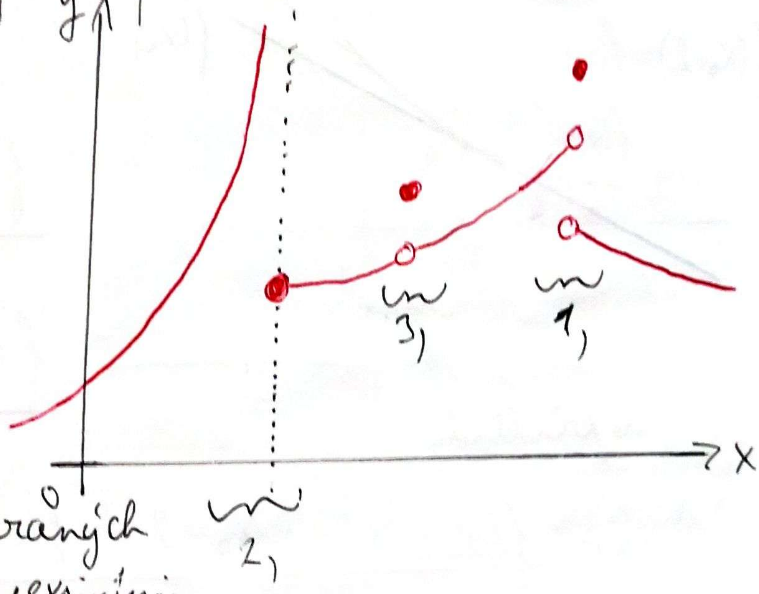

→ body nespojitosti

1) bod nespojitosti 1. typu

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

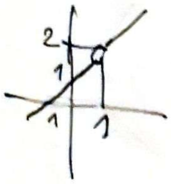
2) bod nespojitosti 2. typu

→ jedna z těch jednostranných limit je $\pm\infty$ nebo neexistuje




3) bod odstranitelné nespojitosti

$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(x)$ → můžeme ji spojitě dodefinovat aby byla spojitá




→ např. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ → $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x\to 1} (f(x)) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \underline{2}$$

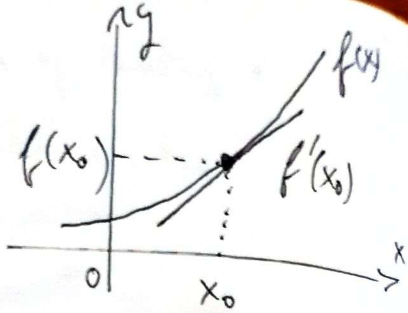
dodefinuju ji

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 2 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

→ derivace v bodě

→ míra změny fce v tom bodě

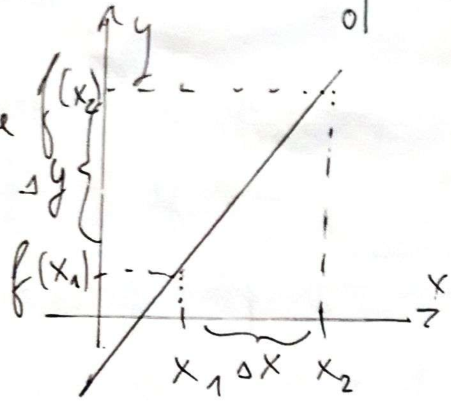
→ určuje směrnici tečny v tom bodě



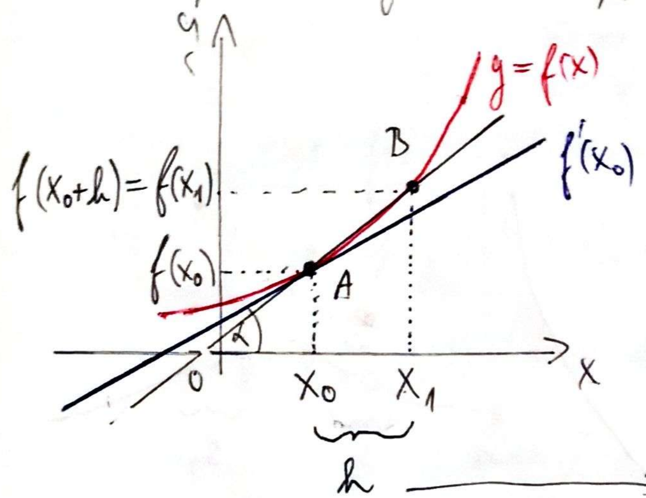

↳ $y = ax + b$ → směrnice

→ směrnice přímky

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$




→ pokud by nešlo o přímku, tak by to bylo nepřesné



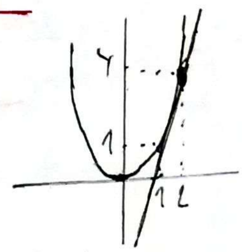

→ když spojím A a B, tak to je blízko k té mé tečně ⇒ přiblížím B k A

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = tg(\alpha)$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DEFINICE DERIVACE

→ příklady




• $f(x) = x^2 \wedge x_0 = 2 \rightarrow f'(x_0) = ?$

$(x-2)(x+2)$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = \underline{\underline{4}}$$

• $f(x) = x^3+x^2+x+1 \wedge f'(2) = ?$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3+x^2+x+1-15}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x^2+3x+7) = 4+6+7 = \underline{\underline{17}}$$

$(x^3+x^2+x-14):(x-2) = x^2+3x+7$

$-x^3+2x^2$

$3x^2+x-14$

$-3x^2+6x$

$7x-14$

$-7x+14$

} 0 zbytek

→ <u>derivace na celém intervalu</u>

$(x-x_0)(x+x_0)$

$$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$$

$$\Rightarrow f'(x^2)=2x$$

→ derivace funkce je jiná funkce, která mi vrací směrnice sečen v jednotlivých bodech

→ <u>derivace zleva</u>: $f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

→ <u>derivace zprava</u>: $f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

} musí být stejné aby fce měla derivaci

→ <u>např. $f(x)=|x| \Rightarrow f'(0)=?$</u>

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=-1$$

$x<0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=1$$

} $f'(0)$ neexistuje

⇒ ne všechny spojité fce mají v každém bodě derivaci

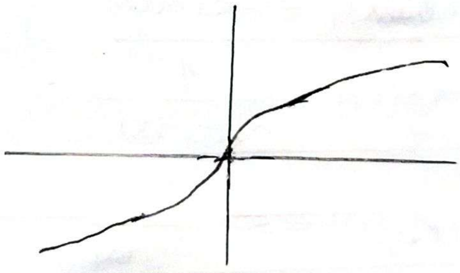
...

→ pokud má fce v daném bodě vlastní derivaci, pak je v tom bodě spojitá

→ <u>nevlastní derivace</u>

→ vyjde $\pm\infty$

⇒ <u>$f(x)=\sqrt[3]{x} \wedge f'(0)=?$</u>



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$x^2$ → i když jde zleva tak (+)

$$(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

→ vzorečky

- $c' = 0 \quad \wedge \quad (c \cdot x)' = c \quad \wedge \quad (x^c)' = c \cdot x^{c-1}$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$(f \cdot g \cdot h)' = [f \cdot (g \cdot h)]' = f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' =$

$= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$

↳ pokiaľ súčin n funkcií

→ tak súčet všetkých kombinácií

∧ vždy len 1 fce 1 derivovaná

- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $[f(g)]' = f'(g) \cdot g'$

$[f(g(h))]' = f'(g(h)) \cdot g'(h) \cdot h'$

↳ sundávam postupne tie funkcie

- $(c^x)' = c^x \cdot \ln(c) \quad \wedge \quad c > 0$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad (\log_c(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(c)}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln(c) - \ln(x) \cdot 0}{\ln^2(c)}$
- $(\log_c(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(c)}$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$

$\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\overbrace{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}^{1}}{\cos^2(x)}$

$\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{\overbrace{-\sin(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}^{-1}}{\sin^2(x)}$

- $(tg(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $(cotg(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(arccotg(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt[c]{x})' = (x^{\frac{1}{c}})' = \frac{1}{c} \cdot x^{\frac{1}{c} - \frac{c}{c}} = \frac{1}{c} \cdot x^{\frac{1-c}{c}} =$

$= \frac{1}{c} \cdot x^{-\frac{c-1}{c}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt[c]{x^{c-1}}}$

$\Rightarrow (\sqrt[c]{x})' = \frac{1}{c \cdot \sqrt[c]{x^{c-1}}}$

→ příklady

- $\left(\sqrt[4]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)' = \frac{7}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{1{,}75 \cdot \sqrt[4]{x^3}}}$
- $\left(-2\cos(x)\right)' = -2 \cdot (\cos(x))' = -2 \cdot (-\sin(x)) = \underline{\underline{2\sin(x)}}$
- $\left(-\frac{4}{3x^3}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right)' = -\frac{4}{3}\left(x^{-3}\right)' = \underline{\underline{4 \cdot x^{-4}}}$
- $(3^x)' = \underline{\underline{3^x \cdot \ln(3)}}$
- $(2\ln(x) - e^x)' = 2 \cdot \frac{1}{x} - e^x = \underline{\underline{\frac{2}{x} - e^x}}$
- $\left((3x^2-1) \cdot e^x\right)' = (3x^2-1)' \cdot e^x + (3x^2-1) \cdot e^x = (6x-0) \cdot e^x + (3x^2-1)e^x$

  $= \underline{\underline{e^x(3x^2+6x-1)}}$
- $(4x^2 \cdot \ln(x))' = 4 \cdot 2x \cdot \ln(x) + 4x^2 \cdot \frac{1}{x} = 8x \cdot \ln(x) + 4x = \underline{\underline{4x(2\ln(x)+1)}}$
- $\left(\frac{6x-5}{x^2}\right)' = \frac{(6-0) \cdot x^2 - (6x-5) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{6x^2 - 12x^2 + 10x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{10-6x}{x^3}}}$
- $(\sin(-6x^2))' = \cos(-6x^2) \cdot (-12x) = \underline{\underline{-12 \cdot x \cdot \cos(6x^2)}}$
- $(\sin^2(x))' \sim (f(g(x)))' \wedge f(x) = x^2 \wedge g(x) = \sin(x)$

  $\Rightarrow (\sin^2(x))' = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \underline{\underline{\sin(2x)}}$
- $\left(\sqrt{\cos(3x)}\right)' \sim (f(g(h(x))))' \wedge f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

  $\Rightarrow \left(\sqrt{\cos(3x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(3x)}} \cdot (-1) \cdot \sin(3x) \cdot 3 = \underline{\underline{-\frac{3 \cdot \sin(3x)}{2 \cdot \sqrt{\cos(3x)}}}}$
- $(\ln(\ln(4x)))' = \frac{1}{\ln(4x)} \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4 = \underline{\underline{\frac{1}{x \cdot \ln(4x)}}}$
- $\left(\ln\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (0-2x) = -\frac{2x}{2(1-x^2)} = \underline{\underline{\frac{x}{x^2-1}}}$

→ derivace vyšších řádů

$$f(x) \to f'(x) \to f''(x) \to f'''(x) \to f^{(4)}(x) \to f^{(5)}(x) \dots$$

$$f(x) = \frac{x^6}{30} \to f'(x) = \frac{x^5}{5} \to f''(x) = x^4 \to f'''(x) = 4x^3 \dots$$

→ příklad

$$\left(\sin(-4x^2)\cdot\frac{\ln^2(x)}{x^3} + \arcsin(x)\right)' = \left(\sin(-4x^2)\cdot\frac{\ln^2(x)}{x^3}\right)' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left(\sin(-4x^2)\right)'\cdot\frac{\ln^2(x)}{x^3} + \sin(-4x^2)\cdot\left(\frac{\ln^2(x)}{x^3}\right)' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \cos(-4x^2)\cdot(-8x)\cdot\frac{\ln^2(x)}{x^3} - \sin(4x^2)\cdot\frac{(\ln^2(x))'\cdot x^3 - \ln^2(x)\cdot 3x^2}{x^6} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{8\cdot\cos(4x^2)\cdot\ln^2(x)}{x^2} - \sin(4x^2)\cdot\frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x - 3\cdot\ln^2(x)}{x^4} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} =$$

$$= -\frac{8\cos(4x^2)\cdot\ln^2(x)}{x^2} - \sin(4x^2)\cdot\ln(x)\cdot\frac{2-3\ln(x)}{x^4} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$$

→ derivace inverzní funkce

→ Nechť je $f: x = f(y)$ spojitá a prostá na intervalu $\langle a; b\rangle$.
Nechť je $y_0$ vnitřní bod intervalu $\langle a; b\rangle \Rightarrow y_0 \in (a; b)$.
Jestliže existuje derivace $f'(y_0)$, pak $f^{-1}(x)$ má v $x_0 = f(y_0)$ derivaci:

$$(f^{-1})'(x_0) = \begin{cases} \frac{1}{f'(y_0)} & \text{pokud } f'(y_0) \neq 0 \\ +\infty & \text{pokud } f'(y_0) = 0 \wedge f \text{ je na } \langle a;b\rangle \text{ rostoucí} \\ -\infty & \text{pokud } f'(y_0) = 0 \wedge f \text{ je na } \langle a;b\rangle \text{ klesající} \end{cases}$$

→ příklady

- $f^{-1}: y = \ln(x) \to (\ln(x))' = ?$

$$\Rightarrow f: x = \ln(y) \Rightarrow y = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \neq 0$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{e^y} \quad \wedge \quad y = \ln(x) \Rightarrow e^y = x$$

$$\Rightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

→ nebo: $y = \ln(x) \Rightarrow e^y = x \;\wedge\; (e^y)' = e^y = x$

$$\Rightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{x}$$

- $(\sin(x))' = \cos(x) \Rightarrow (\arcsin(x))' = ?$

→ nemusím vyrábět inverzní fci protě to přepíšu aby to bylo v tom jejím tvaru

$$y = \arcsin(x) \Rightarrow \sin(y) = x$$

$$\Rightarrow (\sin(y))' = \cos(y) \qquad \sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- derivace funkce na funkci

→ využívám: $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x) \wedge e^{\ln(x)} = x$

- $(x^x)' = (e^{\ln(x^x)})' = (e^{x \cdot \ln(x)})'$ → složená fce $f(x) = e^x \wedge g(x) = x \cdot \ln(x)$

$$(e^{x \cdot \ln(x)})' = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (x \cdot \ln(x))' = e^{\ln(x^x)} \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow (x^x)' = x^x(\ln(x) + 1)$$

- $(x^{x^x})' = (e^{\ln(x^{x^x})})' = (e^{x^x \cdot \ln(x)})$ → $f(x) = e^x \wedge g(x) = x^x \cdot \ln(x)$

$$(e^{x^x \cdot \ln(x)}) = e^{x^x \cdot \ln(x)} \cdot (x^x \cdot \ln(x))' = e^{\ln(x^{x^x})} \cdot \left[(e^{x \cdot \ln(x)})' \cdot \ln(x) + x^x \cdot \frac{1}{x}\right] =$$

$$= x^{x^x} \cdot \left[\ln(x)\left(e^{\ln(x^x)} \cdot (x \cdot \ln(x))'\right) + x^x \cdot x^{-1}\right] =$$

$$= x^{x^x} \cdot \left[\ln(x) \cdot x^x \cdot (\ln(x) + 1) + x^x \cdot x^{-1}\right] =$$

$$= x^{x^x} \cdot x^x \cdot \left[\ln^2(x) + \ln(x) + \frac{1}{x}\right]$$

- $(x^{x^{x^x}})' = (e^{x^{x^x} \cdot \ln(x)})' = e^{\ln(x^{x^{x^x}})} \cdot (x^{x^x} \cdot \ln(x))' = x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}} \cdot \left((x^{x^x})' \cdot \ln(x) + x^{x^x} \cdot \frac{1}{x}\right) =$

$$= {}^4x \cdot \left[{}^3x \cdot {}^2x \cdot \left[\ln^2(x) + \ln(x) + \frac{1}{x}\right] \cdot \ln(x) + {}^3x \cdot \frac{1}{x}\right] =$$

$$= {}^4x \cdot {}^3x \cdot \left[x^x \cdot \left(\ln^3(x) + \ln^2(x) + \frac{1}{x} \cdot \ln(x)\right) + \frac{1}{x}\right]$$

→ **jednostranná derivace**

→ buď počítám z definice nebo ze samotné derivace

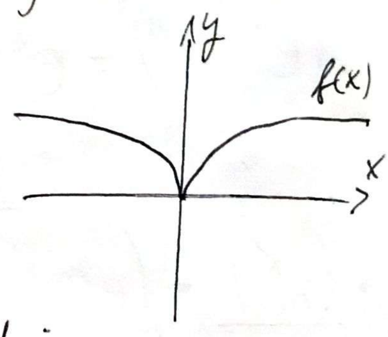
• $f(x) = |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x \;;\; x \geq 0 \\ -x \;;\; x < 0 \end{cases} \quad \wedge \quad f'(x) = \begin{cases} (x)' = 1 \;;\; x > 0 \\ \text{neexistuje} \;;\; x = 0 \\ (-x)' = -1 \;;\; x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1 \end{aligned}\right\} f'(0) \text{ neexistuje}$$

→ nebo: $$\left.\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} (f'(x)) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} (f'(x)) = \lim_{x \to 0^-} (1) = 1 \end{aligned}\right\} f'(0) \text{ neexistuje}$$

• $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$




$$f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = -\infty \\ f'_+(0) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} = +\infty \end{aligned}\right\} f'(0) \text{ neexistuje}$$

→ **derivace funkce s absolutní hodnotou**

→ nejdřív určím NB a rozdělím fci podle definice AH

$x^2(x-1) - (x-1) = (x^2-1)(x-1)$

• $f(x) = |x^3 - x^2 - x + 1|$ ⇒ $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ → vidím, že 1 je kořen

$1 - 1 - 1 + 1 = 0$

$$\Rightarrow (x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1$$
$$\underline{-(x^3 - x^2) = -x^3 + x^2}$$
$$-x + 1$$
$$\underline{-(-x + 1)}$$
$$0$$

$f(x) = |(x-1)(x-1)(x+1)|$

NB: $x = 1$, $x = 1$, $x = -1$

$$\begin{array}{ccccc} - - - & & - - + & & + + + \\ \ominus & -1 & \oplus & 1 & \oplus \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + x - 1 \;;\; x \in (-\infty; -1) \\ x^3 - x^2 - x + 1 \;;\; x \in (-1; 1) \\ x^3 - x^2 - x + 1 \;;\; x \in (1; \infty) \\ 0 \;;\; x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -3x^2+2x+1 \; ; & x \in (-\infty;-1) \\ 3x^2-2x-1 \; ; & x \in (-1;1) \\ 3x^2-2x-1 \; ; & x \in (1;\infty) \end{cases}$$

$$f'(-1): \left.\begin{aligned} f'_-(-1) &= -3-2+1 = -4 \\ f'_+(-1) &= 3+2-1 = 4 \end{aligned}\right\} f'(-1) \text{ neexistuje}$$

$$f'(1): \left.\begin{aligned} f'_-(1) &= 3-2-1 = 0 \\ f'_+(1) &= 3-2-1 = 0 \end{aligned}\right\} f'(1) = 0$$

$\Rightarrow$ <u>výsledek:</u> $f'(x) = \begin{cases} -3x^2+2x+1 & ; x < -1 \\ 3x^2-2x-1 & ; x > -1 \end{cases}$

→ Spočítejte tečnu k následující fci v bodě $x_0 = 1$

$f(x) = x^2 - \ln(x) + \frac{1}{2}$

$f(1) = 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ bod dotyku $T[1; \frac{3}{2}]$

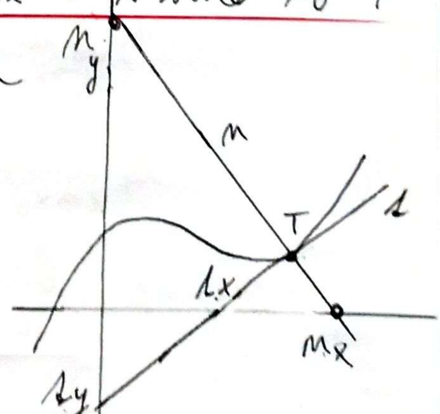
$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$f'(1) = 2 - 1 = 1 \Rightarrow$ směrnice tečny $\Rightarrow t: y = 1 \cdot x + b$

→ dosadím T: $\frac{3}{2} = 1 + b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{t: y = x + \frac{1}{2}}$

→ Spočítejte tečnu a normálu k fci $f(x) = x^2 - 3x + 5$ v bodě $x_0 = 1$

→ normála = kolmice na tečnu v bodě dotyku




$f(1) = 1 - 3 + 5 = 3 \Rightarrow T[1;3]$

$f'(x) = 2x - 3$

$f'(1) = -1 \Rightarrow T: 3 = -1 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 4$

$\Rightarrow \underline{t: y = -x + 4}$

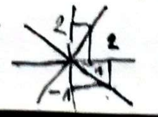
$a_n = -\frac{1}{a_t} = -\frac{1}{-1} = \underline{1}$

$\Rightarrow T: 3 = 1 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 2$

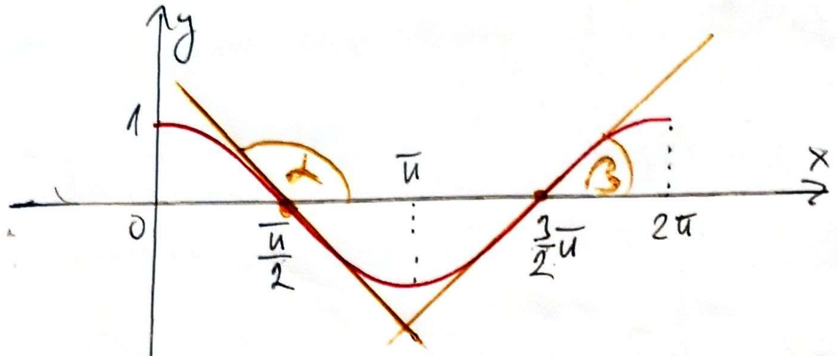
$\Rightarrow \underline{n: y = x + 2}$

$\underline{a_n = -\frac{1}{a_t}}$

$$\begin{cases} a_t = \frac{t_y}{t_x} \\ a_n = \frac{n_y}{n_x} = -\frac{t_x}{t_y} \end{cases}$$



→ Určete pod jakými úhly protíná fce $f(x) = \cos(x)$ osu $x$




používám, že

$f'(x_0) = tg(\alpha)$

→ osu $x$ protínám v $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ a $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

- $f'\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1 = tg(\alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{3}{4}\pi = 135°}}$
- $f'\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 1 = tg(\beta) \Rightarrow \underline{\underline{\beta = \frac{\pi}{4} = 45°}}$

→ Určete pod jakými úhly protíná fce $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ osu $x$

$f(x) = x(x^2-1) - 2(x^2-1) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$

$\Rightarrow NB: 2; 1; -1$

→ $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

- $f'(2) = 12 - 8 - 1 = 3 = tg(\alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = arctg(3) \doteq 71{,}5°}}$
- $f'(1) = 3 - 4 - 1 = -2 = tg(\beta) \Rightarrow \underline{\underline{\beta = arctg(-2) \doteq 116{,}5°}}$
- $f'(-1) = 3 + 5 - 1 = 7 = tg(\gamma) \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = arctg(7) \doteq 82°}}$

→ L'Hospitalovo – Lopitalovo – pravidlo

→ když mám $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí alespoň 1 z podmínek:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty \,/\, -\infty$

→ pak $\underline{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \left\| \frac{4-10+6}{4-6+2} \right\| = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x\to 2} \frac{2x-5}{2x-3} = \frac{4-5}{4-3} = \underline{\underline{-1}}$$

← neurčitý výraz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+5}{2x^2-1} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{4x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

→ přepis na limitu řešitelnou L'Hospitalem

1) $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\underset{\infty}{f(x)} - \underset{\infty}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \left( \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x\to x_0} \left( \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} \right) = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

2) $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to x_0} \left(\underset{0}{f(x)} \cdot \underset{\infty}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \left( \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \left\| \frac{0}{0} \right\|$$

3) $0^0, \infty^0, 1^\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot \ln(f(x))} = e^{\lim [g(x)\cdot \ln(f(x))]} = \|0\cdot\infty\|$$

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(g(x))$$

→ když mám:

nebo u rovnice

$$\frac{dy}{dx} \wedge y = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$$

→ pak derivuji $y$ podle proměnné $x$

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot \cos(bx+c)\cdot(b+0) = \underline{a \cdot b \cdot \cos(bx+c)}$$

podobně: $\frac{dy}{db} = a \cdot \cos(bx+c)\cdot(x+0) = a \cdot x \cdot \cos(bx+c)$

takže když $a = \frac{dv}{dt} \wedge v = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, tak

$$v = A \cdot \omega \cdot (-1) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \cdot (\omega + 0) = \underline{-A \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

- Integrály
  - primitivní fce $F(x)$ k fci $f(x)$ je taková fce, že

$$F'(x) = f(x)$$

- např: $f(x) = 3x^2 - 4x \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} F_1(x) = x^3 - 2x^2 \\ F_2(x) = x^3 - 2x^2 + 4 \\ \vdots \end{array}\right\}$ nekonečně mnoho

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R}$$

dx určuje podle které proměnné integruju

$$\Rightarrow \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \wedge \quad C \in \mathbb{R}$$

- jednoduché integrály
  - $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$
  - $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
  - $\int 4\sqrt{x^3}\,dx = 4\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = 4\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{8}{5}\sqrt{x^5} + C$
  - $\int 4\sin x\,dx = 4\int \sin x\,dx = -4\cos x + C$
  - $\int (x^2 - x^3 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx - \int x^3\,dx + 2\int x\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2 + C$
  - $\int (x-2)^2(x^2+1)\,dx = \int [(x^2-4x+4)(x^2+1)]\,dx =$
    $= \int (x^4 + x^2 - 4x^3 - 4x + 4x^2 + 4)\,dx = \int (x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4)\,dx =$
    $= \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$
  - $\int \frac{x^2\cdot\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[4]{x}}{x\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}\,dx - 5\int \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}\,dx =$
    $= \int x^{\frac{7}{6}}\,dx - 5\int x^{-\frac{5}{4}}\,dx = \frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} - 5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} = \frac{6}{13}\cdot\sqrt[6]{x^{13}} + \frac{20}{\sqrt[4]{x}} + C$
  - $\int (3\cdot 2^x - 5\sin x + 1)\,dx = 3\cdot\frac{2^x}{\ln(2)} + 5\cdot\cos(x) + x + C$

→ zajímavější integrály $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

- $\int tg^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tg x - x + C$
- $\int \frac{4x^2 + 3ax - 1}{x^3} dx = 4 \int \frac{dx}{x} + 3a \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx = 4 \ln|x| - \frac{3a}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$
- $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = \int 2\cos x \, dx = 2 \sin x + C$

→ procvičování

- $\int sec(x) \, tg(x) \, dx$ $\quad \frac{d}{dx} sec(x) = \frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = sec(x) \, tg(x)$

$\rightarrow \int sec(x) \, tg(x) \, dx = sec(x) + C$

$\frac{d}{ds} csc(x) = \frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} \cdot \cos x = -csc(x) \, cotg(x)$

→ Substituce

- $\int 4x^3 sec^2(x^4) \, dx$ $\quad u = x^4$, $du = 4x^3 dx$

$= \int \frac{1}{4x^3} 4x^3 sec^2(u) \, du = \int \frac{1}{\cos^2(u)} du = tg(u) + C = tg(x^4) + C$

- $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{4x^3} \frac{x^3}{u} du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln|1+x^4| + C$

$u = 1 + x^4$

$du = 4x^3 dx$

nezbavil jsem se x
→ zkusím jinou sub.

- $\int \frac{x}{1+x^4} dx = \int \frac{1}{4x^3} \frac{x}{u} du = \int \frac{1}{4x^2} \frac{1}{u} du$

$\left.\begin{array}{l} s = x^2 \\ ds = 2x \, dx \end{array}\right\} \int \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+s^2} ds = \frac{1}{2} atan(s) + C = \frac{1}{2} atan(x^2) + C$

- $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int 4x^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{4u^3}{1+u^2} du$

$u = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ $\quad u^3 = x^{\frac{3}{4}}$ $\quad$ → nikam jsem se nedostal

$du = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} dx$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} s = 1 + \sqrt{x} \\ ds = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array}\right\} \int 2\sqrt{x} \frac{1}{s} ds = 2 \int \frac{s-1}{s} ds = 2 \int \left(1 - \frac{1}{s}\right) ds = 2(s - \ln|s|)$

$= 2 + 2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C$

$\rightarrow \sqrt{x} = s - 1$

→ Důležité integrály, které by si člověk měl pamatovat

→ když vidím $tg(x)$, tak s tím bude souviset $sec(x)$

• $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\tan(x)\sec(x)}{\sec(x)}\,dx$ $\quad u = \sec(x)$, $du = \sec(x)\,tg(x)\,dx$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\sec(x)| + C$$

• $\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$ $\quad u = \cos x$, $du = -\sin(x)\,dx$

$$= \int \frac{-1}{u}\,du = -\ln|\cos x| + C = \ln|\cos^{-1}(x)| + C = \ln|\sec x| + C$$

• $\int \sec(x)\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + tg x)}{\sec x + tg x}\,dx$ $\quad u = \sec(x) + tg(x)$, $du = \sec(x)\,tg(x) + \sec^2(x)\,dx = \sec(x)(tg(x) + \sec(x))\,dx$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|\sec(x) + tg(x)| + C$$

• $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x^3(1+x^{-2})}\,dx = \int \frac{x^{-3}}{1+x^{-2}}\,dx$ $\quad u = 1 + x^{-2}$, $du = -2x^{-3}\,dx$

$$= \int \frac{1}{-2x^{-3}} \frac{x^{-3}}{u}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = -\frac{1}{2}\ln(1+x^{-2}) + C$$

→ důležitý je první krok řešení

→ Užitečná rovnice $\quad u = ax+b$, $du = a\,dx$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

• $\int e^{3x}\,dx \begin{pmatrix} u = 3x \\ du = 3\,dx \end{pmatrix} \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{3x} + C$

• $\int \sin(2x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{2}\cos(2x+5) + C$

$u = 2x+5$, $du = 2\,dx$

• $\int \frac{1}{ax+b} = \begin{pmatrix} u = ax+b \\ du = a\,dx \end{pmatrix} \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

→ Neelementární integrály

→ integrály, ke kterým neexistuje primitivní funkce, která by byla součtem konečného množství primitivních funkcí

⇒ nejdou vyřešit standardními metodami

• $\int e^{x^2} dx$ • $\int e^{-x^2} dx$ • $\int \frac{e^x}{x} dx$ • $\int \frac{1}{\ln(x)} dx$

• $\int \frac{\sin x}{x} dx$ • $\int \frac{\cos x}{x} dx$ • $\int \sin(x^2) dx$ • $\int \cos(x^2) dx$

• $\int x^x dx$ • $\int \sqrt{1+x^3}\, dx$

→ Per-partes

- nechť jsou $u, v$ funkce proměnné $x$

$$d(u \cdot v) = d(u) \cdot v + u \cdot d(v)$$

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot d(u) + \int u \cdot d(v)$$

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

• $\int x \cos(x^2)\, dx = \int \frac{1}{2x} x \cos u \, du = \frac{1}{2} \int \cos(u)\, du = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$

$\left.\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x\, dx \end{array}\right\}$ tohle jde řešit substitucí

• $\int x \cos(x)\, dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$

$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

$u = x$ $\qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 1\, dx$ $\qquad v = \sin(x)$

1) součin diagonály ⇒ $u \cdot v$

2) $-\int$ součinu spodní řady ⇒ $-\int v\, du$

→ musím si vybrat, kterou funkci budu derivovat a kterou integrovat

• $\int x^3 \ln(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^3\,dx$

$u = \ln(x) \qquad dv = x^3\,dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = \frac{1}{4}x^4$

$= \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C$

$= \frac{1}{4}x^4\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$

• $\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x - \int -2x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx =$

$u = x^2 \qquad dv = \sin(x)\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = -\cos x$

$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 1\,dx \qquad v = \sin x$

$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

→ když per-partes používám vícekrát:

• $\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

| | D | I | | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | $x^2$ | $\sin x$ | | |
| $-$ | $2x$ | $-\cos x$ | $\to$ | $+x^2\cdot(-\cos x) = -x^2\cos x$ |
| $+$ | $2$ | $-\sin x$ | $\to$ | $-2x\cdot(-\sin x) = 2x\sin x$ |
| $-$ | $0$ | $\cos x$ | $\to$ | $2\cdot\cos x = 2\cdot\cos x$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | |

když jsem doderivoval do 0, tak končím – stačí to

I. KONEC : v D sloupečku je 0

→ když člověk rozepíše řešení tohoto integrálu standardní metodou, tak je vidět proč DI metoda funguje

- $\int x^2 \sin x \, dx$ $\quad u = x^2 \quad dv = \sin x \, dx$
$\quad du = 2x \, dx \quad v = -\cos$

$= +(-x^2\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx$

$u = 2x \quad dv = -\cos x$
$du = 2\,dx \quad v = -\sin x$

$= +(-x^2\cos x) - (-2x\sin x) + \int 2(-\sin x)\,dx$

$u = 2 \quad dv = -\sin x\,dx$
$du = 0\,dx \quad v = \cos x$

$= +(-x^2\cos x) - (-2x\sin x) + (2\cos x) - \underbrace{\int 0\,dx}_{C}$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

- $\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \int \frac{1}{4}x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + C$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $\ln x$ | $x^3$ |
| - | $\frac{1}{x}$ | $\frac{1}{4}x^4$ |
| + | $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{20}x^5$ |
| | ⋮ | ⋮ |

⇒ mohl bych jít do nekonečna a nikam se nedostat

II. KONEC: když můžu integrovat součin řady

- $\int e^x \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^x\cos(2x) + \frac{1}{4}e^x\sin(2x) - \frac{1}{4}\int e^x\sin(2x)\,dx$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $e^x$ | $\sin(2x)$ |
| - | $e^x$ | $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ |
| + | $e^x$ | $-\frac{1}{4}\sin(2x)$ |
| - | $e^x$ | $\frac{1}{8}\cos(2x)$ |
| | ⋮ | ⋮ |

$\frac{5}{4}\int e^x\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}e^x\cos(2x) + \frac{1}{4}e^x\sin(2x)$

$\int e^x\sin(2x)\,dx = -\frac{2}{5}e^x\cos(2x) + \frac{1}{5}e^x\sin(2x) + C$

⇒ $e^x \cdot \sin(2x)$ je fce se kterou jsem začínal

⇒ když to pokračuje do nekonečna

⇒ v tomto příkladě nezáleží co derivuju a co integruju

III. KONEC: když se řada opakuje

- $\int \operatorname{arctg}(x)\,dx = x\cdot\operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = $ $\left| \begin{array}{l} u = 1+x^2 \\ du = 2x\,dx \end{array} \right.$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $\operatorname{arctg}(x)$ | $1$ |
| − | $\frac{1}{1+x^2}$ | $x$ |

$= x\cdot\operatorname{arctg}x - \int \frac{1}{2x}\,\frac{x}{u}\,du =$

$= x\cdot\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du =$

$= \underline{\underline{x\cdot\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}}$

↳ $x\cdot\frac{1}{1+x^2}$ umím integrovat ⇒ KONEC

- $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \int \ln x\cdot x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int x^{-1}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\,dx =$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $\ln x$ | $x^{-\frac{1}{2}}$ |
| − | $\frac{1}{x}$ | $2\cdot x^{\frac{1}{2}}$ |

$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$= \underline{\underline{2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C}}$

- $\int x^2 e^{3x}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x^2\cdot e^{3x} - \frac{2}{9}x\cdot e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C}}$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $x^2$ | $e^{3x}$ |
| − | $2x$ | $\frac{1}{3}e^{3x}$ |
| + | $2$ | $\frac{1}{9}e^{3x}$ |
| − | $0$ | $\frac{1}{27}e^{3x}$ |

- $\int x\sec(x)\operatorname{tg}(x)\,dx = \underline{\underline{x\sec(x) - \ln|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + C}}$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $x$ | $\sec(x)\operatorname{tg}(x)$ |
| − | $1$ | $\sec(x)$ |
| + | $0$ | $\ln\lvert\sec(x)+\operatorname{tg}(x)\rvert$ |

↗ to si mám pamatovat → odvození před pár stranami

• $\int \sin^2(x)\cos x \, dx = \int \frac{1}{\cos x} \cos x \, u^2 \, du = \int u^2 du = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

• $\int \sin^2(x)\, dx =$

$= \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx =$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C =$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

snížení mocniny sinu

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \wedge \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

snížení mocniny kosinu

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

→ Strategie pro integraci trigonometrických výrazů

1) $\sin x + \cos x \rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\int ( \quad ) \cos x \, dx$ — výraz v rámci $\sin(x)$ $\Rightarrow u = \sin x$

$\int ( \quad ) \sin x \, dx$ — výraz v rámci $\cos x$ $\Rightarrow u = \cos x$

• $\int \sin^3 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x \, dx = -\int (1 - u^2) du = -u + \frac{1}{3}u^3 =$

$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

2) $\operatorname{tg} x + \sec x \rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \operatorname{tg} x$

$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$

$\int ( \quad ) \sec^2(x)\, dx$ — výraz v rámci $\operatorname{tg}(x)$ $\Rightarrow u = \operatorname{tg} x$

$\int ( \quad ) \sec x \operatorname{tg} x \, dx$ — výraz v rámci $\sec(x)$ $\Rightarrow u = \sec x$

• $\int \sec^4 x \, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1)\sec^2 x \, dx = \int (u^2 + 1) du = \frac{1}{3}u^3 + u + C$

$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$

$u = \operatorname{tg} x$

$du = \sec^2 x \, dx$

• $\int \sec^4(x)\, tg\,x\, dx = \int \sec^3 x \sec x\, tg\,x\, dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

$u = \sec x$

$du = \sec x\, tg\,x\, dx$

nebo: $\int \sec^4(x)\, tg\,x\, dx = \int \sec^2 x\, tg\,x \sec^2 x\, dx = \int (tg^2 x + 1)\, tg\,x \sec^2 x\, dx$

$u = tg\,x$, $du = \sec^2 x\, dx$ $\Big| = \int (u^3 + u)\, du = \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + C$

$\Rightarrow$ různý funkce? $\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\sec^4 x + C\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + C\right)$

$\rightarrow$ protože $\frac{1}{4}\sec^4 x = \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x + \frac{1}{4}$

• $\int tg^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, tg\,x\, dx = \int tg\,x \sec^2 x\, dx - \int tg\,x\, dx$

$u = tg\,x$, $du = \sec^2 x\, dx$ $\Big| = \int u\, du - \ln|\sec x| = \frac{1}{2} tg^2 x - \ln|\sec x| + C$

• $\int \sec^3 x\, dx = \int (tg^2 x + 1) \sec x\, dx = \int tg^2 x \sec x\, dx + \int \sec x\, dx =$

$= \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx + \int \sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx + \int \sec x\, dx$

$\Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ nikam jsem se nedostal

• $\int \sec^3 x\, dx = \int \sec^2 x \sec x\, dx = \sec x\, tg\,x - \int \sec x\, tg^2 x\, dx =$

| | D | I |
|---|---|---|
| + | $\sec x$ | $\sec^2 x$ |
| − | $\sec x\, tg\,x$ | $tg\,x$ |

$= \sec x\, tg\,x - \int (\sec^3 x + \sec x)\, dx =$

$= \sec x\, tg\,x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$

$\Rightarrow 2 \cdot \int \sec^3 x\, dx = \sec x\, tg\,x + \ln|\sec x + tg\,x|$

$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x\, tg\,x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg\,x| + C$

3) $\operatorname{cotg} x \quad + \quad \csc x \quad \to \quad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \csc^2 x$ $\qquad \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \operatorname{cotg} x$

$\int (\ ) \csc^2 x \, dx \qquad \int (\ ) \csc x \operatorname{cotg} x \, dx$ $\qquad \frac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\csc^2 x$

výraz v rámci $\operatorname{cotg} x$ $\Rightarrow u = \operatorname{cotg} x$

výraz v rámci $\csc x$ $\Rightarrow u = \csc x$

- $\int \csc^4 x \operatorname{cotg} x \, dx = \int \csc^3 x \csc x \operatorname{cotg} x \, dx = \int u^3 (-1) \, du = -\frac{1}{4} \csc^4(x) + C$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \operatorname{cotg} x \, dx$

→ Trigonometrické substituce

potřebuju 9

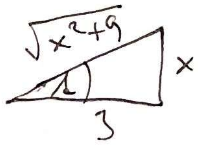
- $\int \sqrt{x^2+9} \, dx$ $\qquad$ note: $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \Rightarrow 9 \tan^2 x + 9 = 9 \sec^2 x$

$(3 \tan x)^2 + 9 = 9 \sec^2 x$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 \tan(t) \\ dx &= 3 \sec^2(t) \, dt \end{aligned}\right\} \int \sqrt{(3 \tan t)^2 + 9} \, 3 \sec^2 t \, dt =$$

$$= \int \sqrt{9 \sec^2 t} \cdot 3 \sec^2 t \, dt =$$

$$= 9 \int \sec^3 t \, dt = 9 \left( \frac{1}{2} \sec(t) \operatorname{tg}(t) + \frac{1}{2} \ln |\sec(t) + \operatorname{tg}(t)| \right)$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(t) = \frac{x}{3} \quad \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \cos(t) = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \sec t = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2+9} \, dx = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} \cdot \frac{x}{3} + 9 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2+9} \right) - \frac{9}{2} \ln(3) + C_1 =$$

je to jen číslo

$$= \frac{1}{2} \sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2+9} \right) + C \quad \wedge \quad C = -\frac{9}{2} \ln(3) + C_1$$

→ strategie

| výraz | substituce | vzorec |
|---|---|---|
| $\sqrt{x^2+a^2}$ | $x = a \cdot \operatorname{tg} \theta$ | $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ |
| $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x = a \cdot \sec \theta$ | $\sec^2 \theta - 1 = \operatorname{tg}^2 \theta$ |
| $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x = a \cdot \sin \theta$ | $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ |

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\sec\theta\, tg\,\theta}{2\sec\theta\sqrt{4\sec^2\theta-4}}\,d\theta = \int \frac{tg\,\theta}{\sqrt{4\cdot tg^2\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2}\theta$$

$x = 2\cdot\sec\theta$

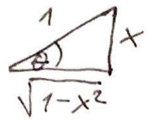
$dx = 2\sec\theta\, tg\,\theta\, d\theta$ $\Big\}$ $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{x}{2} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{x}\right)$ $\Big|$ $= \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,d\theta = \int \cos^2\theta\,d\theta =$$

$x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta\,d\theta$ $\Big|$ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) = \quad \rightarrow \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$\Rightarrow \theta = \arcsin(x) \quad \wedge \quad \sin\theta = \frac{x}{1} \Rightarrow$ 

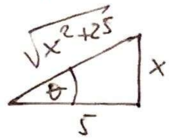
$\Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{(25+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{5\sec^2\theta}{[25(1+tan^2\theta)]^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \frac{5}{5^3}\cdot\int \frac{\sec^2\theta}{(\sec^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \frac{1}{25}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta =$$

$x = 5\cdot tan\,\theta$

$dx = 5\sec^2\theta\,d\theta$ $\Big|$ $= \frac{1}{25}\cdot\int \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{25}\cdot\sin\theta = \frac{1}{25}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + C$

$tan\,\theta = \frac{x}{5} \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}}$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(tg^2\theta+1)}\,d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{a}\theta = \frac{1}{a}\,arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$x = a\,tg\,\theta$

$dx = a\sec^2\theta\,d\theta$ $\rightarrow \theta = arctg\left(\frac{x}{a}\right)$.

→ príklady

$$\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \int \frac{x}{u}\cdot\frac{1}{2ax}\,du = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|ax^2+b| + C$$

$u = ax^2+b$

$du = 2ax\,dx$

note: $(x+a)-(x-a) = 2a$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\int \frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}\,dx = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x-a}\,dx - \int \frac{1}{x+a}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = \frac{1}{a}\int u^{-n}\,du = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-n+1}\cdot u^{-n+1} = -\frac{1}{a}\,\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$$

$u = ax+b$

$du = a\,dx$

- Parciální zlomky

- když integruju racionální fci = podíl polynomů $\Rightarrow \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx$
- integrály racionálních fcí, které znám:

1, $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

2, $\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$

3, $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

nejběžnější

4, $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$

5, $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

1, stupeň $P_m(x)$ > stupeň $Q_n(x)$ $\Leftrightarrow m > n$

$\Rightarrow$ dělení mnohočlenu mnohočlenem

- $\int \frac{x^3}{x^2+9}\,dx = \int\left(x - \frac{9x}{x^2+9}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 9\int\frac{x}{x^2+9}\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}\ln|x^2+9| + C}}$

$$x^3 : (x^2+9) = x - \frac{9x}{x^2+9}$$
$$\underline{-(x^3+9x)}$$
$$-9x$$

2, stupeň $P_m(x)$ < stupeň $Q_n(x)$ $\Leftrightarrow m < n$

$\Rightarrow$ rozklad $Q_n(x)$ na činitele

a, různé lineární činitelé

polynomy 0-tého stupně $\Rightarrow$ konstanty

- $\int \frac{8x-17}{x^2-5x+4} = \int\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} \Rightarrow \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4}$

$\Rightarrow A: \frac{8x-17}{x-4} = A + \frac{B}{x-4}\cdot(x-1)$ pokud $x=1 \Rightarrow \frac{8\cdot1-17}{1-4} = A+0 = \underline{\underline{3}}$

$\Rightarrow B: \frac{8x-17}{x-1} = \frac{A}{x-1}(x-4) + B$ pokud $x=4 \Rightarrow \frac{8\cdot4-17}{4-1} = 0+B = \underline{\underline{5}}$

$\Rightarrow$ přičítám A: ve zlomku si zakryju výraz co je pod A a za x dosadím tak aby pod A byla 0 $\rightarrow$ B analogicky

$\Rightarrow \int\frac{8x-17}{x^2-5x+4} = \int\frac{3}{x-1} + \int\frac{5}{x-4} = \underline{\underline{3\cdot\ln|x-1| + 5\ln|x-4| + C}}$

a', stejné lineární činitelé - lze řešit substitucí

$\int\frac{8x-17}{x^2-6x+9}\,dx = \int\frac{8(x-3)+7}{(x-3)^2}\,dx = 8\int\frac{1}{x-3}\,dx + 7\int\frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \underline{\underline{8\ln|x-3| - \frac{7}{x-3} + C}}$

b) kvadratičtí činitelé – různí a nerozložitelní | čitatel musí být o 1 stupeň menší než jmenovatel.

• $\int \frac{4x^2-9x+2}{(x+3)(x^2+4)}\,dx \Rightarrow \frac{4x^2-9x+2}{(x+3)(x^2+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{Bx+C}{x^2+4} =$

$\Rightarrow$ vyřeším A jako předtím: $A \overset{x=-3}{=} \frac{4\cdot 9+9\cdot 3+2}{9+4} = \frac{65}{13} = \underline{\underline{5}}$

$\Rightarrow$ B a C dopočítám zbavením se zlomků:

$$4x^2-9x+2 = 5x^2+4\cdot 5+Bx^2+Cx+3Bx+3C =$$
$$= x^2(5+B)+x(C+3B)+(20+3C)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 4 = 5+B \Rightarrow B=-1 \\ \Rightarrow -9 = C+3B \\ \Rightarrow 2 = 20+3C \Rightarrow C=-6 \end{array}\right\} A=5,\ B=-1,\ C=-6$$

$$= \int \frac{5}{x+3}\,dx + \int \frac{-x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{-6}{x^2+4}\,dx = 5\ln|x+3| - \int \frac{x}{x^2+4} - 6\int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx =$$

$$= \underline{\underline{5\ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - 3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c}}$$

• $\int \frac{1}{x^2+6x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+4}\,dx = \int \frac{1}{u^2+2^2}\,du = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+3}{2}\right) + C}}$

$\left.\begin{array}{l} u = x+3 \\ du = dx \end{array}\right\}$ pokud je jmenovatel kvadratický výraz a nejde rozložit $\Rightarrow$ substituce + vzorec

c) činitelé se opakují

• $\int \frac{2x-5}{x^3+x^2}\,dx \Rightarrow \frac{2x-5}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

když to opakuju tak další jsou stejného stupně jako předchozí $\Rightarrow$ lin.

lineární = A, C konsty

$\rightarrow$ např: $\frac{2x-5}{x^3(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow$ protože: $\frac{2x-5}{x^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$

$\Rightarrow$ B a C vyřeším jako v a) $B = \frac{2\cdot 0-5}{0+1} = \underline{\underline{-5}} \wedge C = \frac{-2-5}{1} = \underline{\underline{-7}}$

$\Rightarrow$ A dopočítám:

$$2x-5 = Ax(x+1) + B(x+1) + C\cdot x^2 \qquad A-7=0 \Rightarrow \underline{\underline{A=7}}$$
$$= Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2 = x^2(A+C)+x(A+B)+B$$

$$= \int \frac{7}{x}\,dx - 5\int \frac{1}{x^2}\,dx - 7\int \frac{1}{x+1}\,dx = \underline{\underline{7\ln|x| + 5\frac{1}{x} - 7\ln|x+1| + C}}$$

• $\int \frac{2x^2+8x+5}{x^2+4x+13}\,dx = \Rightarrow 2x^2+8x+5 : (x^2+4x+13) = 2 - \frac{21}{x^2+4x+13}$

$\quad -(2x^2+8x+26)$

$\quad 5-26 = -21$

$= \int 2\,dx - 21\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = 2x - 21\int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \begin{vmatrix} u = x+2 \\ du = dx \end{vmatrix}$

$= 2x - 21\int \frac{1}{u^2+3^2}\,du = 2x - 21\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{3}\right) = 2x - 7\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + C$

• $\int \frac{6x^2+31x+45}{x^3+6x^2+9x}\,dx = \int \frac{6x^2+31x+45}{x(x^2+6x+9)}\,dx = \int \frac{6x^2+31x+45}{x(x+3)^2}\,dx =$

$-18+31-15$

$\Rightarrow \frac{6x^2+31x+45}{x(x+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \Rightarrow A = \frac{45}{9} = 5 \wedge C = \frac{6\cdot 9 - 3\cdot 31 + 45}{-3} = -2$

$\boxed{x=0} \qquad \boxed{x=-3}$

$6x^2+31x+45 = 5(x+3)^2 + B\,x(x+3) - 2x$

$6x^2 \qquad 5x^2 \qquad + Bx^2 \Rightarrow B = 1$

$= \int \frac{5}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+3}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = 5\ln|x| + \ln|x+3| + 2\frac{1}{x+3} + C$

• $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+a)(x-a)}\,dx \Rightarrow \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-a} \Rightarrow A = -\frac{1}{2a} \quad (x=-a)$

$B = \frac{1}{2a} \quad (x=a)$

$= -\frac{1}{2a}\int \frac{1}{x+a}\,dx + \frac{1}{2a}\int \frac{1}{x-a}\,dx =$

$= -\frac{1}{2a}\ln|x+a| + \frac{1}{2a}\ln|x-a| = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

• $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+a)^2-2xa}\,dx = \Rightarrow \begin{matrix} u = x+a \\ du = dx \end{matrix} \Rightarrow x = u-a$

$= \int \frac{1}{u^2-2a(u-a)}\,du = \int \frac{1}{u^2-2au+2a^2}\,du = \int \frac{1}{(u-a)^2+a^2} = \begin{matrix} t = u-a \\ dt = du \end{matrix}$

$= \int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt \Rightarrow$ tenhle integrál nejde přes parciální zlomky

$\Rightarrow$ za $x$ musím substituovat $x = a\cdot \operatorname{tg}\theta$ — stránka zpátky

$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^3}dx = \int \frac{5x-5+8}{(x^2-2x+1+4)^3}dx = \int \frac{5(x-1)+8}{((x-1)^2+4)^3}dx =$ $u = x-1$, $du = dx$

$= \int \frac{5u+8}{(u^2+4)^3}du = 5\int\frac{u}{(u^2+4)^3}du + 8\int \frac{1}{(u^2+4)^3}du =$ | 1) $t = u^2+4$, $dt = 2u\,du$ 2) $u = 2\,tg\,\theta$, $du = 2\sec^2\theta\,d\theta$

$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{t^3}dt + 8\cdot\int\frac{2\sec^2\theta}{[4\sec^2\theta]^3}d\theta = \frac52\cdot\frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{t^2} + 8\cdot\int\frac{2\sec^2\theta}{64\sec^6\theta}d\theta =$

$= -\frac{5}{4(u^2+4)^2} + \frac14\int\cos^4\theta\,d\theta =$ $\Rightarrow \cos^2\theta = \frac12(1+\cos2\theta) \Rightarrow \cos^4\theta = \frac14(1+\cos(2\theta))^2$

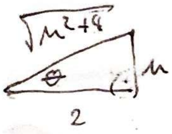
$= -\frac{5}{4[(x-1)^2+4]^2} + \frac{1}{16}\int(1+2\cos2\theta+\cos^2(2\theta))d\theta =$ $\cos^2(2\theta) = \frac12(1+\cos(4\theta))$

$= -\frac{5}{4[(x-1)^2+4]^2} + \frac18\left(\frac12\theta + \int\cos2\theta\,d\theta + \frac12\int\cos^2(2\theta)d\theta\right) =$

$= -\frac{5}{4[(x-1)^2+4]^2} + \frac18\left(\frac12\theta + \frac12\sin(2\theta) + \frac14\int(1+\cos4\theta)d\theta\right) =$

$= -\frac{5}{4[(x-1)^2+4]^2} + \frac18\left(\frac34\theta + \sin\theta\cos\theta + \frac1{16}\sin(4\theta)\right) =$

$u = 2\,tg\,\theta \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac u2\right) \wedge tg\,\theta = \frac u2$




$\to \sin\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$

$\sin4\theta = 2\sin2\theta\cos2\theta = 4\sin\theta\cos\theta(2\cos^2\theta - 1) \wedge \sin\theta\cos\theta = \frac{2u}{u^2+4}$

$\sin4\theta = \frac{8u}{u^2+4}\left(\frac{8}{u^2+4}-1\right) = \frac{64u}{[u^2+4]^2} - \frac{8u}{u^2+4}$

$= -\frac{5}{4(u^2+4)^2} + \frac{3}{32}arctg\left(\frac u2\right) + \frac{u}{4(u^2+4)} + \frac{u}{2[u^2+4]^2} - \frac{u}{16(u^2+4)} =$

$= \frac{3}{32}arctg\left(\frac u2\right) + \frac{-5+2u}{4(u^2+4)^2} + \frac{4u-u}{16(u^2+4)} = \frac{3}{32}arctg\left(\frac u2\right) + \frac{2u-5}{4(u^2+4)^2} + \frac{3u}{16(u^2+4)} =$

$= \frac{3}{32}arctg\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{2x-7}{4(x^2-2x+5)^2} + \frac{3x-3}{16(x^2-2x+5)} + C$

$\int\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2}dx = \int\frac{u^2\cdot3u^2}{u+2}du = 3\int\frac{u^4}{u+2}du = 3\int\left(u^3-2u^2+4u-8+\frac{16}{u+2}\right)du =$

$\sqrt[3]{x} = u$
$x = u^3$
$dx = 3u^2du$

$u^4 : (u+2) = u^3-2u^2+4u-8+\frac{16}{u+2}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| -2 | 1 | -2 | 4 | -8 | 16 |

$= 3\left(\frac{u^4}{4} - \frac{2u^3}{3} + \frac42u^2 - 8u + 16\ln|u+2|\right) =$

$= \frac34 x\cdot\sqrt[3]{x} - 2x + 6\sqrt[3]{x^2} - 24\sqrt[3]{x} + 48\ln|\sqrt[3]{x}+2| + C$

→ Integrál různých odmocnin    $2, 3 \Rightarrow 6$

→ substituuji za nejmenší společný násobek odmocnin → $\sqrt[2]{x}; \sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[6]{x}$.

• $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}dx = 12\int \frac{u^{11}}{u^6+u^4+u^3}du$ → podíl polynomů → dá se to vyřešit

$x = u^{12}$

$dx = 12u^{11}du$

→ Integrál se zlomkem lineárních výrazů pod odmocninou → měl bych určit Df

→ budu mít $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ⇒ substituce: $u^n = \frac{ax+b}{cx+d}$

• $\int \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}dx =$ ⇒ $u^2 = \frac{x+1}{1-x}$ ⇒ $u^2 - xu^2 = x+1$

$x + xu^2 = u^2-1 \Rightarrow x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$

$= \int u\cdot \frac{(u^2+1)^2}{4}\cdot\frac{4u}{(u^2+1)^2}du =$ ⇒ $dx = \frac{2u(u^2+1)-2u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}du = \frac{2u(2)}{(u^2+1)^2}du = 4\frac{u}{(u^2+1)^2}du$

⇒ $(x-1)^2 = \left(\frac{u^2-1-u^2-1}{u^2+1}\right)^2 = 4\cdot\frac{1}{(u^2+1)^2}$

$= \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 =$

⇒ $\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(u^2+1)^2}{4}$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{3}{2}} + C$

→ Integrál s kvadratickým výrazem pod odmocninou → měl bych určit Df

a) kvadratický výraz má kořeny ⇒ lze rozložit

• $\int \frac{x+3}{(x-2)\sqrt{-(x^2+2x-8)}}dx =$ → $\sqrt{-(x^2+2x-8)} = \sqrt{-(x+4)(x-2)} = \sqrt{(x+4)^2}\sqrt{\frac{-(x-2)}{(x+4)}} = |x+4|\sqrt{\frac{2-x}{x+4}}$

$x_1 = -4$
$x_2 = 2$ }  − + − ($-4$, $2$)

→ √ je definovaná na $x \in \langle -4; 2)$

pro $x \in \langle -4; 2)$ je $x+4 \geq 0 \Rightarrow |x+4| = (x+4)$

$= \int \frac{x+3}{(x-2)(x+4)}\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}\,dx \ldots$

b) kvadratický výraz nemá kořeny

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ → neprotíná osu x
- $a<0$ − P pod osou x ⇒ √ není definovaná
- $a>0$ → √ je definovaná

⇒ sub: $\pm\sqrt{a}\,x \pm u$ = Eulerova substituce − znaménka si vyberu

• $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1-2u}{u^2-1}\cdot\frac{1-2u}{u-u^2-1}\cdot\frac{2(u-u^2-1)}{(1-2u)^2}du = 2\int\frac{1}{u^2-1}du =$

$\sqrt{x^2+x+1} = x+u$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C$

$x^2+x+1 = x^2+2ux+u^2$

$x - 2ux = u^2-1$

$x = \frac{u^2-1}{1-2u}$ → $x+u = \frac{u^2-1+(1-2u)u}{1-2u} = \frac{u^2-1+u-2u^2}{1-2u} = \frac{u-u^2-1}{1-2u}$

$dx = \frac{2u(1-2u)+2(u^2-1)}{(1-2u)^2}du = \frac{2u-4u^2+2u^2-2}{(1-2u)^2}du = \frac{-2u^2+2u-2}{(1-2u)^2}du$

## → Univerzální substituce pro integrál obsahující sin x a cos x

⇒ $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ ⇒ najdu: dx, sin x, cos x ⇒ parciální zlomky

$x = 2 \cdot arctg(u)$

$\Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$

$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{tg^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{1}{u^2+1}$

1

$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{u^2+1} - \frac{u^2+1}{u^2+1} = \frac{1-u^2}{u^2+1}$

$\Rightarrow \cos x = \frac{1-u^2}{u^2+1}$ | $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2 \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \cdot \cos^2\frac{x}{2} = 2\,tg\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{u^2+1}$

$\Rightarrow \sin x = \frac{2u}{u^2+1}$    POZOR: normální substituce ⇒ výrazy pod odmocninou

• $\int \frac{1}{\cos x + \sin x + 1}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-u^2}{u^2+1} + \frac{2u}{u^2+1} + \frac{u^2+1}{u^2+1}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du =$   $u = tg\frac{x}{2}$

$= \int \frac{u^2+1}{1-u^2+2u+u^2+1} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{2}{2u+2}\,du = \int \frac{1}{u+1}\,du = \ln|u+1| =$

$= \ln\left|tg\frac{x}{2} + 1\right| + C$

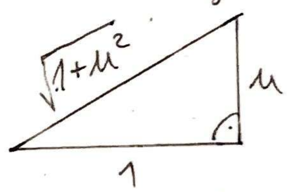
## → Substituce pro integrál se sin²x a cos²x

- pokud nemůžu substituovat za sin x nebo cos x - tedy to nejde
- obecně pokud platí $R(\sin x; \cos x) = R(-\sin x; -\cos x)$

→ např: $\int \frac{1}{2\sin^3(x)\cos x - 8}\,dx = \int \frac{1}{2(-\sin x)^3(-\cos x) - 8}\,dx = \int \frac{1}{2\sin^3 x \cos x - 8}\,dx$

⇒ $u = tg\,x$ ⇒ najdu: dx, sin x, cos x → parciální zlomky

$x = arctg\,u$ | $tg\,x = \frac{u}{1}$ ⇒




$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

$dx = \frac{1}{1+u^2}\,du$

$\Rightarrow \sin(x) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

• $\int \frac{1}{2\sin^2 x - 8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{u^2}{1+u^2} - \frac{4(1+u^2)}{1+u^2}} \cdot \frac{1}{1+u^2}\,du =$   $| u = tg\,x$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2 - 4 - 4u^2}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{3u^2+4}\,du = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2 + \frac{4}{3}}\,du = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}\,du =$

$= -\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) = -\frac{\sqrt{3}}{12}\,arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,tg\,x\right) + C$

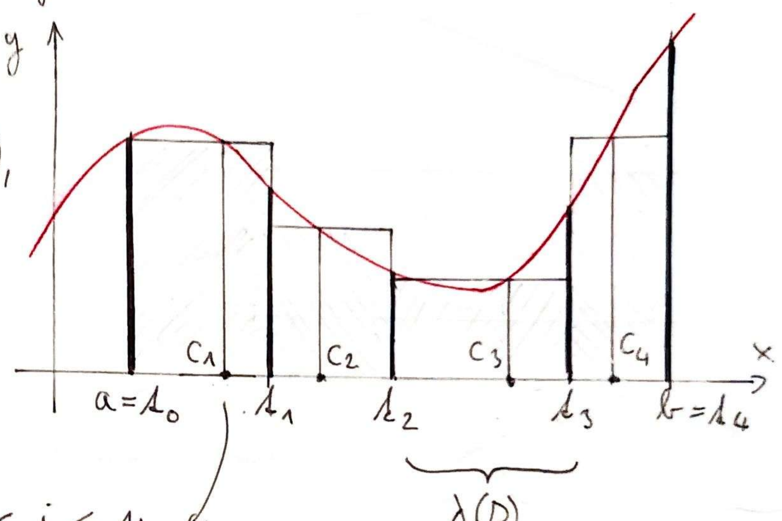
# → Určitý integrál

• <u>Riemannův integrál</u>

→ chci najít obsah pod křivkou funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a;b\rangle$
→ funkce na tom intervalu musí být spojitá a omezená

• <u>Dělení intervalu $\langle a;b\rangle$</u> – definice

→ interval $\langle a;b\rangle$ rozdělím na $n$ menších intervalů




⇒ D je $(n+1)$-tice $(t_0, t_1, \dots t_n)$, taková, že:

$$a < t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

⇒ C je $n$-tice $(c_1, c_2, \dots c_n)$, taková, že:

$$t_{i-1} \leq c_i \leq t_i \quad \text{pro } 1 \leq i \leq n$$

⇒ $D = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$
⇒ $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$

• <u>Riemanova suma</u> – definice

$$\Rightarrow R(f, D, C) = \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$ = součet obsahů těch obdélníčků

• <u>Norma dělení $\lambda$</u> – definice

→ $\lambda(D)$ = délka nejdelšího intervalu v dělení D

• <u>Riemannův integrál</u> – definice

$$\Rightarrow I = \lim_{\lambda(D)\to 0} R(f, D, C) = \lim_{\lambda(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

→ hledám takové dělení, kde pro $n \to \infty$ jde $\lambda(D) \to 0$
⇒ obdélníčky jsou nekonečně tenké ⇒ <u>I = obsah pod křivkou $f(x)$ na intervalu $\langle a;b\rangle$</u>

• <u>Newtonův integrál</u>

⇒ <u>klasický integrál říká:</u> $\int f(x)\,dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)$

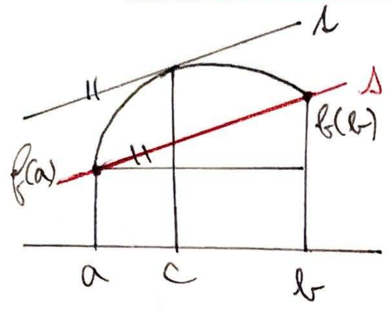
⇒ <u>Newtonův integrál:</u> $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \iff F'(x) = f(x)$

→ neříká nám nic o obsahu pod křivkou (zatím)

## • Lagrangeova věta

→ pokud je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$ a má v každém bodě na $(a; b)$ derivaci, pak existuje bod

$c \in (a; b)$ takový, že platí $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

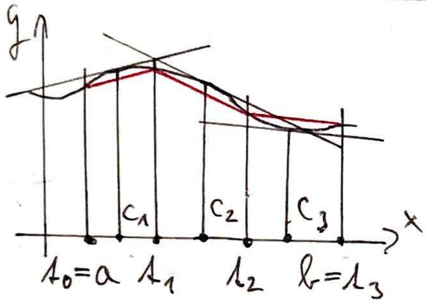



směrnice $t = f'(c)$

směrnice $s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$

## • Newton-Leibnizova formule - důkaz




→ když si interval $\langle a; b\rangle$ rozdělím podle dělení $D$, tak Lagrangeova věta platí ve všech intervalech dělení $D$

$\Rightarrow$ existuje množina bodů $C = (c_1, c_2, \dots c_n)$, které splňují $f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) = f(t_i) - f(t_{i-1})$

$\Rightarrow$ do tohoto vztahu dosadím primitivní funkci k funkci pro kterou chci spočítat obsah pod její křivkou

$\Rightarrow$ na intervalu $\langle t_{i-1}; t_i\rangle$ platí: $F'(c_i)(t_i - t_{i-1}) = F(t_i) - F(t_{i-1})$

$\Rightarrow$ pro celý interval $\langle a; b\rangle$ tedy platí: → $F'(x) = f(x)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(F(t_i) - F(t_{i-1})\right) =$$

$$= [F(t_1) - F(t_0)] + [F(t_2) - F(t_1)] + \dots + [F(t_{n-1}) - F(t_{n-2})] + [F(t_n) - F(t_{n-1})] =$$

$\boxed{\begin{matrix} a = t_0 \\ b = t_n \end{matrix}}$ → $= -F(t_0) + F(t_n) = F(b) - F(a)$

$\Rightarrow$ najdu takové dělení $D$ pro $n \to \infty$, že $\lambda(D) \to 0$ :

obsah pod křivkou $= I = \lim\limits_{\lambda(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) = F(b) - F(a)$

$\Rightarrow$ Newtonův integrál = obsah pod křivkou $f(x)$ na intervalu $\langle a; b\rangle$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$