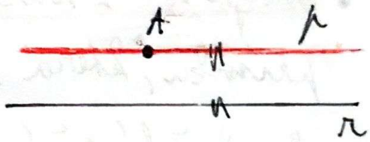
STEREOMETRIE

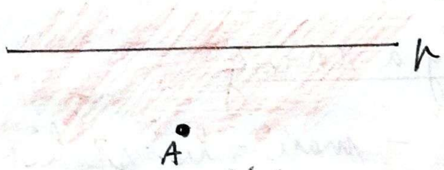
- → prostorová geometrie
  - → polohové vztahy v prostoru a řezy těles
- → základní geometrické útvary v prostoru
  - bod – A, B, C …
  - přímka – a, b, c …
  - rovina – α, β, γ …
  - → určení přímky
    - 2 různými body →

    - 1 bodem a rovnoběžkou →

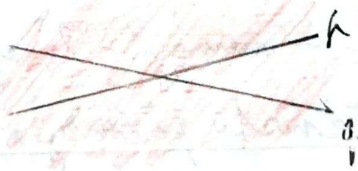


  - → určení roviny
    - 3 různými body, které neleží na stejné přímce

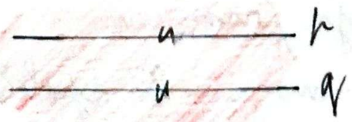
    - přímkou a bodem, který na ní neleží



    - dvěma různoběžnými přímkami



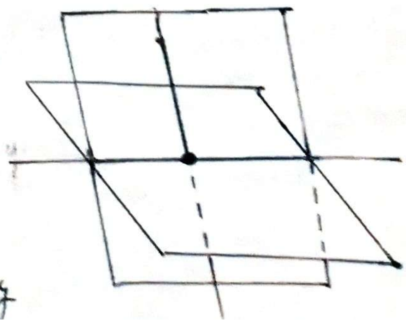
    - dvěma rovnoběžnými přímkami



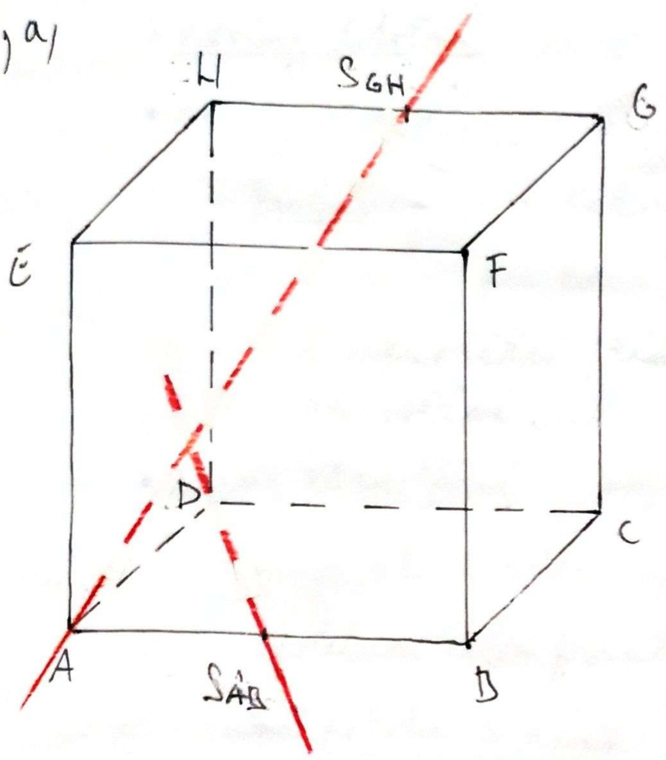
- základní věty stereometrie
  - jestliže přímka p leží v rovině β, tak bod A ležící na p také leží v β
  - jestliže v rovině β leží 2 různé body A, B, tak v ní leží i přímka p, která těmito body prochází
  - každými 2 různými body prochází 1 přímka
  - libovolná rovina rozděluje prostor na 2 navzájem opačné poloprostory a je jejich hraniční rovinou
  - přímkou a bodem, který na ní neleží prochází 1 rovina
  - mají-li 2 různé roviny společný bod, pak mají společnou přímku, která tímto bodem prochází
  - ke každé přímce lze daným bodem vést právě 1 rovnoběžku

- vzájemná poloha přímek
  - totožné
  - rovnoběžné } leží v 1 rovině
  - různoběžné
  - mimoběžné → neleží v 1 rovině

- vzájemná poloha přímky a roviny
  - leží v dané rovině – mají-li společné alespoň 2 body
    ⇒ mají společné všechny
  - rovnoběžná s rovinou – nemají-li společný ani 1 bod
    - kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny
      - přímka je s rovinou rovnoběžná pokud je rovnoběžná alespoň s 1 její přímkou
  - různoběžná s rovinou – mají-li společný 1 bod = průsečík
    - průnik přímky s rovinou
      1) přímkou se proloží pomocná rovina
      2) sestrojí se průnik rovin
      3) průnik těchto přímek
         → průsečík původní přímky a roviny

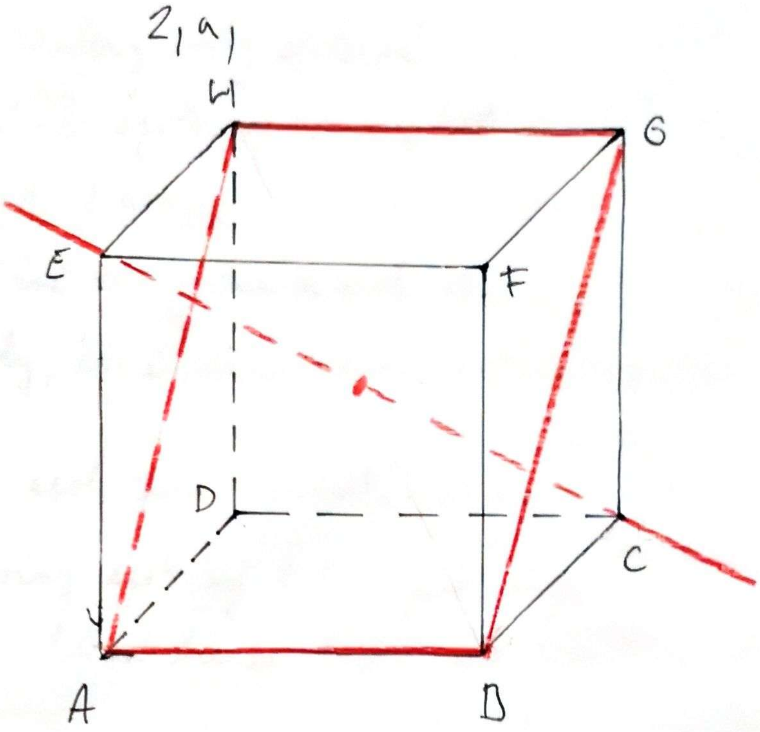


1, a,



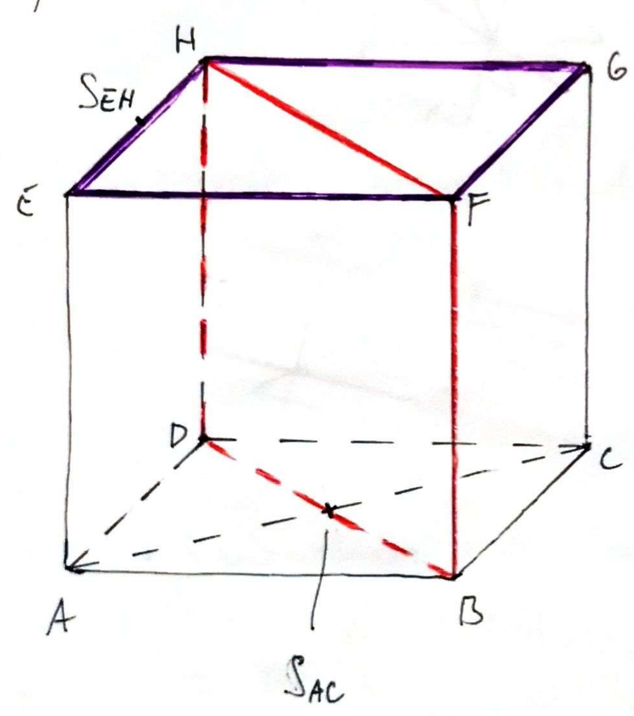
→ mimoběžky

2, a,



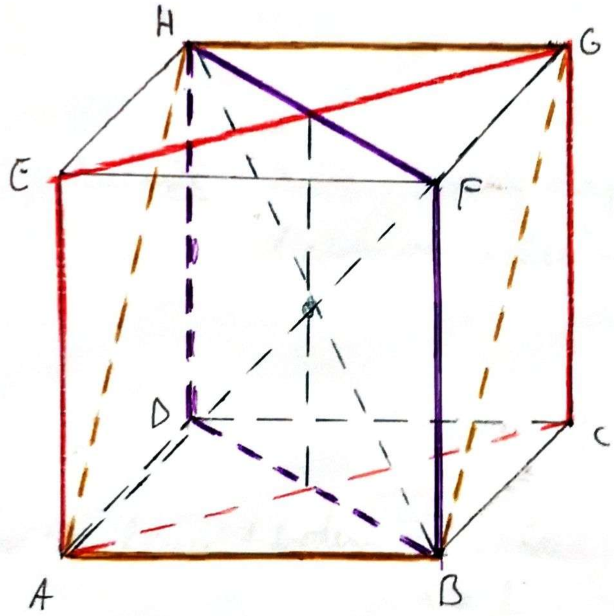
→ přímka a rovina jsou různoběžné

3, a,



→ různoběžné roviny

4, a,



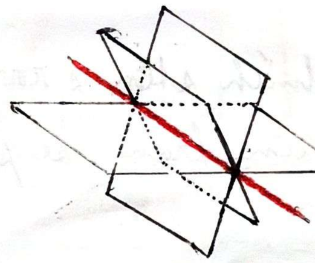
→ všechny 3 roviny jsou různoběžné
→ tři průsečnice procházejí 1 bodem
→ v tom bodu průnik rovin

→ vzájemná poloha 2 rovin

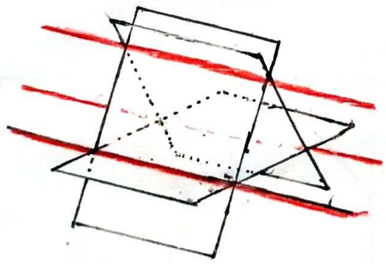
- roviny totožné – mají všechny body společné
- roviny rovnoběžné – nemají-li společný žádný bod
  - → kritérium rovnoběžnosti 2 rovin
    - 2 roviny jsou rovnoběžné <=> jedna z nich obsahuje 2 různoběžné přímky, které jsou s druhou rovinou rovnoběžné
- roviny různoběžné – mají společnou 1 přímku = průsečnici
  - mají-li 2 různé roviny společný 1 bod, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází

→ vzájemná poloha 3 rovin

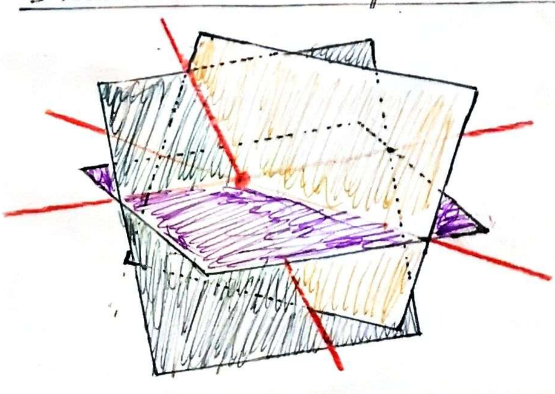
- 3 rovnoběžné roviny – žádné společné body
- 2 rovnoběžné a 3. k nim různoběžná – 2 rovnoběžné průsečnice
- 3 různoběžné + 3 průsečnice splynou v 1 přímku – 1 společná přímka



- 3 různoběžné + 3 rovnoběžné průsečnice – každé 2 roviny mají 1 společnou průsečnici



- 3 různoběžné + 3 průsečnice prochází 1 bodem – 1 průsečík všech 3 rovin



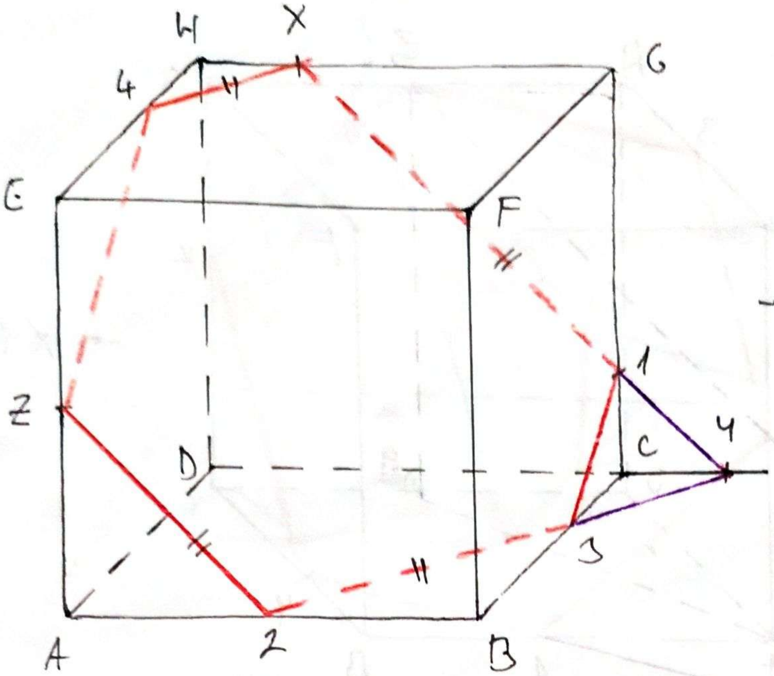
→ mají-li 2 průsečnice společný bod, potom tímto bodem prochází i 3. průsečnice

→ řezy mnohostěnů

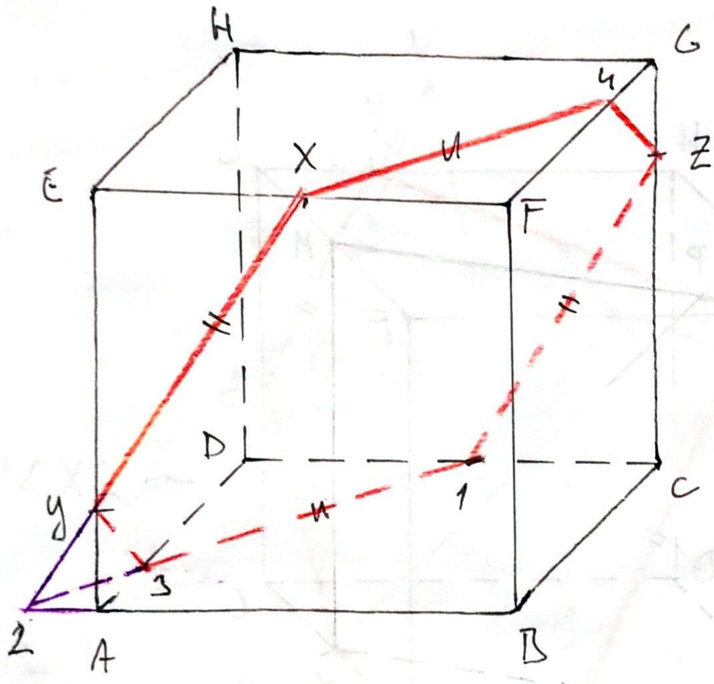
- leží-li 2 různé body v rovině, pak přímka jimi určená tam leží také
- 2 rovnoběžné roviny protíná 3. rovina ve 2 rovnoběžkách
- jsou-li každé 2 ze 3 rovin různoběžné a mají-li tyto 3 roviny jediný společný bod, pak tímto bodem prochází všechny 3 průsečnice

→ důsledky pro řezy těles

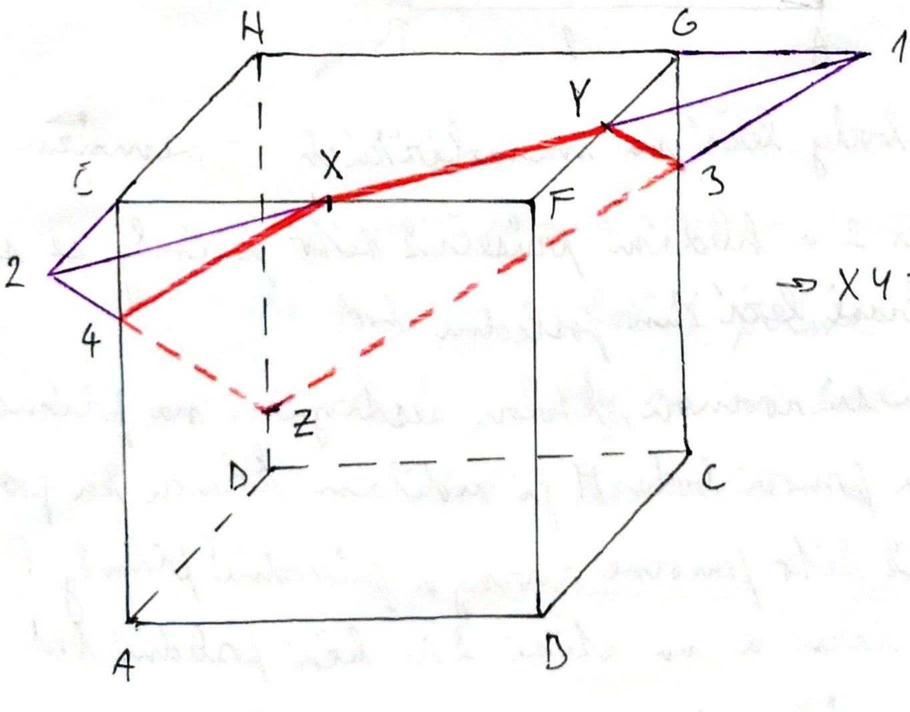
- leží-li v rovině některé stěny 2 různé body z roviny řezu pak v rovině této stěny leží i jejich spojnice
  → průnik spojnice a stěny je stranou řezu
- jsou-li roviny 2 stěn rovnoběžné a různoběžné s rovinou řezu, pak jsou průsečnice roviny řezu s rovinami těchto stěn rovnoběžné
- průsečnice rovin 2 sousedních stěn s rovinou řezu a přímka v níž leží společná hrana se protínají v 1 bodě



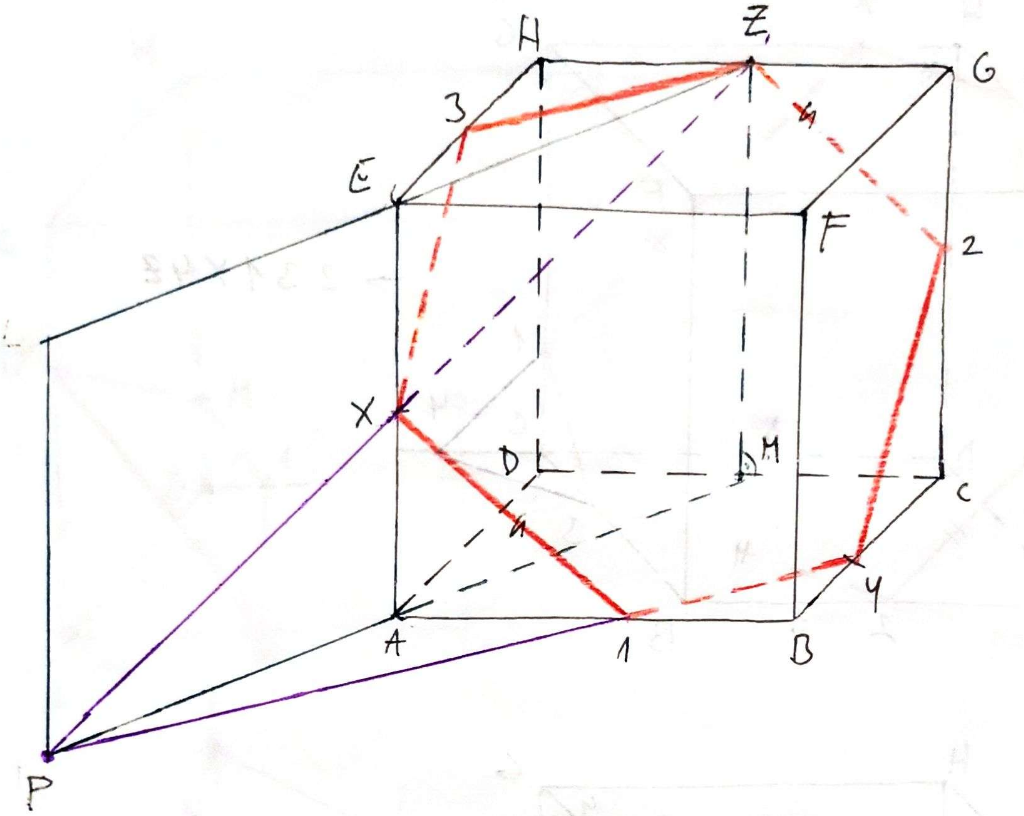
→ 2 3 1 X 4 Z



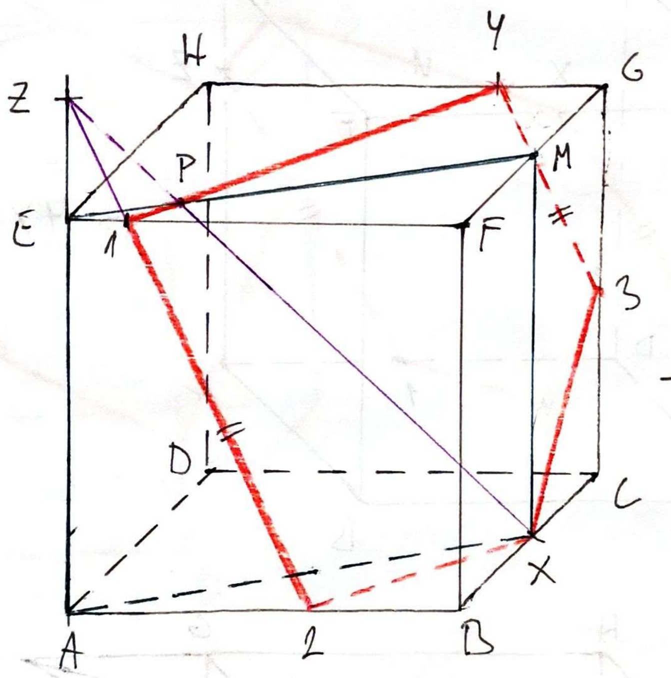
→ 4 X 4 Z 1 3



→ X 4 3 Z 4



→ X1Y2Z3



→ 2X3Y1

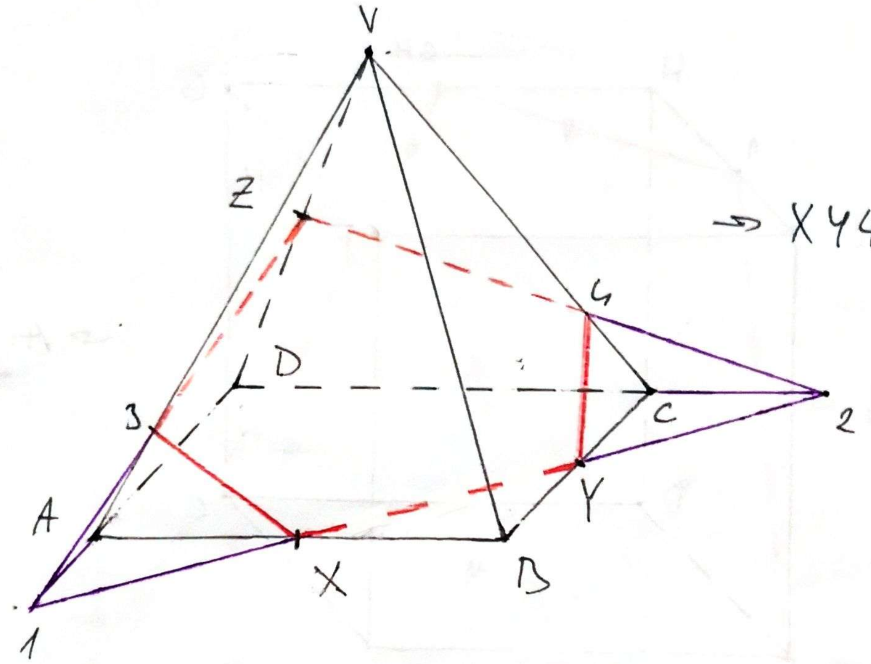
→ všechny body leží na mimoběžkách ⇒ nemůžu nic spojit

→ spojím 2 a hledám průsečík této přímky se stěnou na jejíž hraně leží ten poslední bod

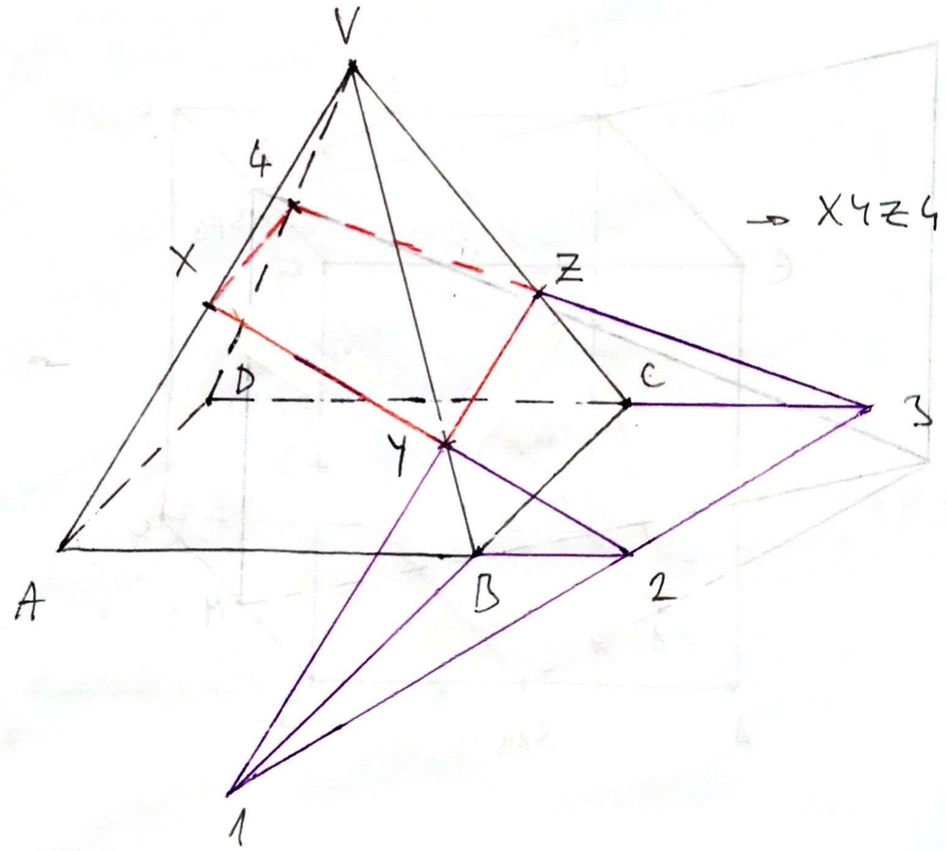
→ pomůžu si rovinou, kterou sestrojím na přímce těch spojených bodů a pomocí bodu M jí udělám kolmou ke podstavě

→ průsečík této pomocné roviny a původní přímky P leží v rovině řezu a na stěně kde leží poslední bod

⇒ můžu spojit



→ XY4Z3



→ XY4Z4

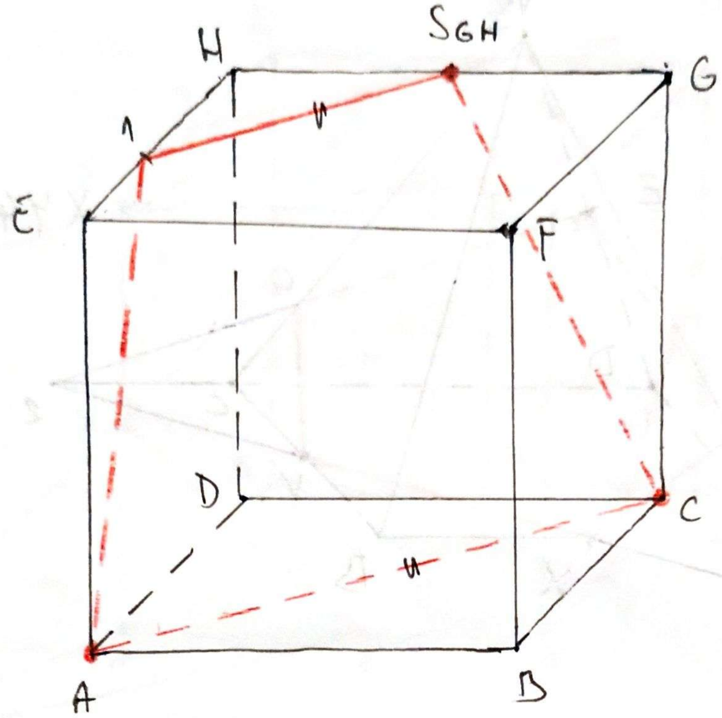
→ body 1 a 2 leží v rovině řezu

→ dá se jimi proložit přímka

→ všechny body na ní leží v rovině řezu

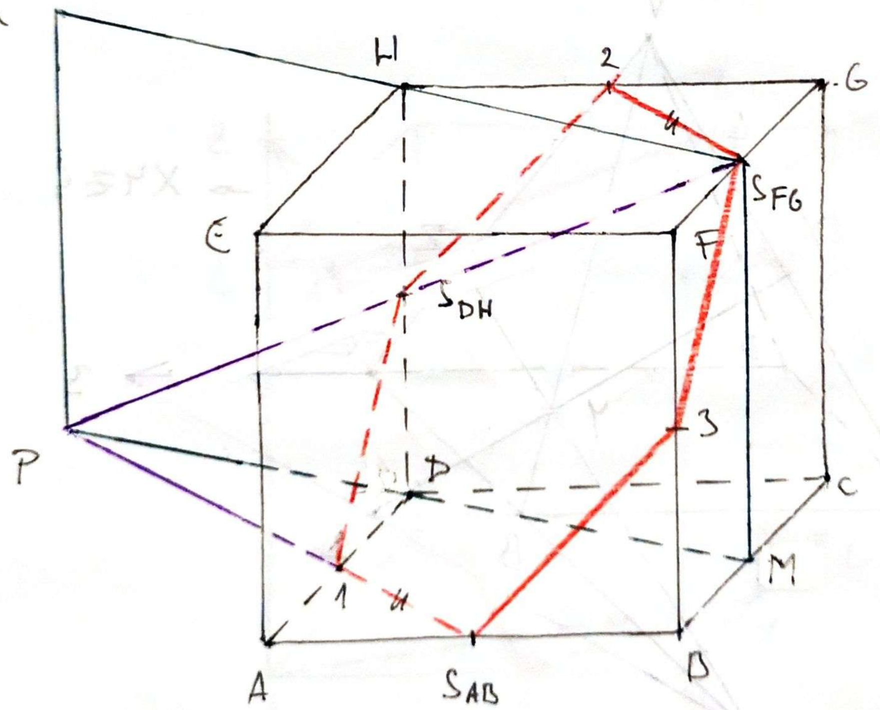
⇒ bod 3 leží v rovině řezu

90/6/a

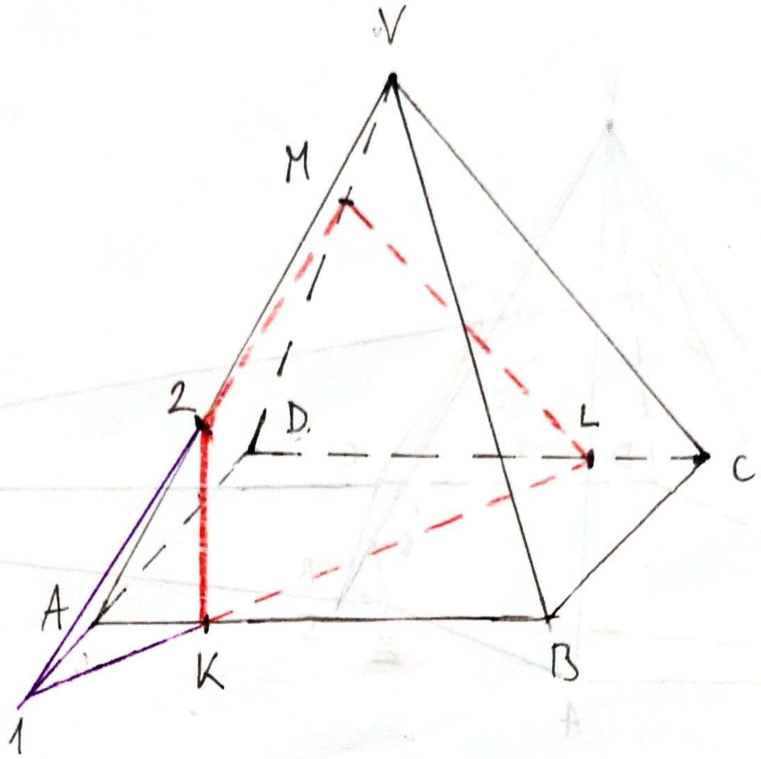


$\rightarrow A C S_{GH} 1$

91/7/a

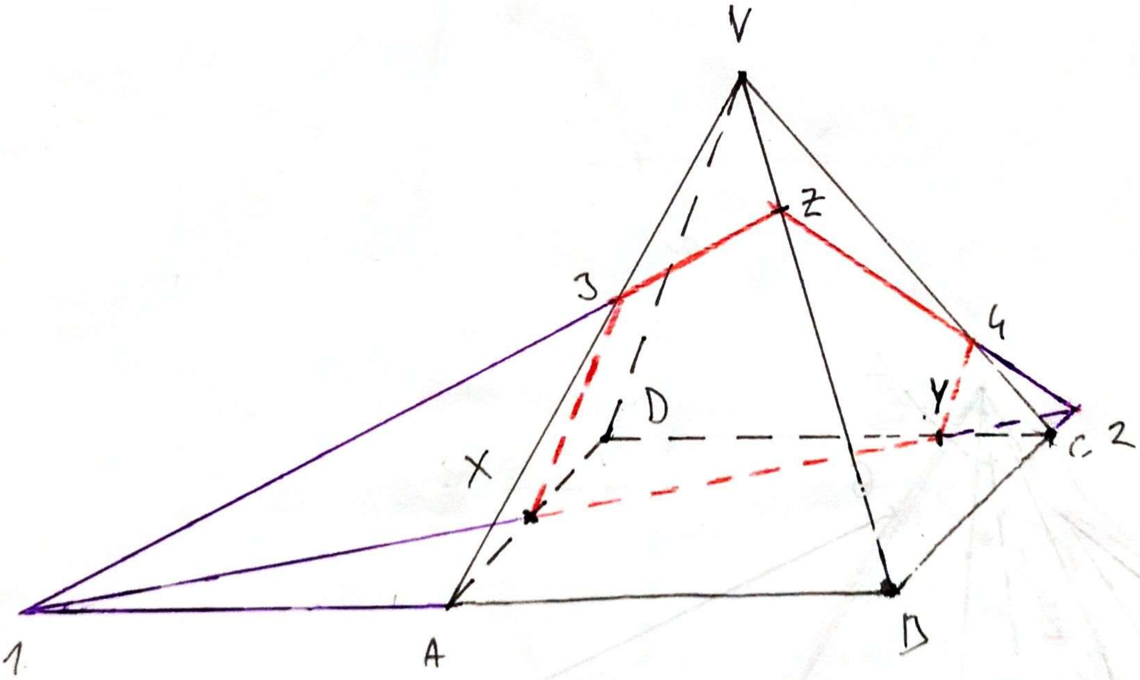


$\rightarrow 1 S_{AB} 3 S_{FG} 2 S_{DH}$

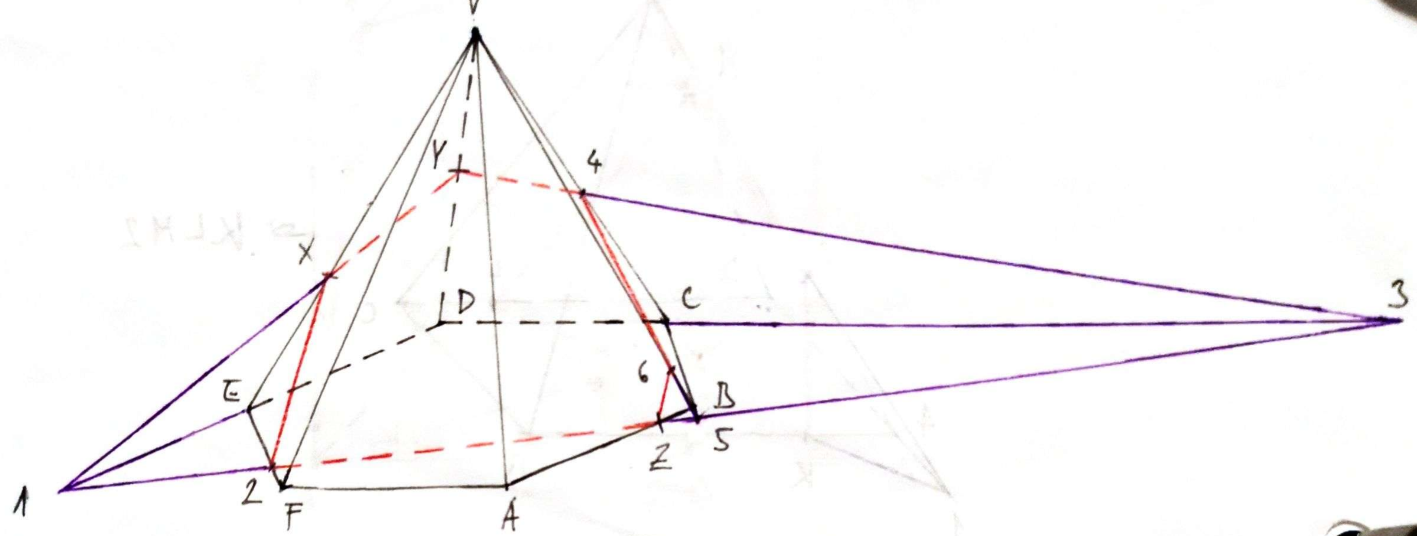


→ KLM2

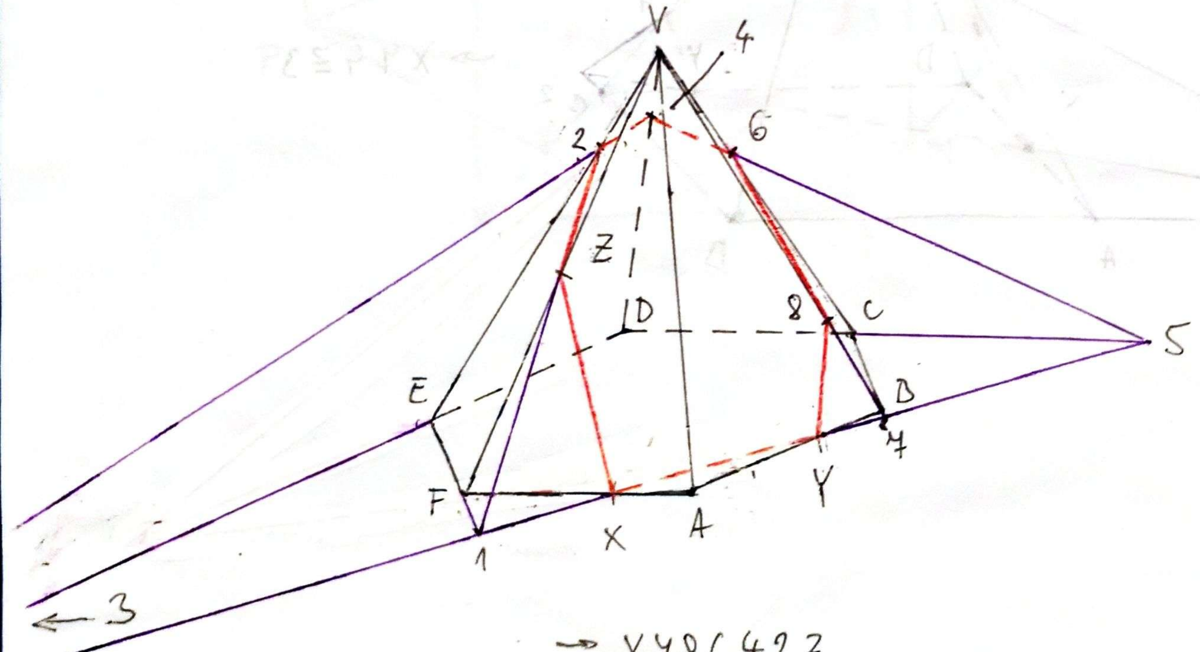
91/8/d



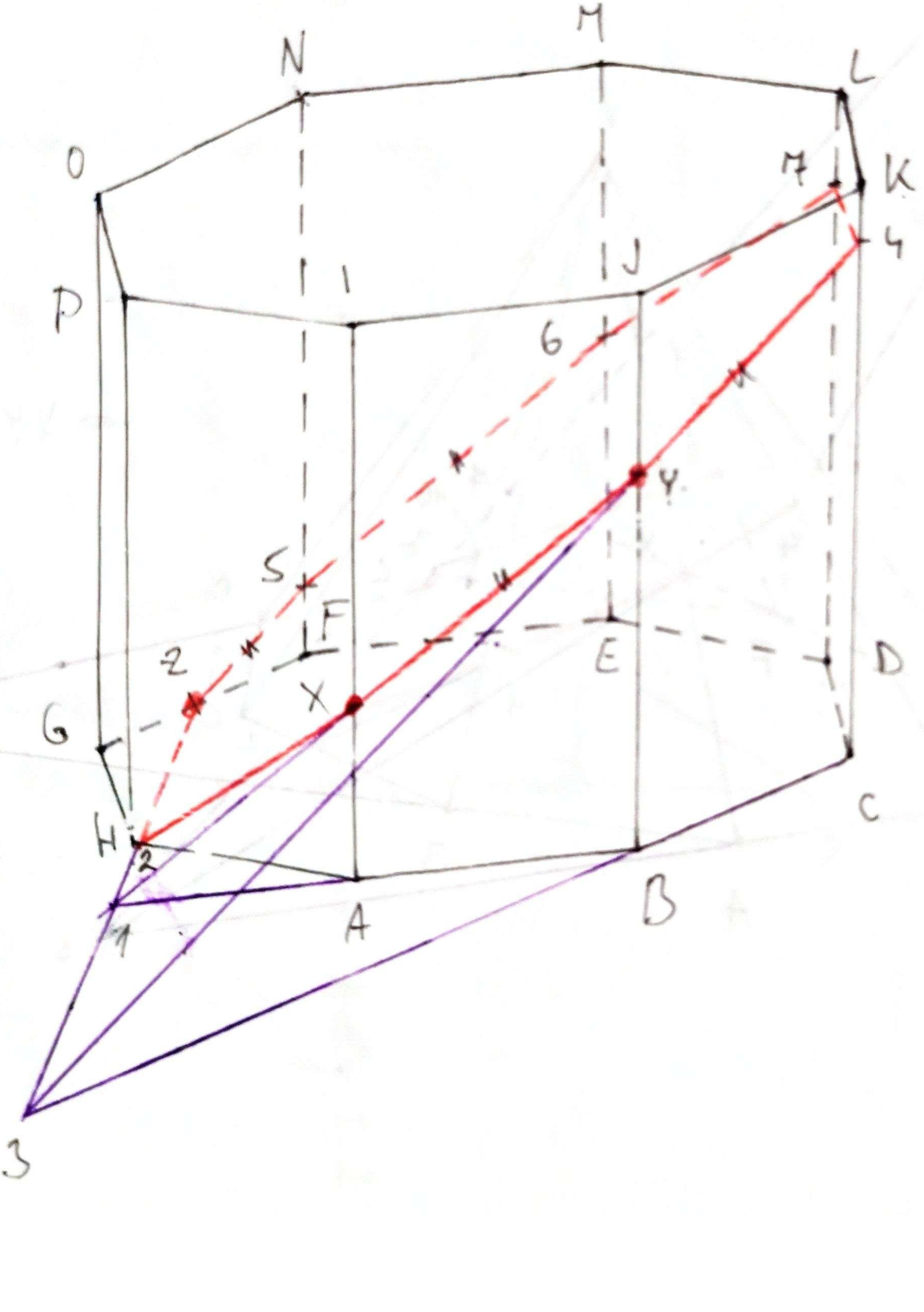
→ XY4Z3



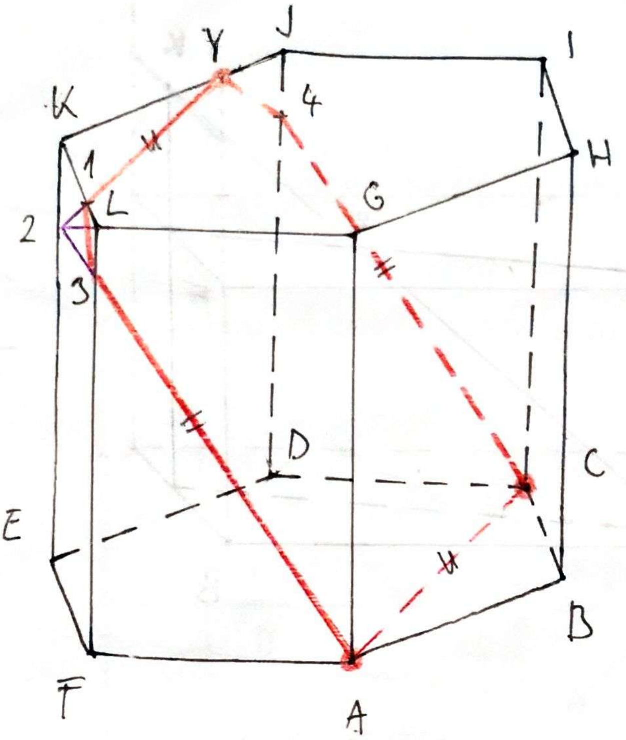
→ Z64YX2



→ XY86422

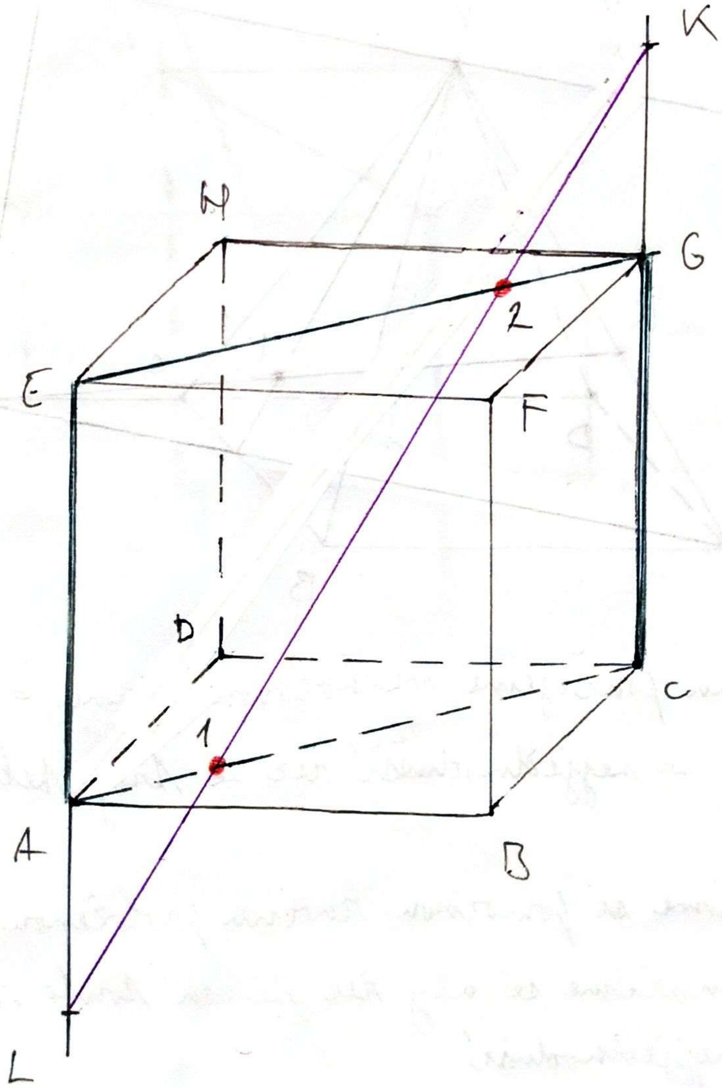


M
N
L
O
7
K
4
J
P
I
6
Y
S
F
Z
E
D
X
G
H
2
C
1
A
B
3



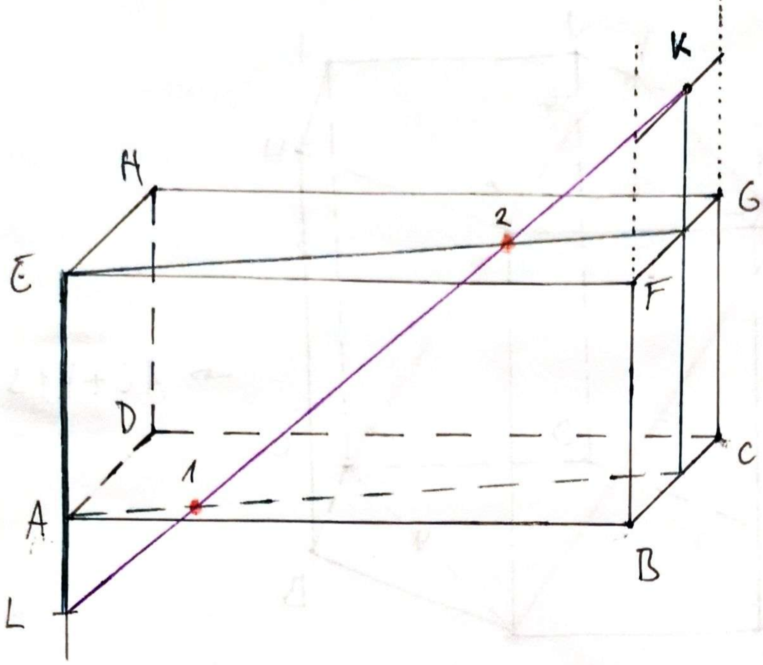
→ AC4Y13

→ průnik přímky s tělesem



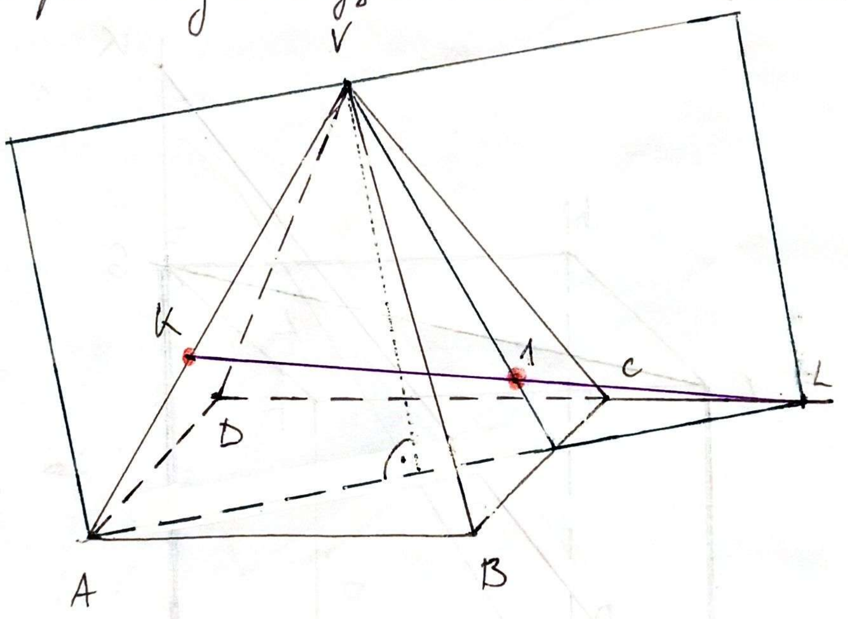
→ body 1, 2

→ opět využívám pomocnou rovinu



→ body 1, 2

→ u hranolu použijeme směrovou rovinu = rovinu kolmou k rovině podstavy → nejjednodušší řez → obdélník / čtverec



→ body K, 1

→ u jehlanu použijeme vrcholovou rovinu = rovinu procházející vrcholem → nejjednodušší řez → trojúhelník

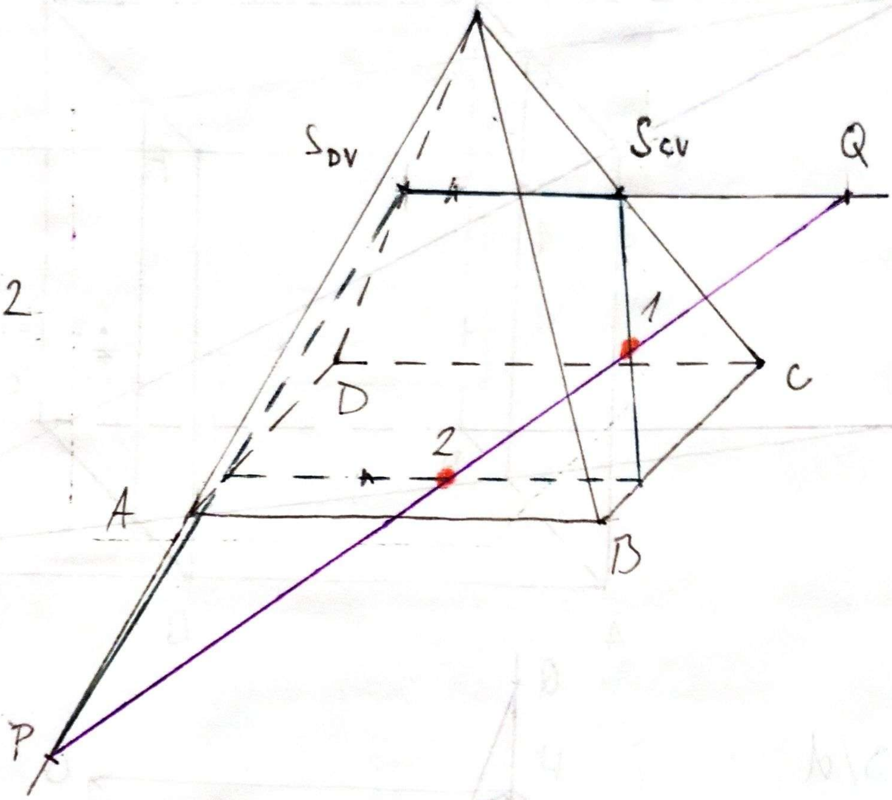
→ obecně: určíme si pomocnou rovinu proloženou přímkou

→ snažíme se aby řez tělesa touto rovinou byl co nejjednodušší

→ sestrojíme řez tělesa a této roviny

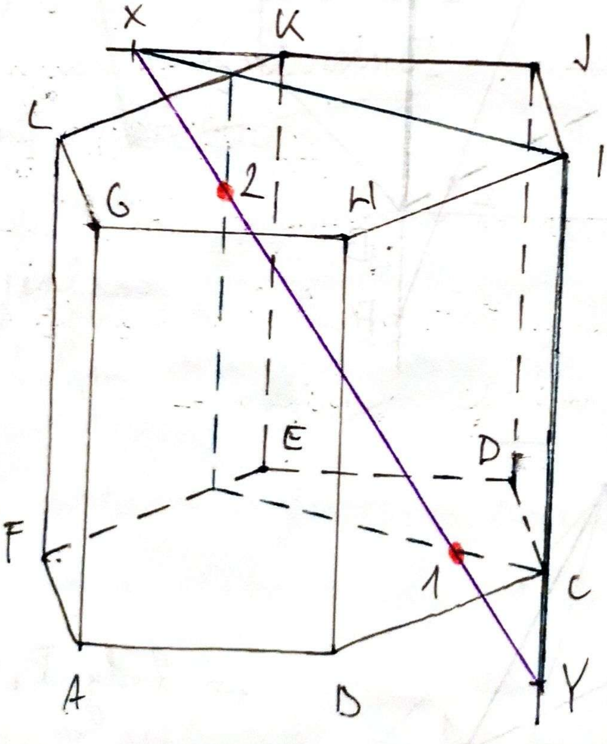
→ najdeme společné body řezu a přímky

⇒ tyto body = průnik tělesa a přímky



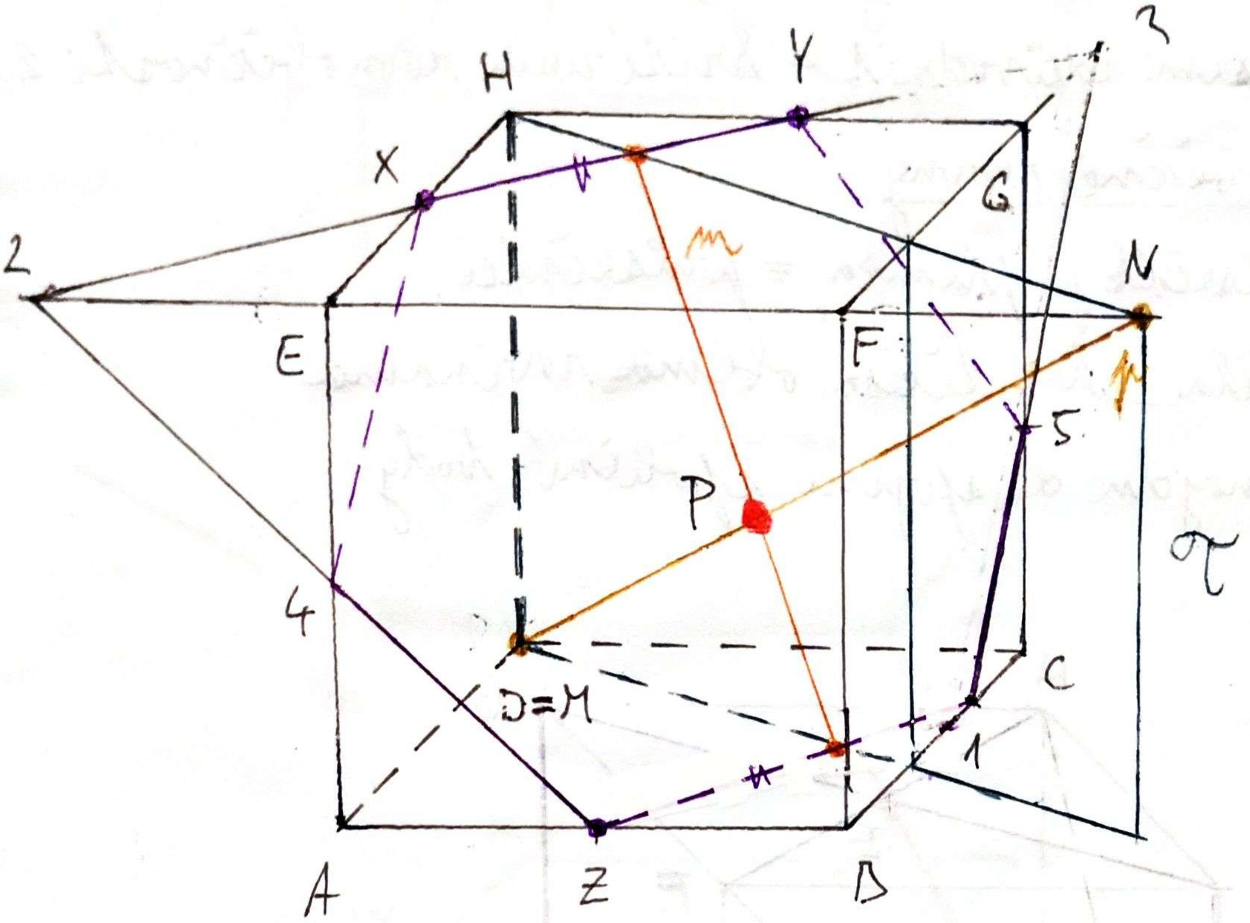
→ body 1,2

→ pomohl jsem si pomocnou rovinou $P\,S_{DV}\,Q$



→ body 1,2

→ průnik přímky s rovinou



$$\left.\begin{array}{l} p = \overleftrightarrow{MN} \\ \rho = \overleftrightarrow{XYZ} \end{array}\right\} p \cap \rho = ?$$

1, $\rho \cap$ krychle

2, τ; $p \subset \tau$

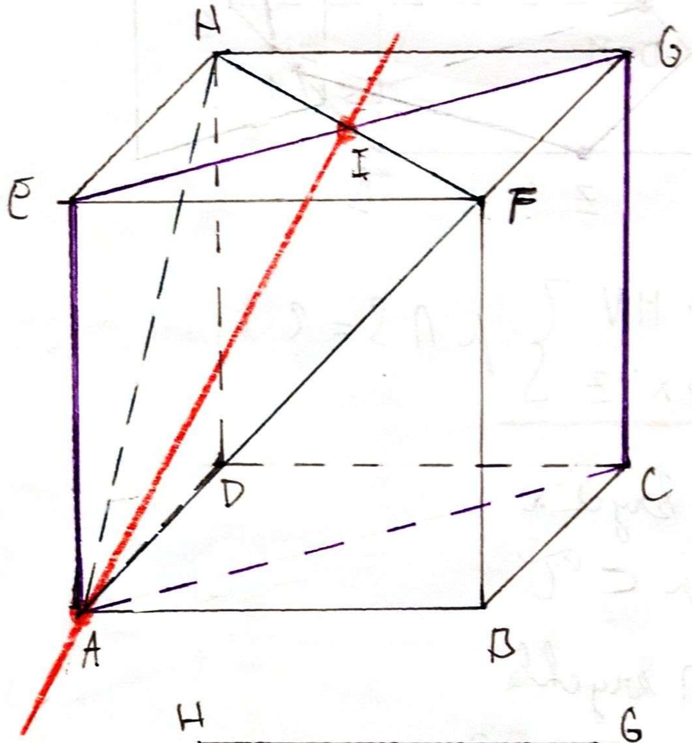
3, $\tau \cap$ krychle

4, $m = \tau \cap \rho$

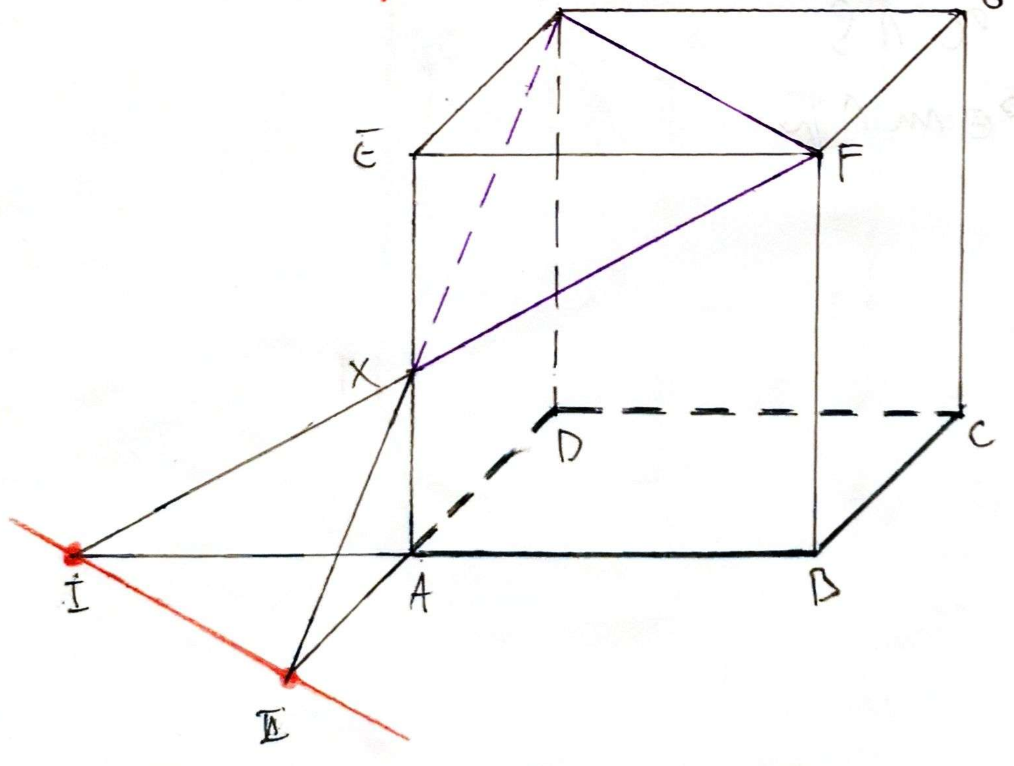
5, P; $P \in m \cap p$

→ průnik 2 rovin

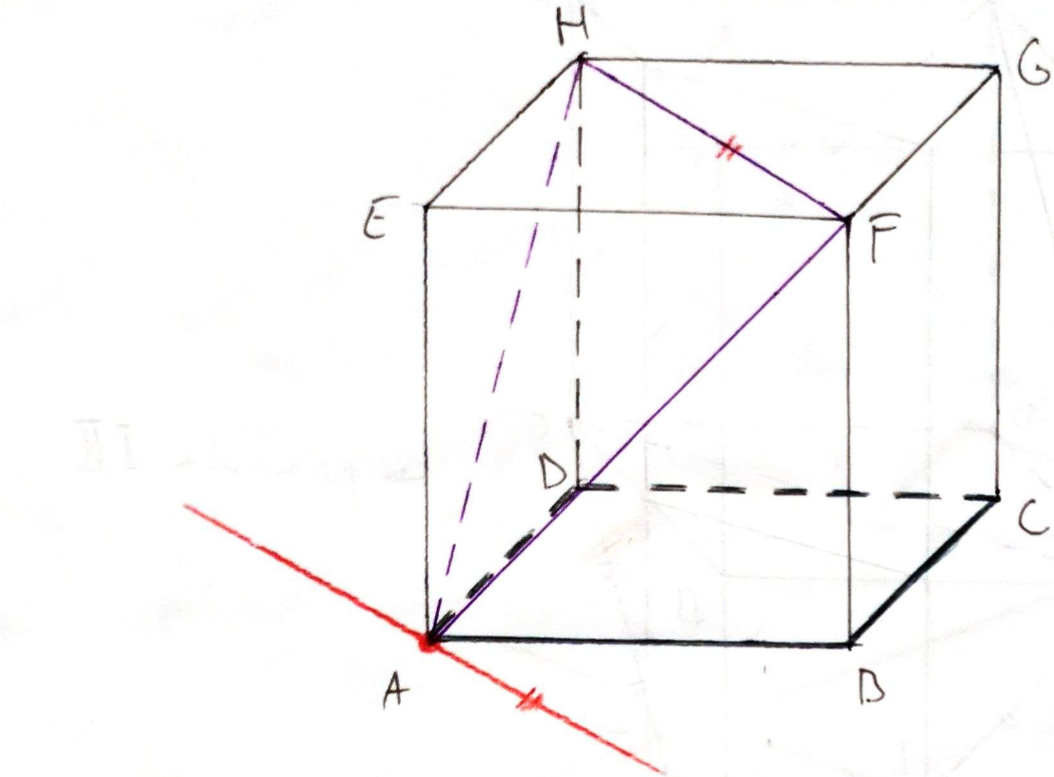
- rovnoběžné roviny
  - → musím zdůvodnit – kritérium rovnoběžnosti 2 rovin
- různoběžné roviny
  - → průsečík je přímka = průsečnice
  - → udělám řez tělesa oběma rovinama
    - → najdu a spojím společné body

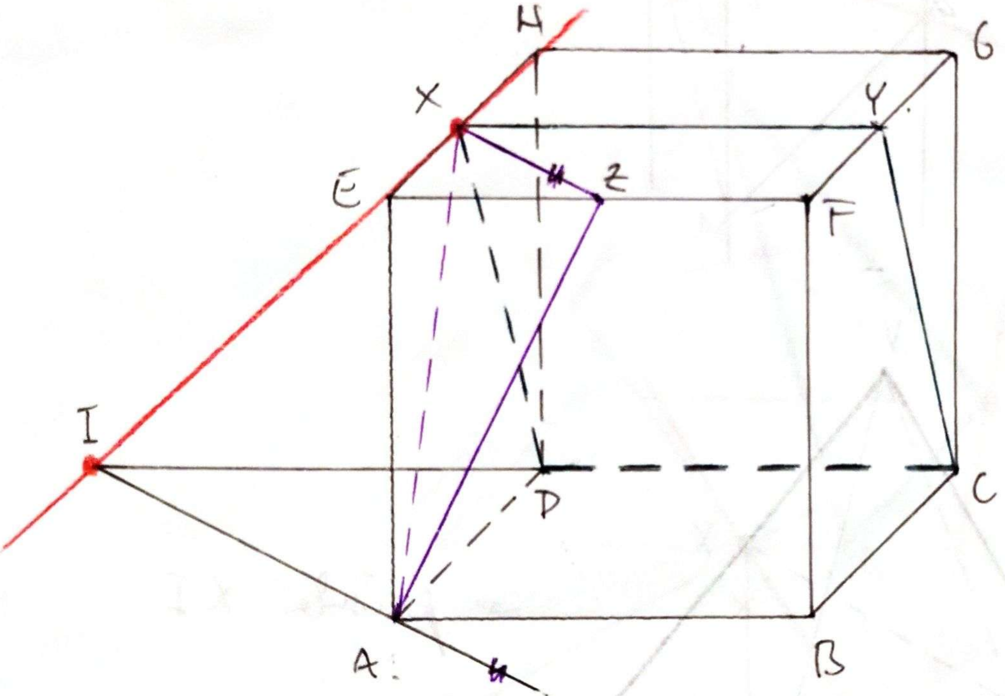


→ přímka AI

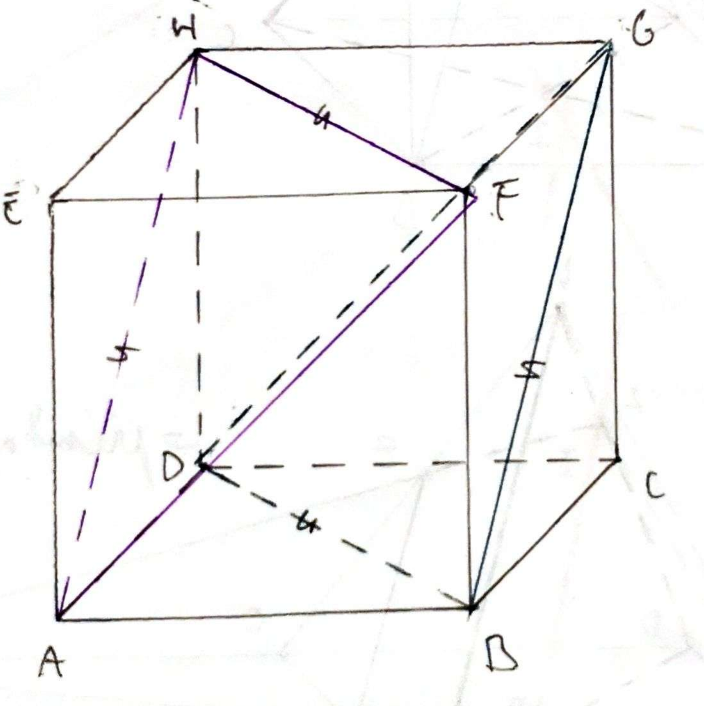


→ přímka I II



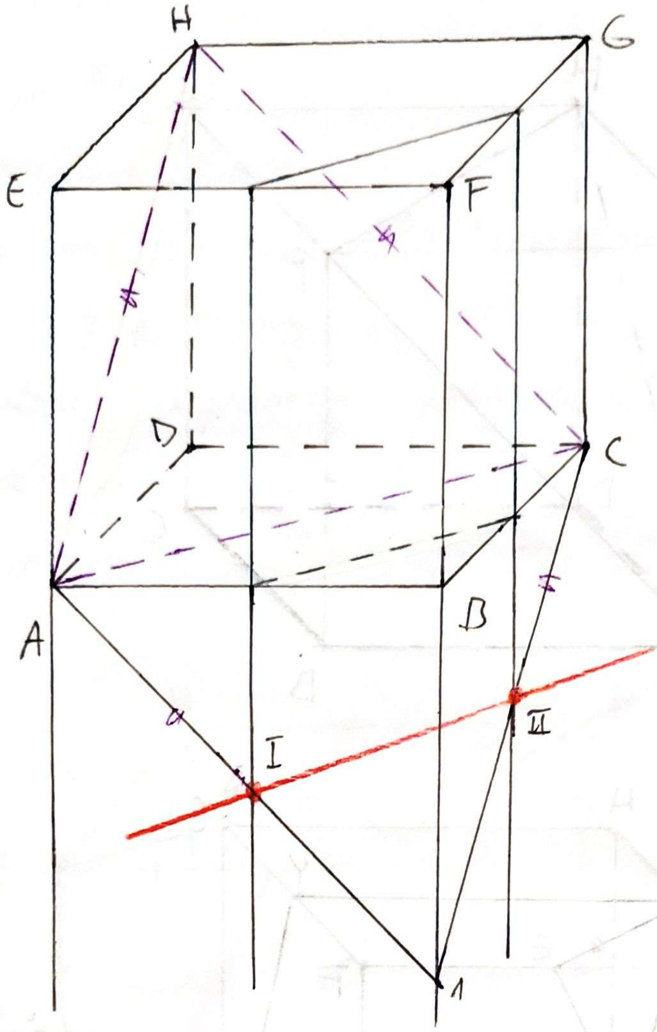


→ přímka XI

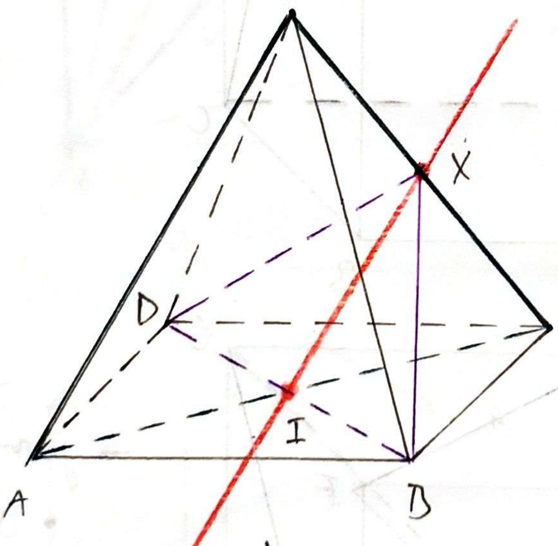


→ jsou rovnoběžné

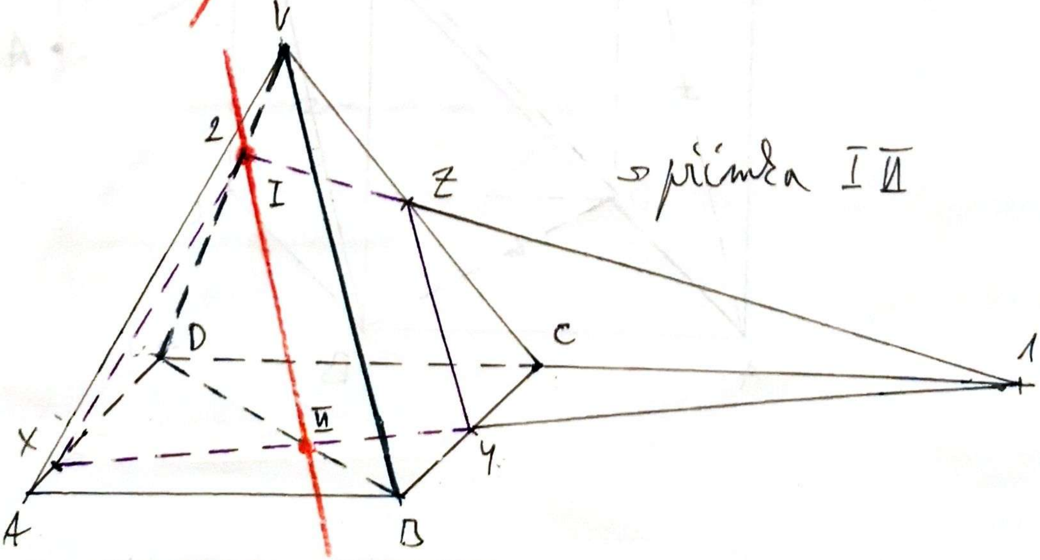
- BD ∥ FH
- AH ∥ BG



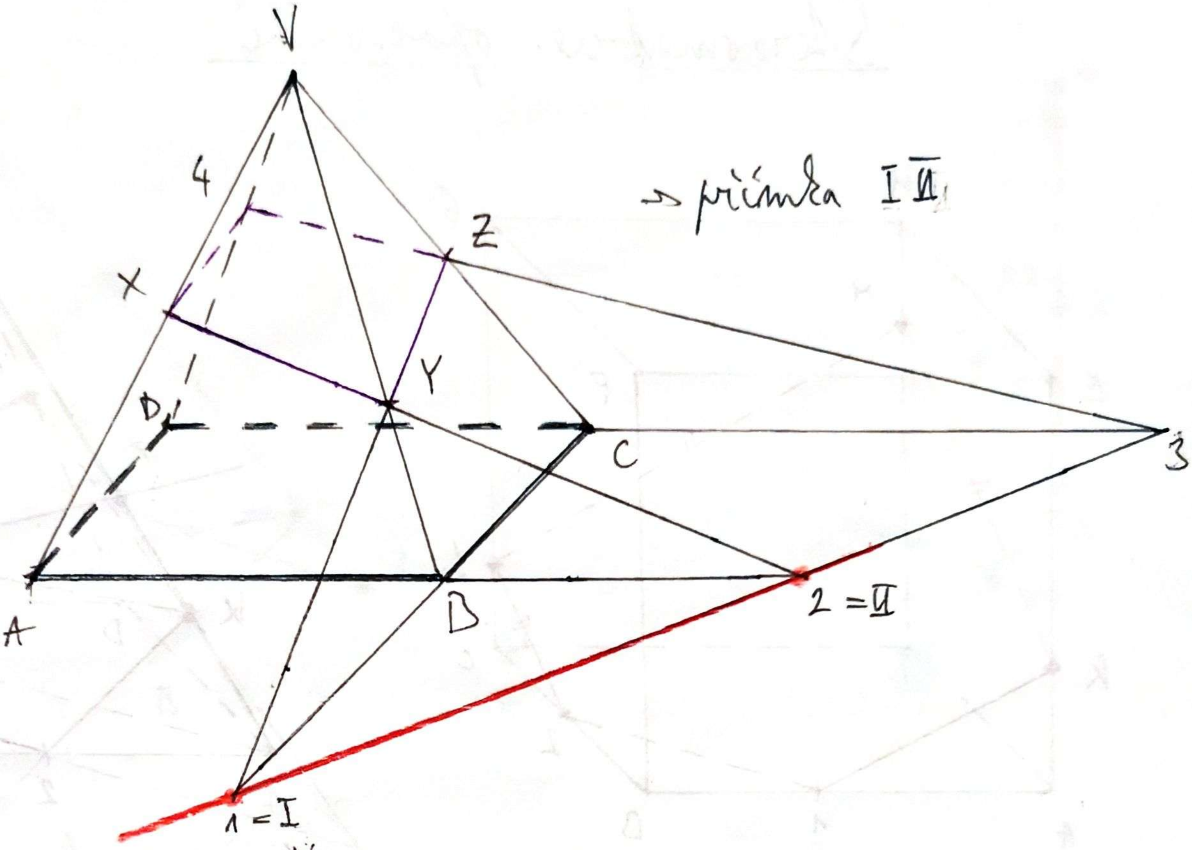
→ priamka I II



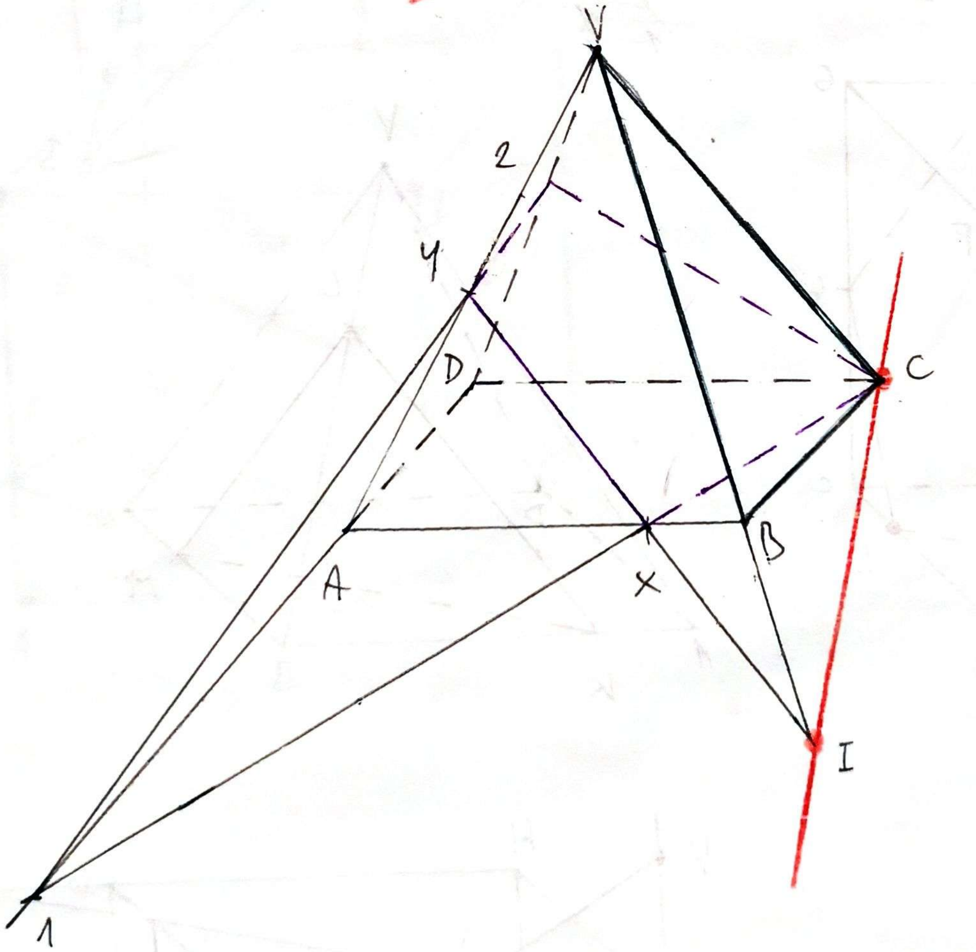
→ priamka X I



→ priamka I II

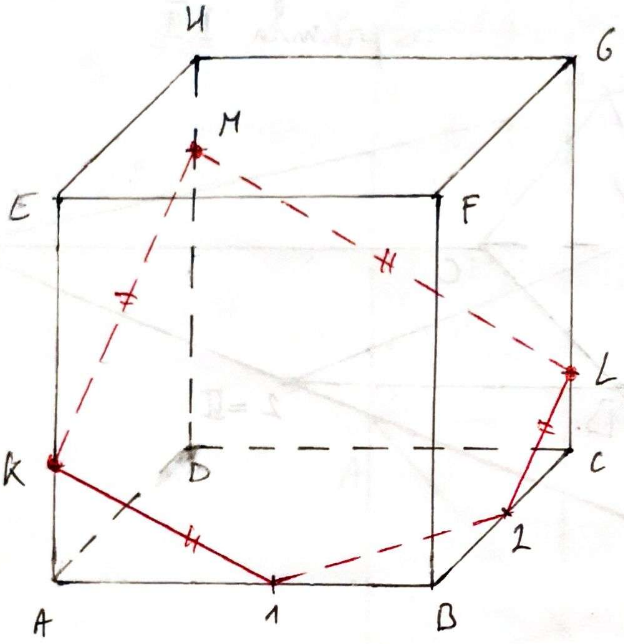


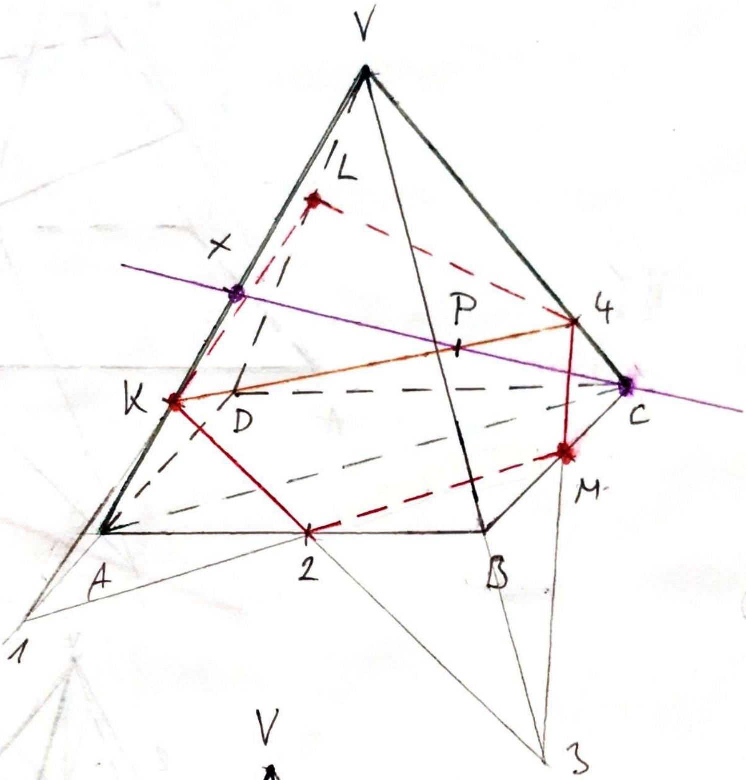
→ přímka I II

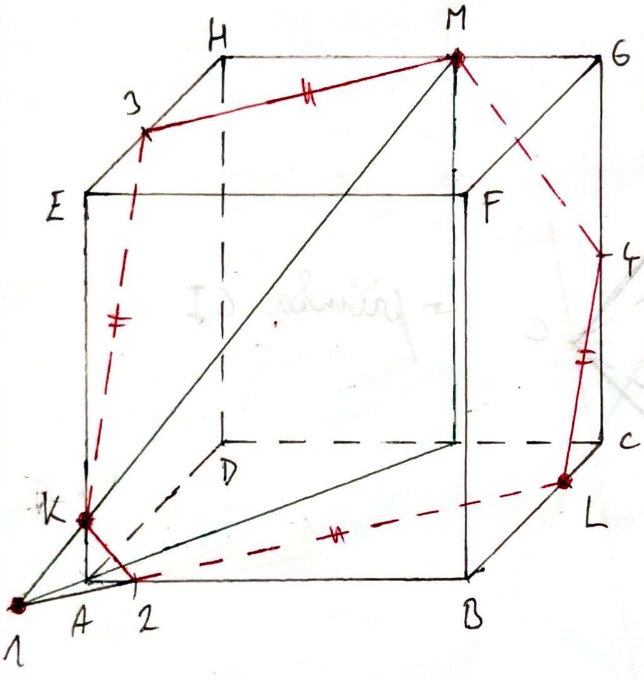


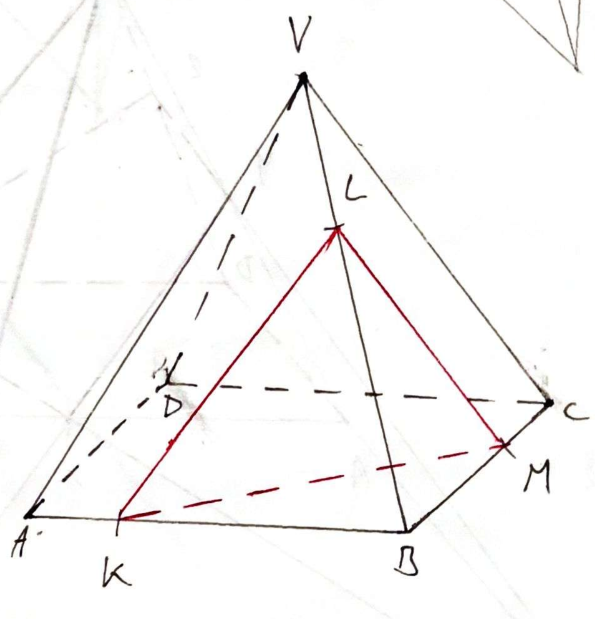
→ přímka CI

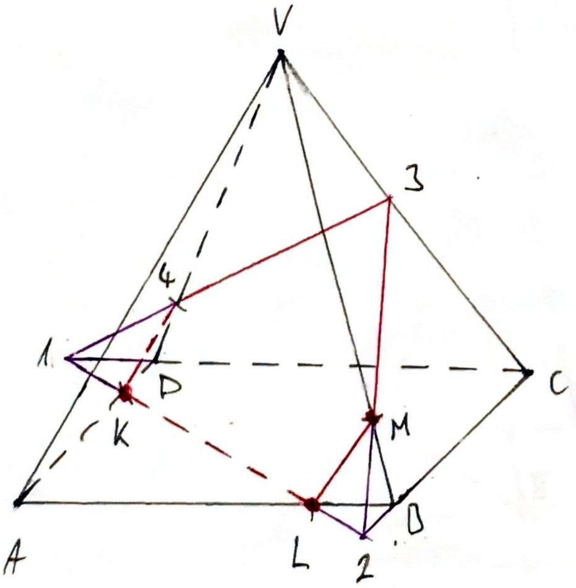
Stereometrie opakování

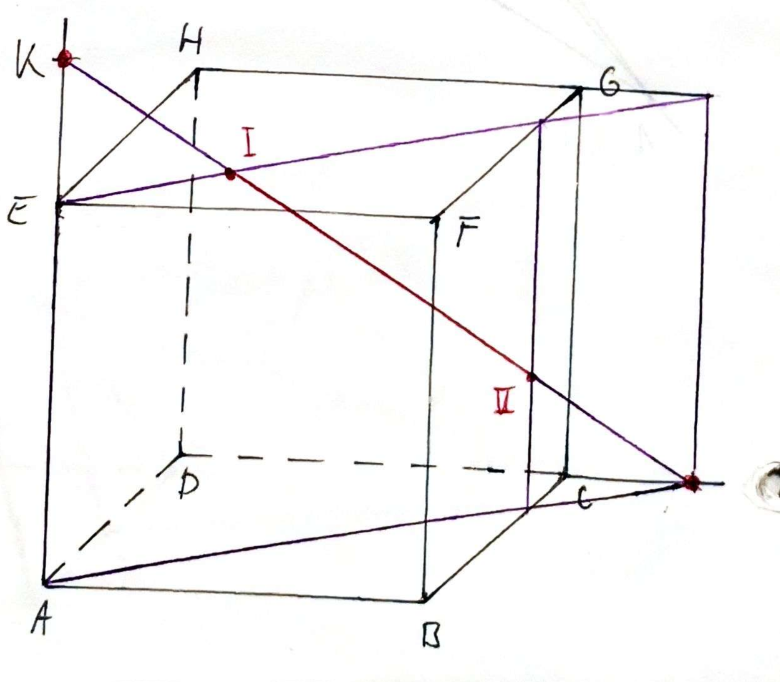


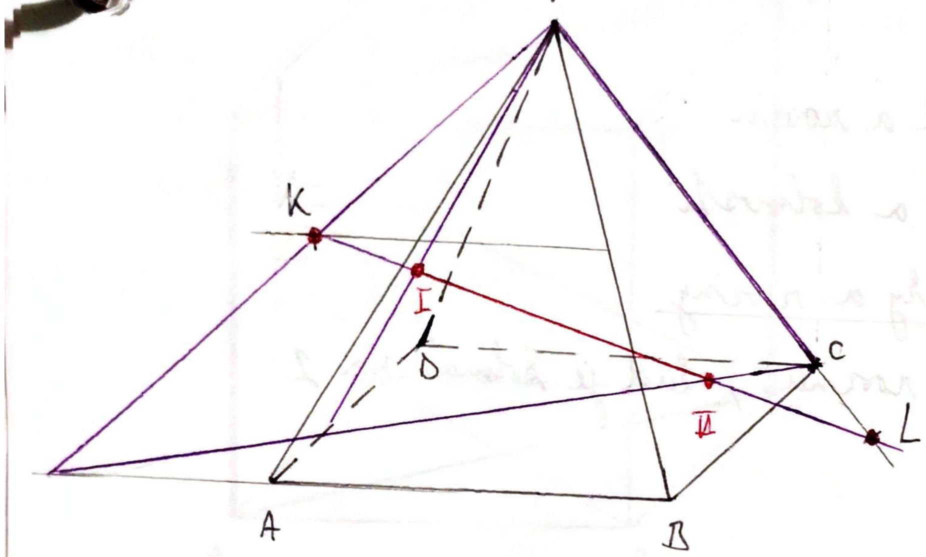


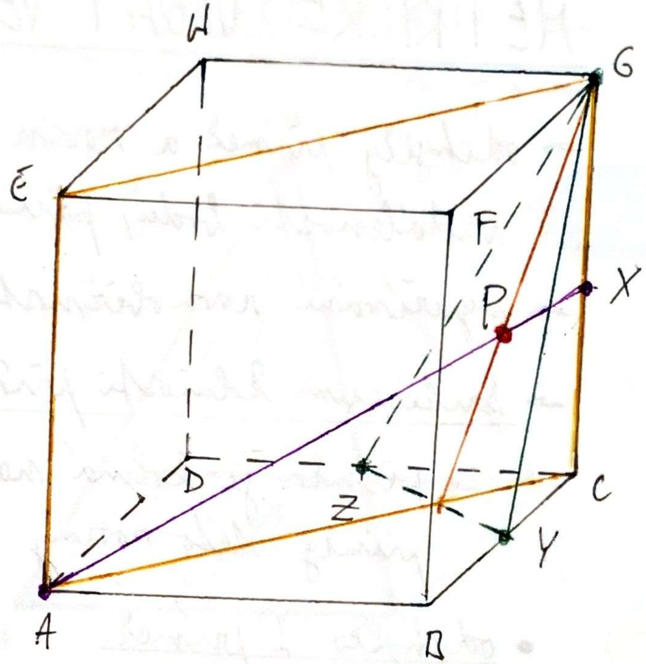


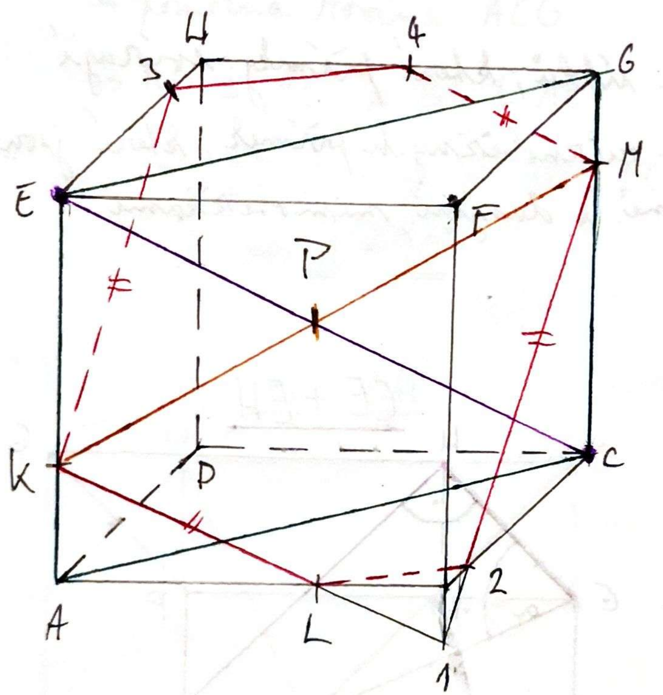


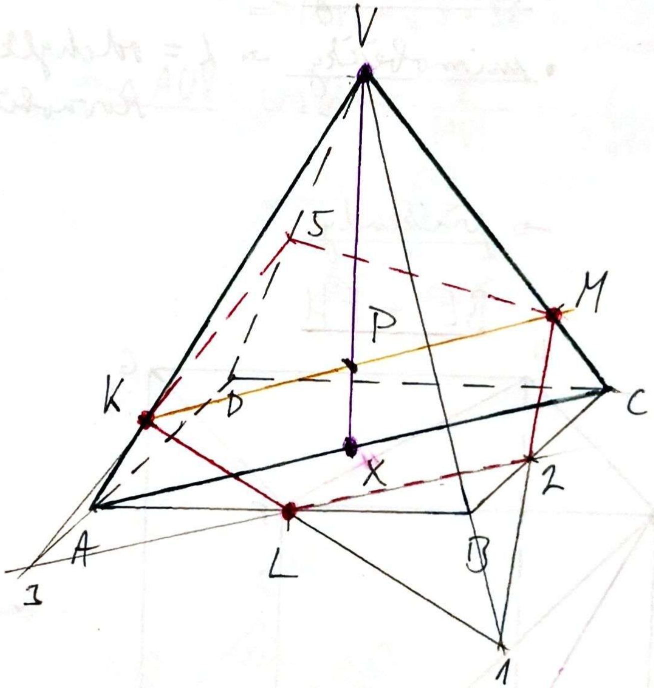





V
K
I
D
C
II
L
A
B


H
G
E
F
X
P
D
C
Z
Y
A
B


H
4
G
3
M
E
F
P
K
D
C
A
L
1
2


V
5
M
P
K
D
C
X
2
A
L
B
1

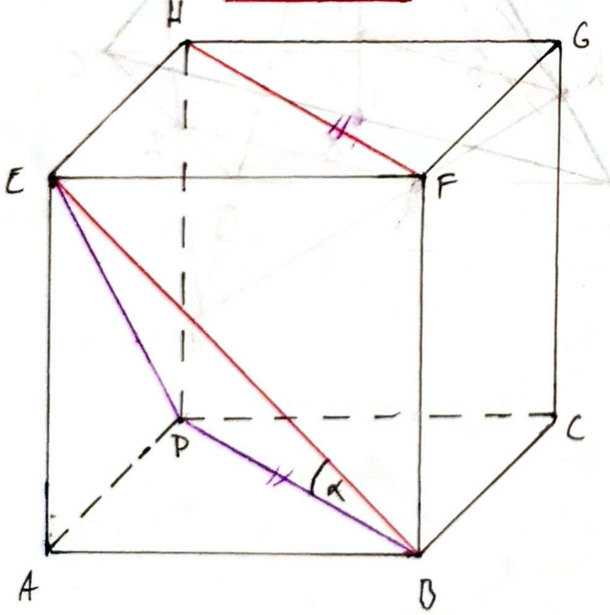
METRICKÉ ÚLOHY VE STEREOMETRII

- → odchylky přímek a rovin
- → vzdálenosti bodů, přímek a rovin
- → využívání rovnoběžnosti a kolmosti
- → kritérium kolmosti přímky a roviny
  - → přímka je kolmá na rovinu, pokud je kolmá na 2 přímky této roviny

- odchylka 2 přímek
  - rovnoběžky → $\alpha = 0°$
  - různoběžky → α = menší z úhlů, které přímky svírají
  - mimoběžky → α = odchylka různoběžných přímek, které jsou rovnoběžné s danými mimoběžkami

→ příklady

BE + FH

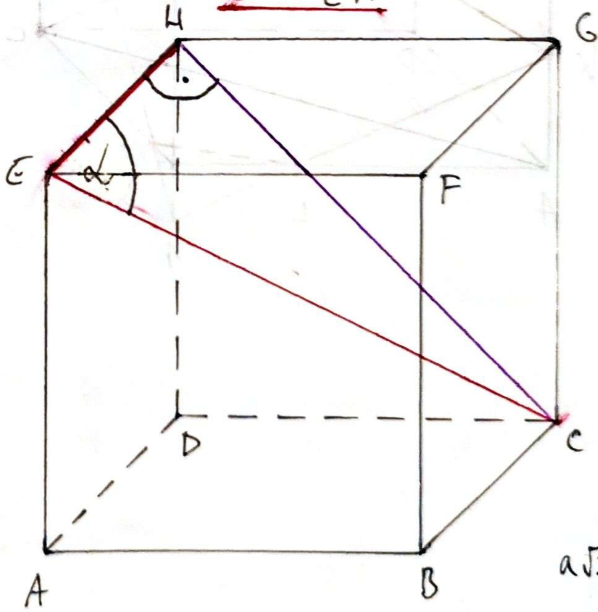


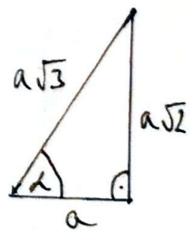
→ Δ z úhlopříček stran

→ rovnostranný trojúhelník

$\Rightarrow \alpha = 60°$

CE + EH



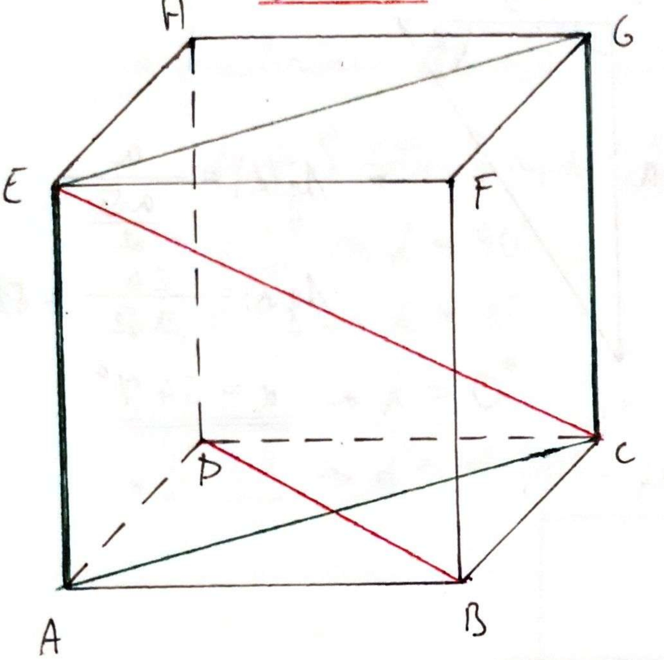


→ pravoúhlý trojúhelník

$$\rightarrow \cos(\alpha) = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\alpha = 54{,}7°$

BD + EC



→ pomocná rovina ACG

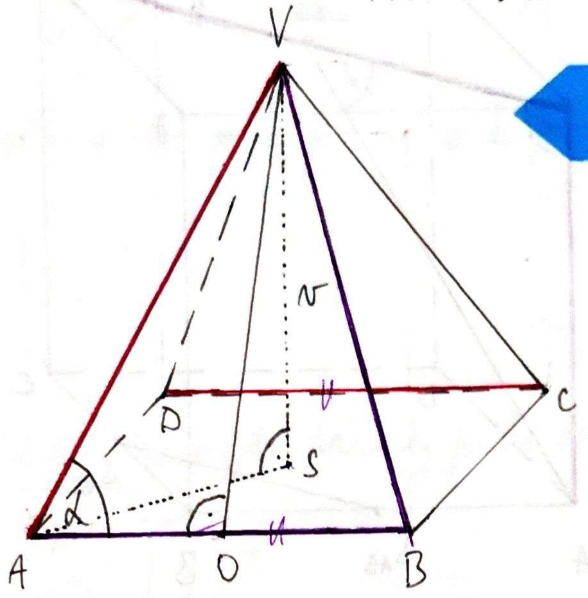
→ $BD \perp AC \wedge BC \perp AE$

$\Rightarrow BD \perp ACG \Rightarrow BD \perp EC$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$

AV + CD → $|AB| = 4$ cm

$v = 6$ cm



→ $\underline{\triangle ASV}$: $|AS| = a\sqrt{2}/2 = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$

$v = 6$

$\Rightarrow |AV| = \sqrt{8 + 36} = \underline{\underline{2\sqrt{11}}}$

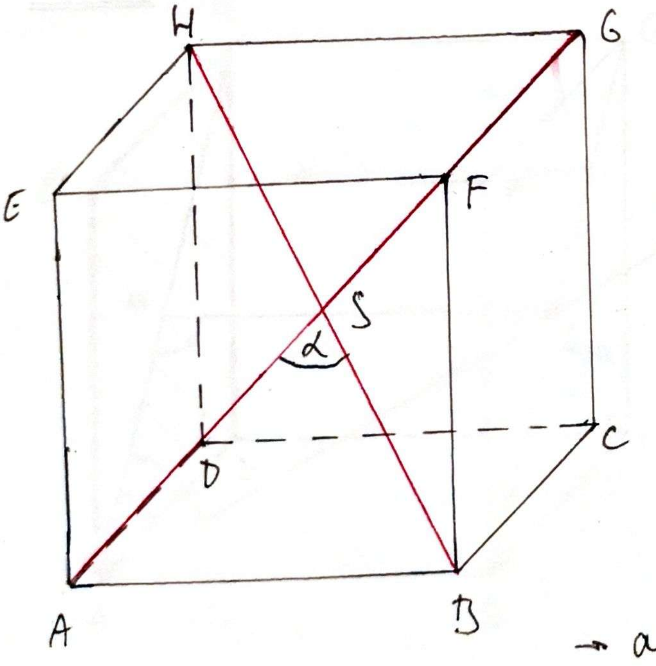
→ $\underline{\triangle AOV}$: $\cos(\alpha) = \dfrac{\frac{a}{2}}{|AV|} = \dfrac{2}{2\sqrt{11}}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$

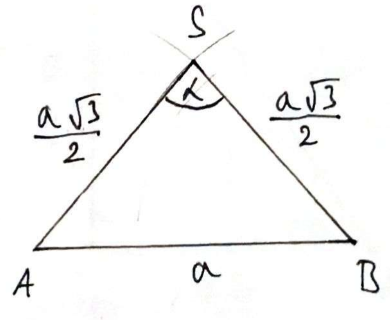
$\underline{\underline{\alpha = 72{,}5°}}$

C)

AG + BH



→



→ $a^2 = a^2 \cdot \frac{3}{4} + a^2 \cdot \frac{3}{4} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \cos(\alpha)$

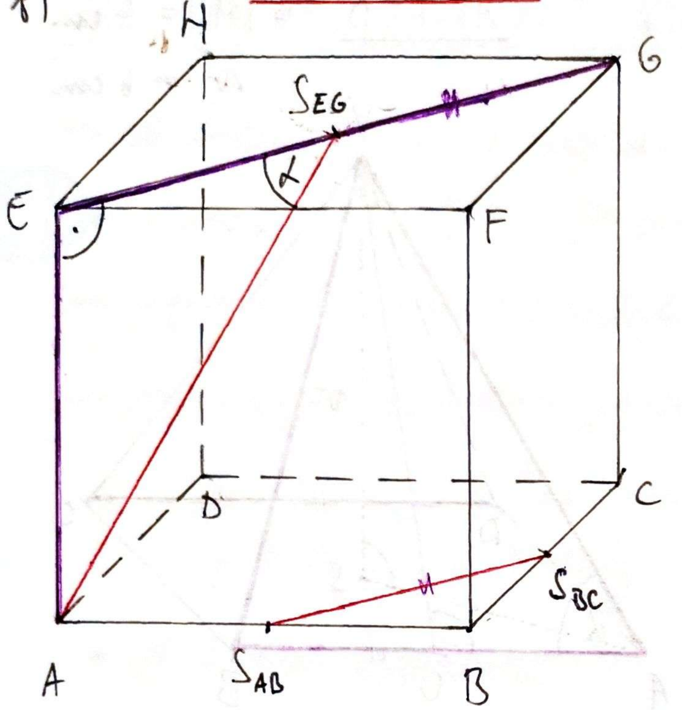
$a^2 = \frac{3}{2} \cdot a^2 - \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \cos(\alpha)$

$\frac{3}{2} a^2 \cdot \cos(\alpha) = \frac{a^2}{2}$

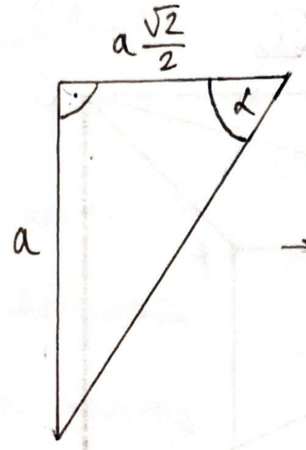
$\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$

$\underline{\underline{\alpha \doteq 70{,}5°}}$

f) $\underline{AS_{EG} + S_{AB}S_{BC}}$



→

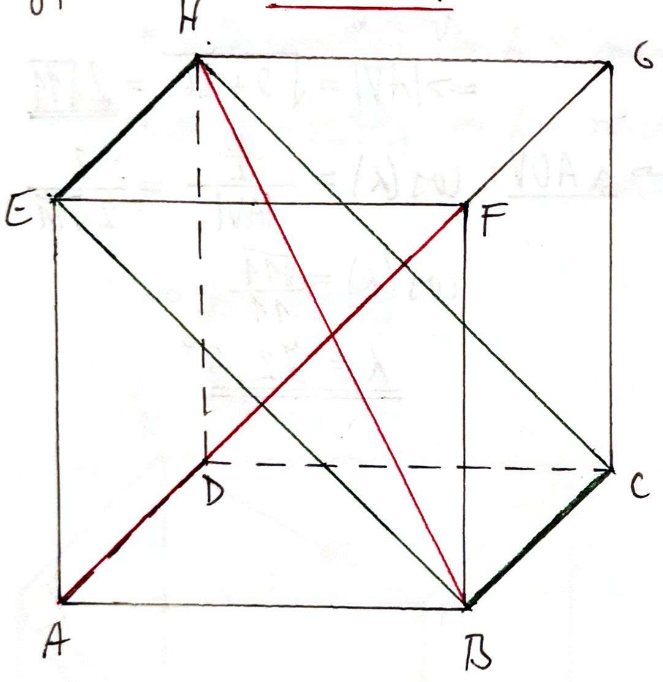


→ $tg(\alpha) = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$

$tg(\alpha) = \dfrac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\underline{\underline{\alpha = 54{,}7°}}$

g) $\underline{AF + BH}$



→ pomocná rovina EBC

→ $AF \perp EB \wedge AF \perp EH$

$\Rightarrow AF \perp EBC$

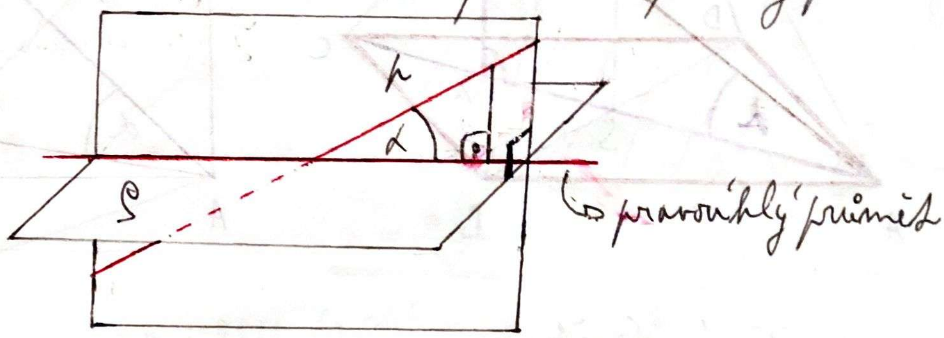
$\Rightarrow AF \perp BH \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$

- odchylka přímky a roviny

→ kritérium kolmosti přímky a roviny

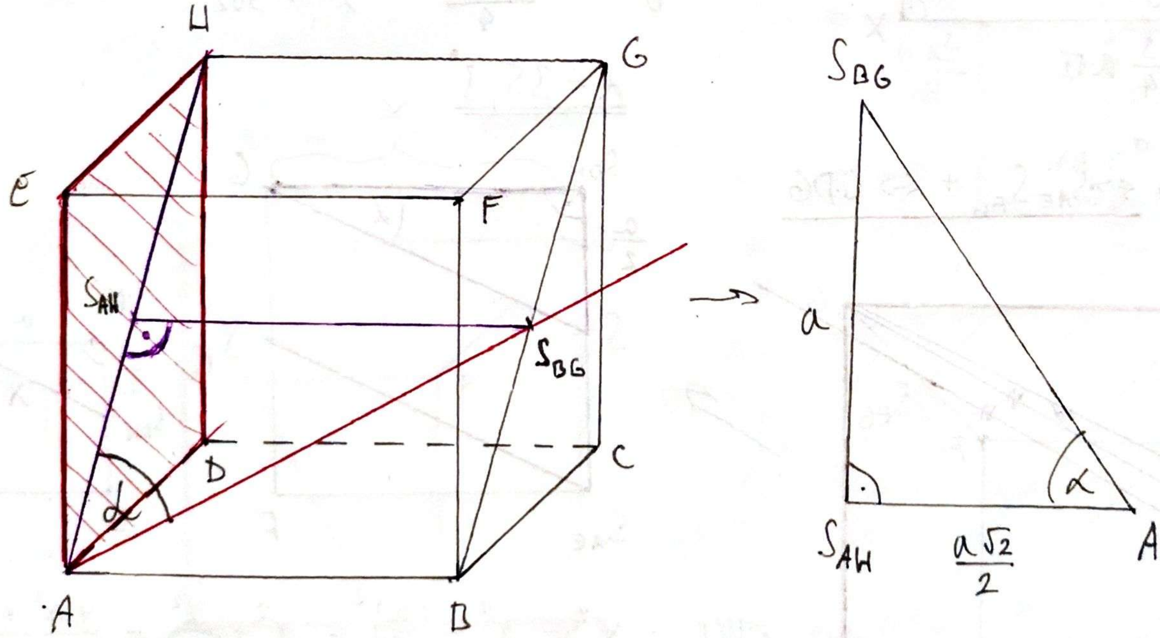
$$p \perp \rho \Leftrightarrow \exists\, r, s \subset \rho \wedge r \nparallel s \wedge r \perp p \wedge s \perp p$$

- $p \perp \rho \rightarrow \alpha = 90°$
- $p \subset \rho \rightarrow \alpha = 0°$
- $p \parallel \rho \rightarrow \alpha = 0°$
- $p \nparallel \rho \rightarrow \alpha =$ odchylka pravoúhlého průmětu přímky p do roviny ρ



→ příklady

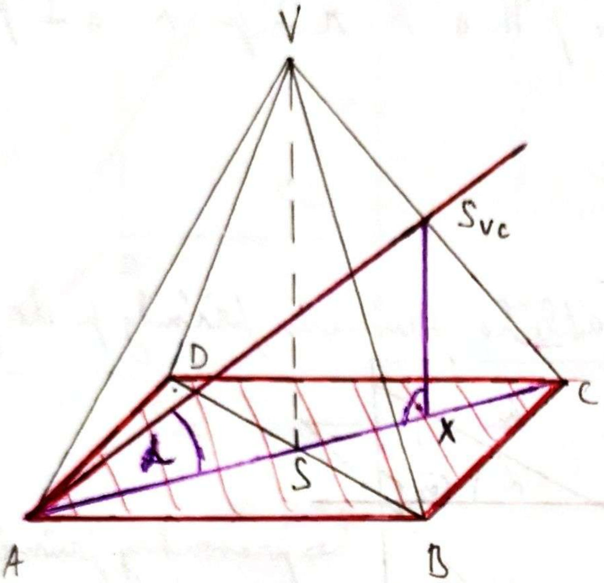
- $AS_{BG} + ADH$



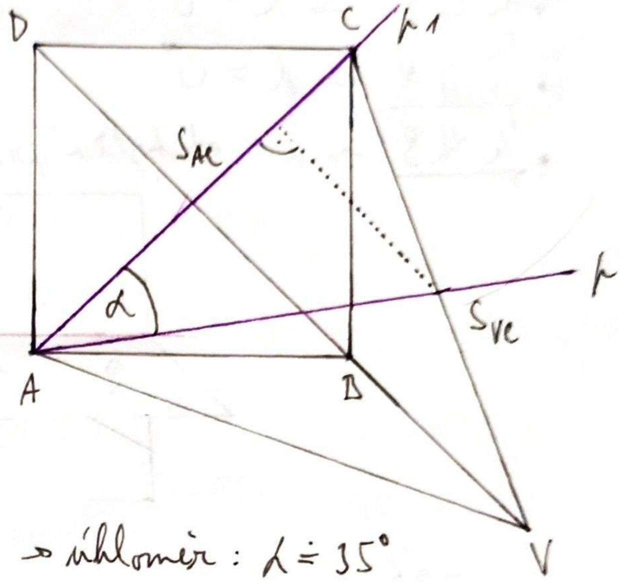
$$\rightarrow tg(\alpha) = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\alpha \doteq 54{,}7°$$

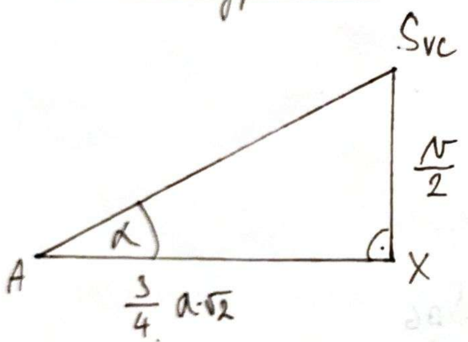
• $\leftrightarrow AS_{VC} + \leftrightarrow ABC$ → $a = 4$ cm
→ $v = 6$ cm



Konstrukční řešení
→ musím používat přesné délky



→ řešení výpočtem

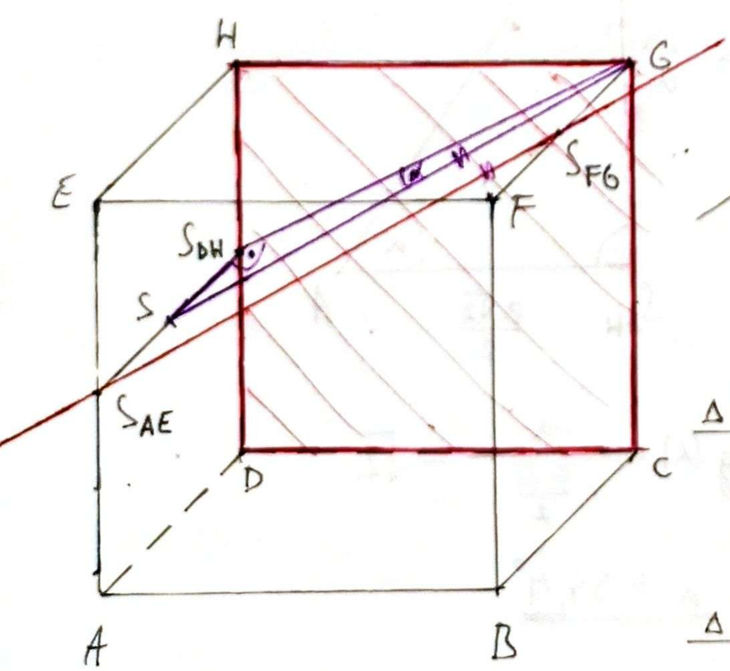


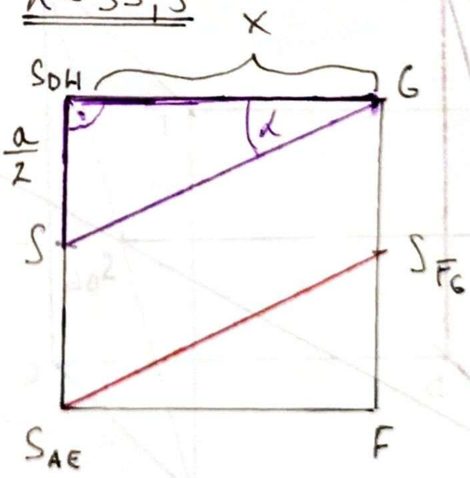
→ úhloměr: $\alpha \doteq 35°$

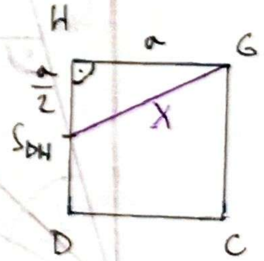
$$\rightarrow tg(\alpha) = \frac{\frac{v}{2}}{\frac{a\cdot 3\sqrt{2}}{4}} = \frac{v\cdot 4}{2\cdot a\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{v\sqrt{2}}{a\cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha \doteq 35,3°$

• $\leftrightarrow S_{AE}S_{FG} + \leftrightarrow CDG$







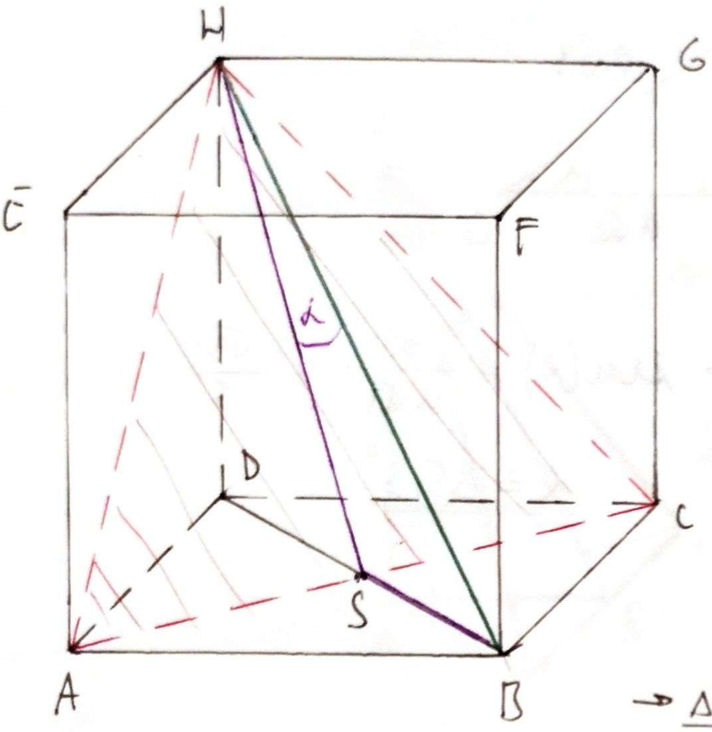
ΔHGS_{DH}: $x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 + a^2}{4}$

$x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

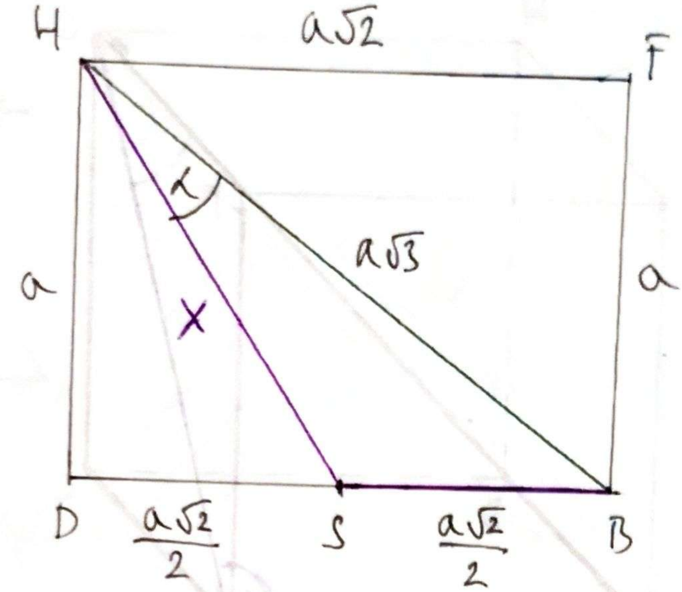
ΔSGS_{DH}: $tg(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\alpha \doteq 24,1°$

• $\leftrightarrow BH + \leftrightarrow ACH$



→



$$\to \Delta DSH: \; x^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{3}{2}a^2$$

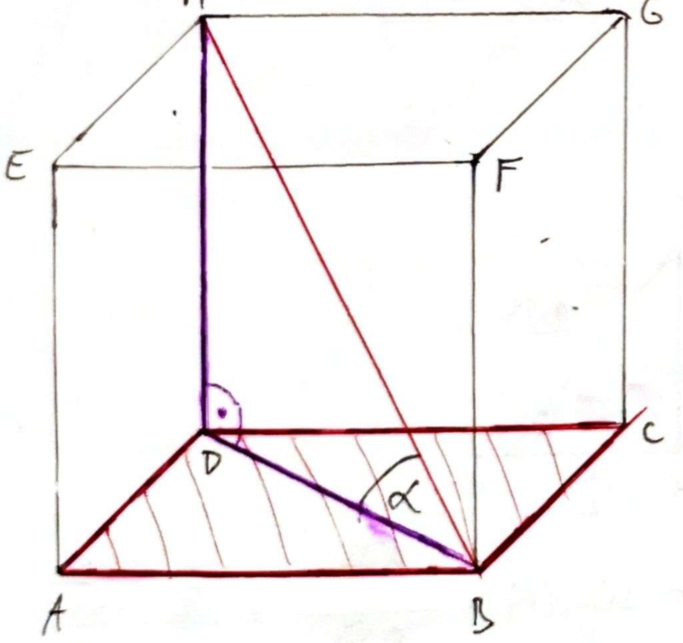
$$x = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\to \Delta BSH: \; \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = x^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2x\, a\sqrt{3} \cdot \cos(\alpha)$$

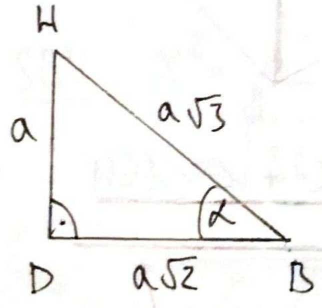
$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{3}{2}a^2 + 3a^2 - \frac{a^2}{2}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sqrt{3}} = \frac{4a^2}{\frac{6a^2}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha \doteq 19{,}5^\circ$$

a) $\leftrightarrow BH + \leftrightarrow ABC$



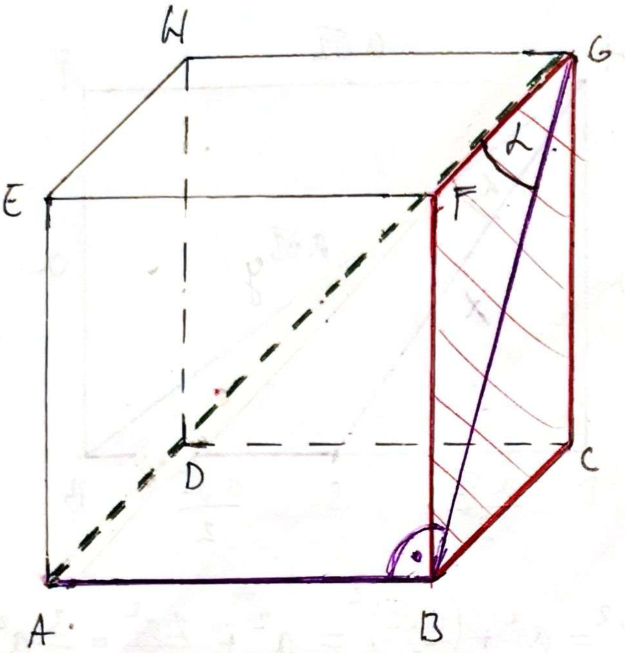
→

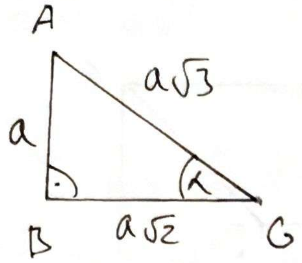


$$\to \sin(\alpha) = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha \doteq 35{,}3^\circ$$

c) $\overleftrightarrow{AG} + \overleftrightarrow{BCG}$

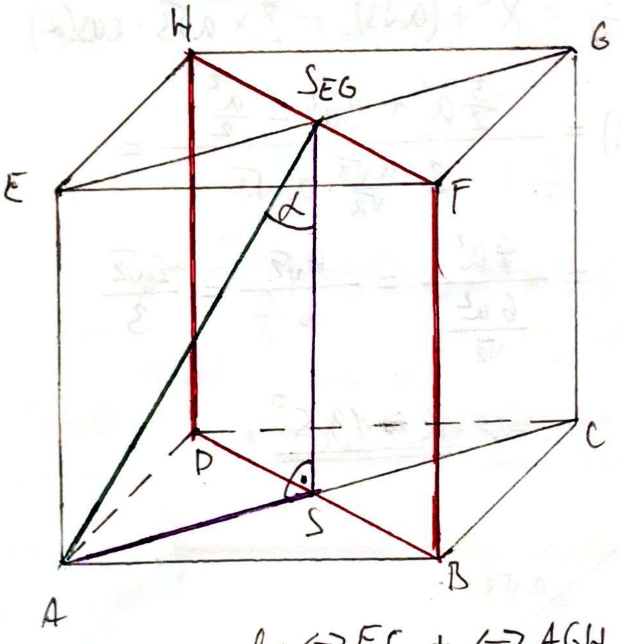


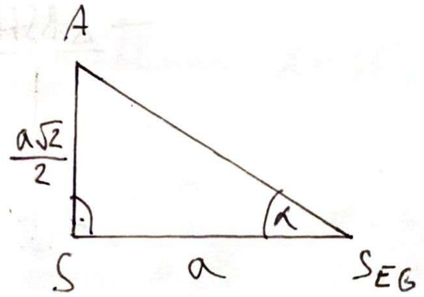


$$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{\underline{\alpha \doteq 35{,}3^\circ}}$$

d) $\overleftrightarrow{AS_{EG}} + \overleftrightarrow{BDH}$

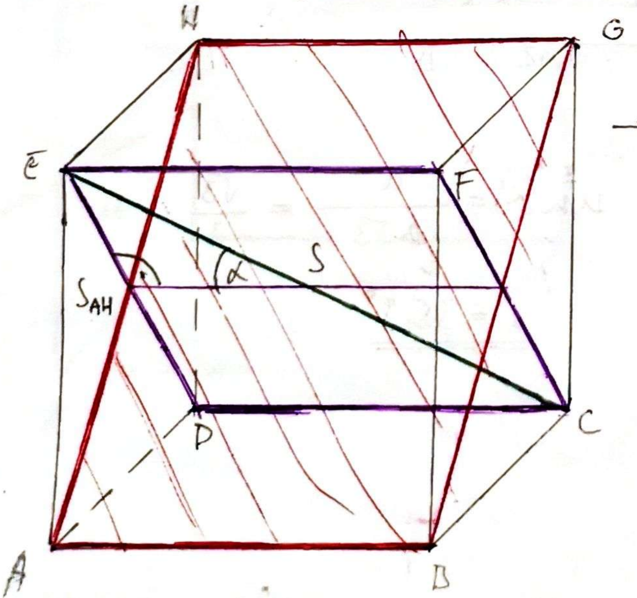


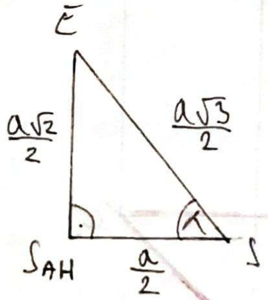


$$\rightarrow tg(\alpha) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\underline{\alpha \doteq 35{,}3^\circ}}$$

h) $\overleftrightarrow{EC} + \overleftrightarrow{AGH}$



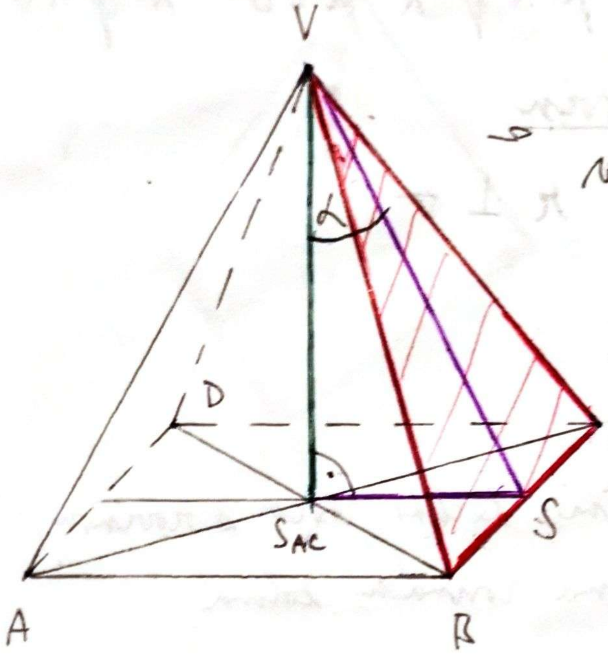


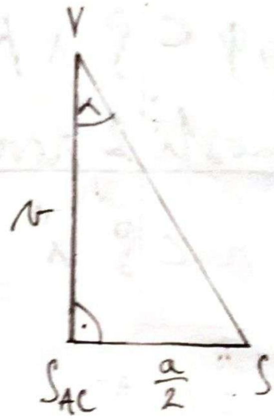
$$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\underline{\underline{\alpha \doteq 54{,}7^\circ}}$$

b) $\leftrightarrow VS_{AC} + \leftrightarrow BCV$ $\rightarrow a = 4\,cm$

$\rightarrow v = 6\,cm$



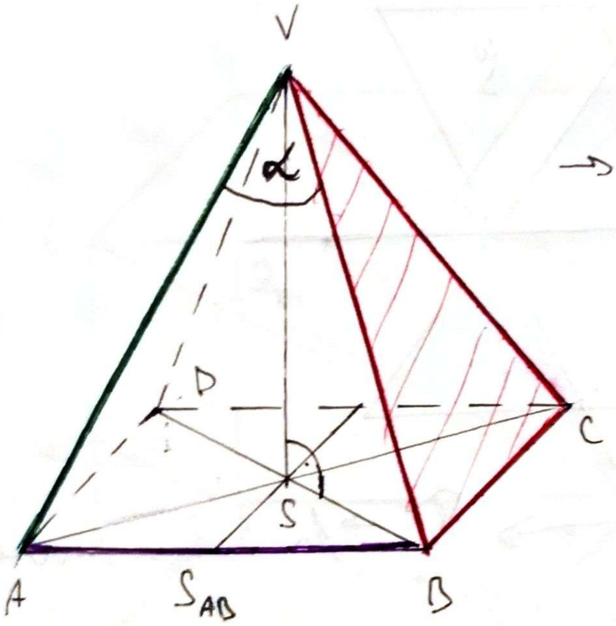


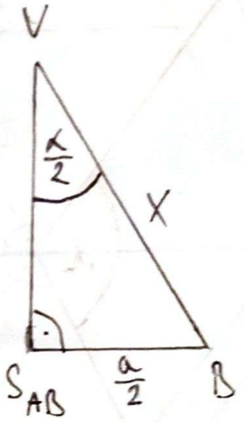
$\rightarrow tg(\alpha) = \dfrac{\frac{a}{2}}{v}$

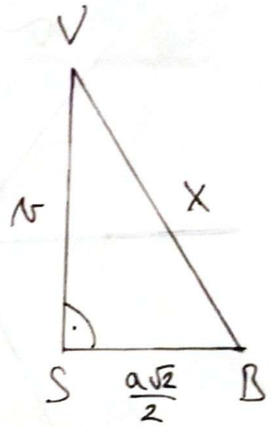
$tg(\alpha) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

$\underline{\underline{\alpha \doteq 18{,}4^\circ}}$

d) $\leftrightarrow AV + \leftrightarrow BCV$ $\rightarrow a = 4\,cm \wedge v = 6\,cm$







$\rightarrow \underline{\Delta SBV}: \; X^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = v^2 + \frac{a^2}{2}$

$X = \sqrt{36+8} = \sqrt{44} = \underline{\underline{2\sqrt{11}}}$

$\rightarrow \underline{\Delta S_{AB}BV}: \; \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\frac{a}{2}}{X} = \dfrac{2}{2\sqrt{11}} = \dfrac{\sqrt{11}}{11}$

$\frac{\alpha}{2} \doteq 17{,}5^\circ$

$\underline{\underline{\alpha \doteq 35{,}1^\circ}}$

• odchylka 2 rovin

→ kritérium rovnoběžnosti 2 rovin

$$\rho \parallel \sigma \iff \exists p,q \subset \rho \land p \nparallel q \land p \parallel \sigma \land q \parallel \sigma$$

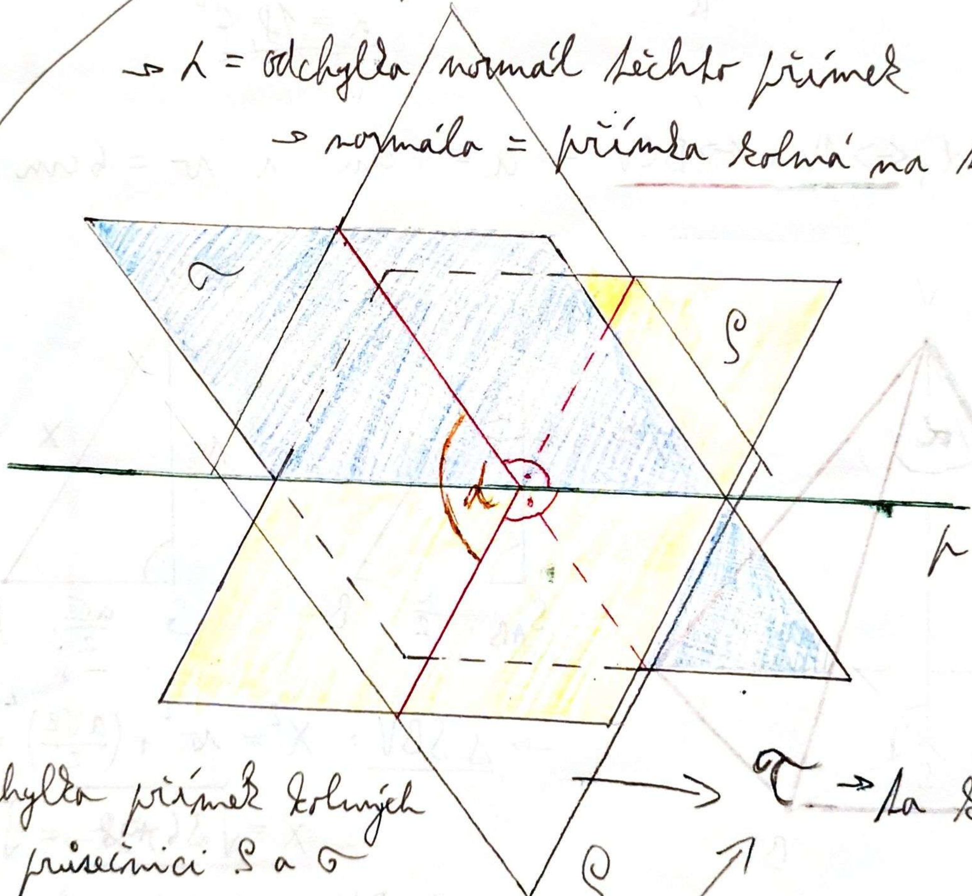
→ kritérium kolmosti 2 rovin

$$\rho \perp \sigma \iff \exists r \subset \rho \land r \perp \sigma$$

- $\rho \parallel \sigma$ → $\alpha = 0°$
- $\rho \equiv \sigma$ → $\alpha = 0°$
- $\rho \nparallel \sigma$ → α = odchylka průsečnic těchto rovin s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá

→ α = odchylka normál těchto přímek

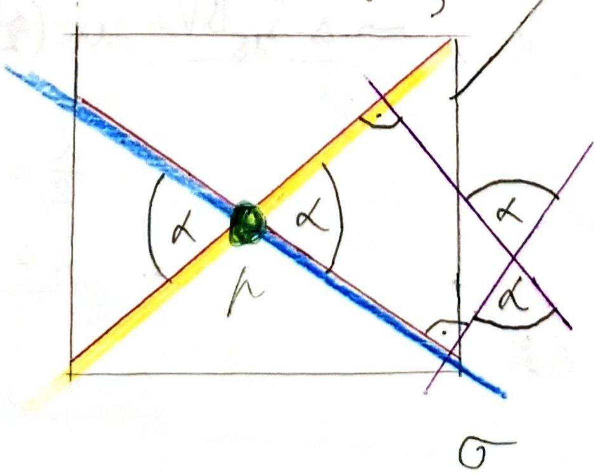
→ normála = přímka kolmá na tuto rovinu



→ α = odchylka přímek kolmých na průsečnici ρ a σ

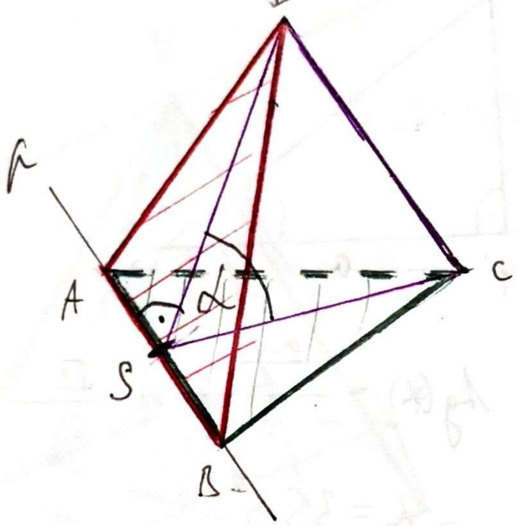
→ τ → ta kolmá rovina

každá musí ležet v jiné rovině

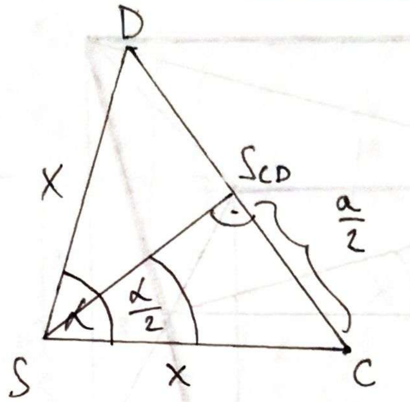


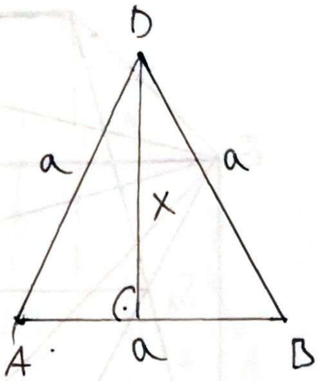
→ příklady

• pravidelný čtyřboký jehlan → $\leftrightarrow ABC + \leftrightarrow ABD$



→





→ $\Delta ABD: x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

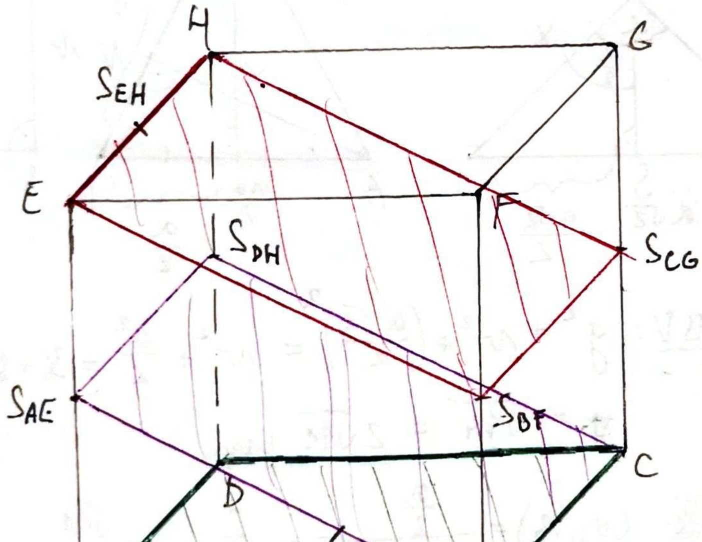
$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

→ $\Delta SCS_{CD}: \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

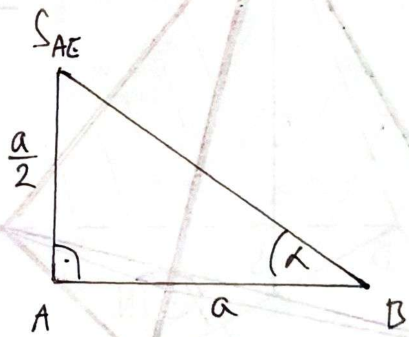
$\frac{\alpha}{2} \doteq 35{,}3^\circ$

$\alpha \doteq 70{,}5^\circ$

35/d: $\leftrightarrow ABC + \leftrightarrow S_{BF}S_{CG}S_{EH}$



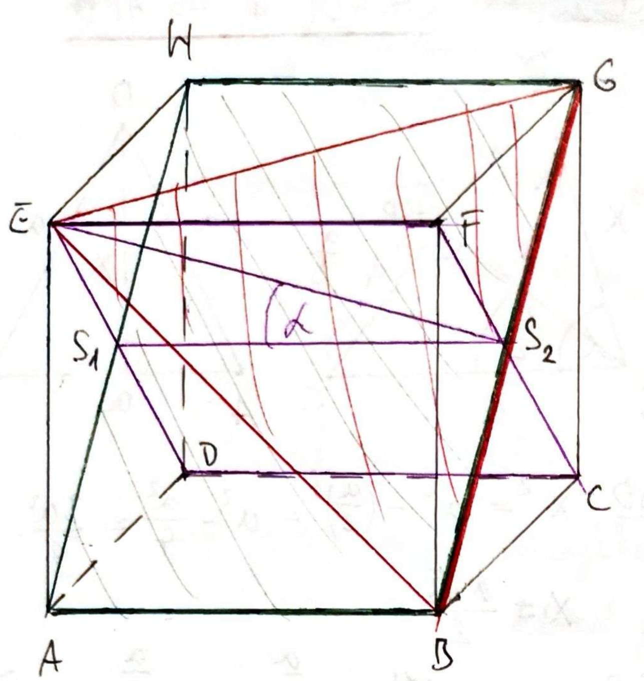
→



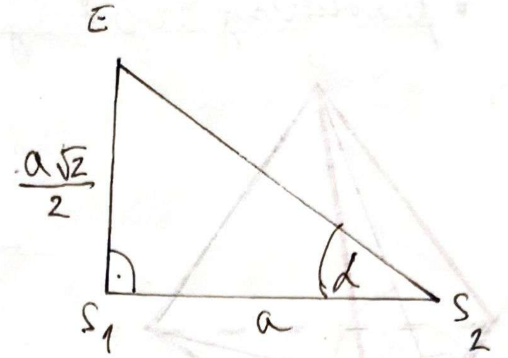
→ $tg(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$

$\alpha \doteq 26{,}6^\circ$

35/e: $\leftrightarrow ABG + \leftrightarrow BEG$



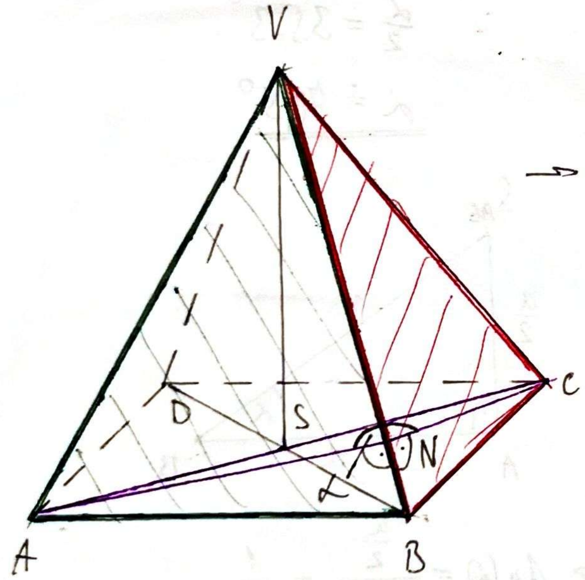
$\rightarrow$



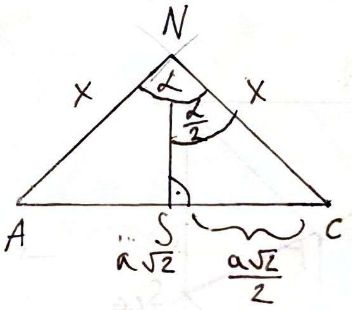
$$\rightarrow tg(\alpha) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

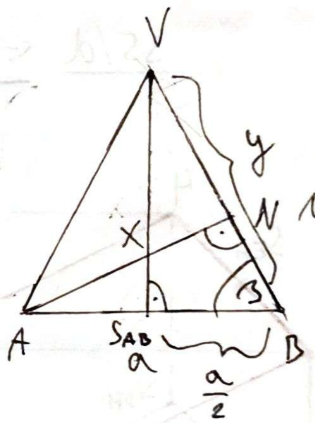
$$\underline{\underline{\alpha \doteq 35{,}3^\circ}}$$

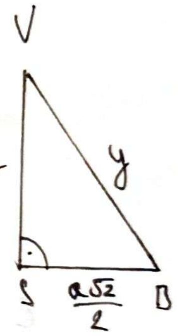
36/d: $\leftrightarrow ABV + \leftrightarrow BCV \rightarrow a = 4\text{ cm},\ v = 6\text{ cm}$



$\rightarrow$







$$\rightarrow \underline{\Delta SBV}:\ y^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = v^2 + \frac{a^2}{2} = 36 + 8$$

$$y = \sqrt{44} = \underline{\underline{2\sqrt{11}\text{ cm}}}$$

$$\rightarrow \underline{\Delta S_{AB}BV}:\ \cos(\beta) = \frac{\frac{a}{2}}{y} = \frac{2}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

$$\underline{\underline{\beta \doteq 72{,}5^\circ}}$$

$$\rightarrow \underline{\Delta ABN}:\ \sin(\beta) = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot \sin(\beta)$$

$$x = 4 \cdot \sin(72{,}5)$$

$$\underline{\underline{x \doteq 3{,}81\text{ cm}}}$$

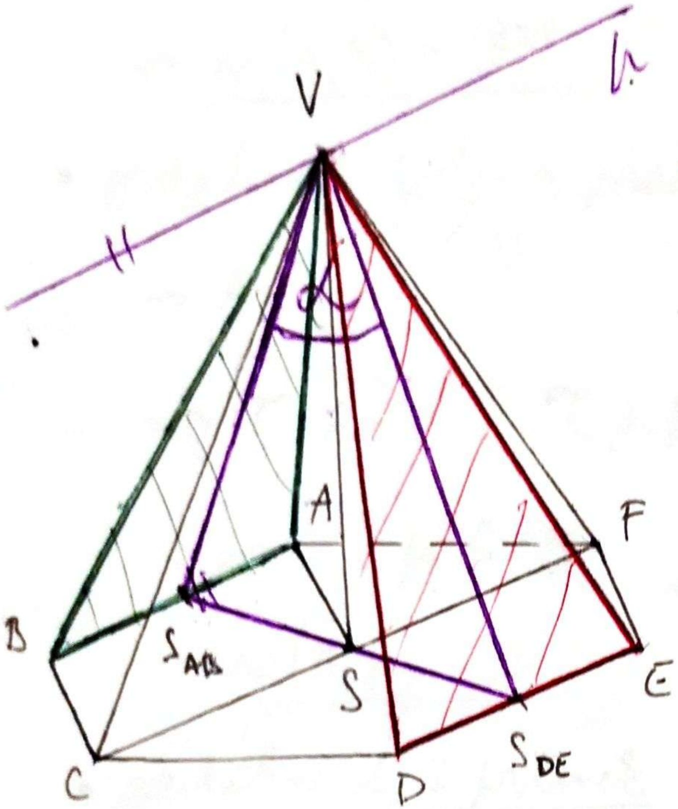
$$\rightarrow \underline{\Delta SNC}:\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{x}$$

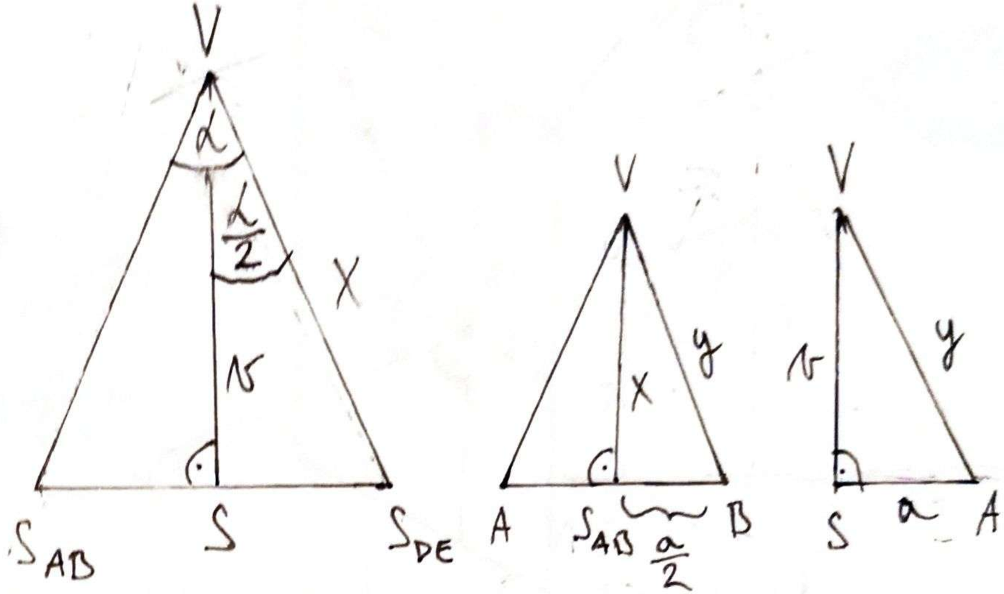
$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \doteq \frac{2\sqrt{2}}{3{,}81} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \doteq 47{,}9^\circ$$

$$\alpha = 95{,}7^\circ \rightarrow \alpha > 90 \Rightarrow \alpha = 180 - \alpha$$

$$\underline{\underline{\alpha \doteq 84{,}3^\circ}}$$

$37/b: \; \leftrightarrow ABV + \leftrightarrow DEV \;\rightarrow\; a = 4\text{ cm},\; v = 6\text{ cm}$





$\rightarrow \underline{\Delta SAV}: \quad y^2 = v^2 + a^2 = 36 + 16 = 52$

$y = \sqrt{52} = \underline{\underline{2\sqrt{13}}}$

$\rightarrow \underline{\Delta S_{AB}BV} \quad x^2 = y^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 52 - 4 = 48$

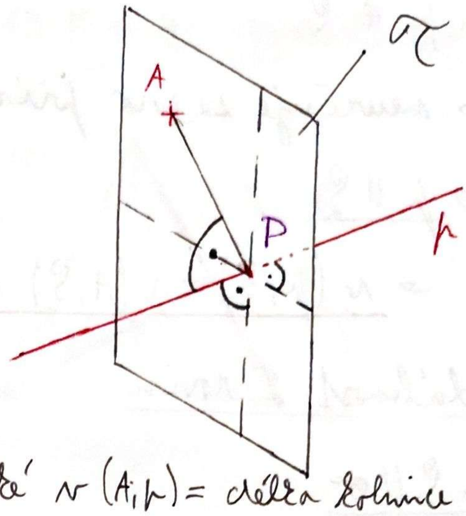
$x = \sqrt{48} = \underline{\underline{4\sqrt{3}}}$

$\rightarrow \underline{\Delta SS_{DE}V}: \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{v}{x} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$

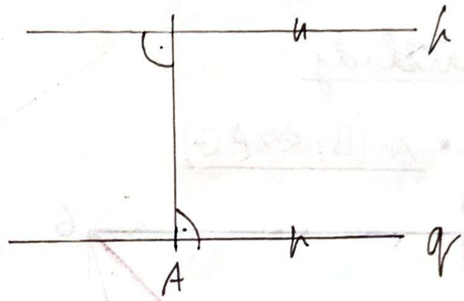
$\underline{\underline{\alpha = 60^\circ}}$

- vzdálenost 2 bodů
  - → $A \neq B$
  - → $v(A,B) = |AB|$

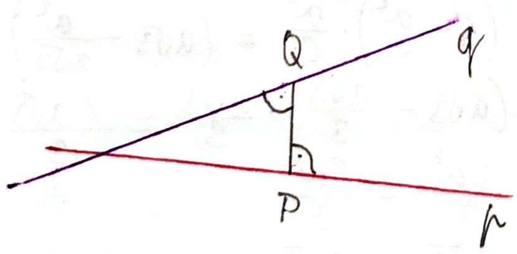


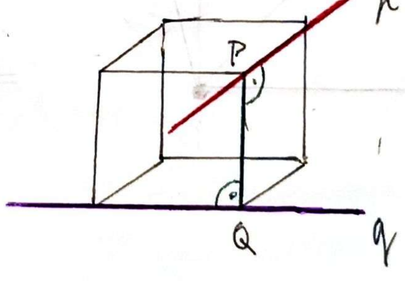
- vzdálenost bodu a přímky
  - → $A \notin p$
  - ⇒ $\tau: A \in \tau \wedge \tau \perp p$
  - ⇒ $P = p \cap \tau$
  - → $v(A,p) = |AP|$
  - → nebo také $v(A,p)$ = délka kolmice od p do A v rovině $\rho = \leftrightarrow Ap$

- vzdálenost 2 přímek

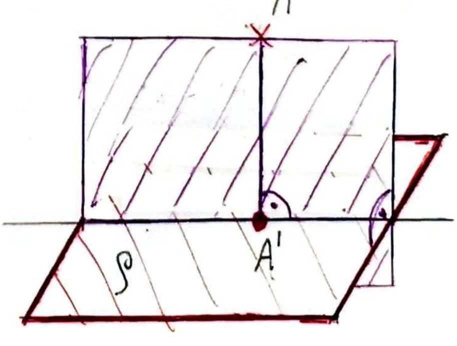


  - rovnoběžky
    - → A = libovolný bod q
    - ⇒ $v(p,q) = v(A,p)$
  - mimoběžky
    - → $v(p,q)$ = délka nejkratší příčky mimoběžek PQ
    - → $PQ;\ P \in p \wedge Q \in q \wedge PQ \perp p \wedge PQ \perp q$
    - → PQ = osa mimoběžek p, q

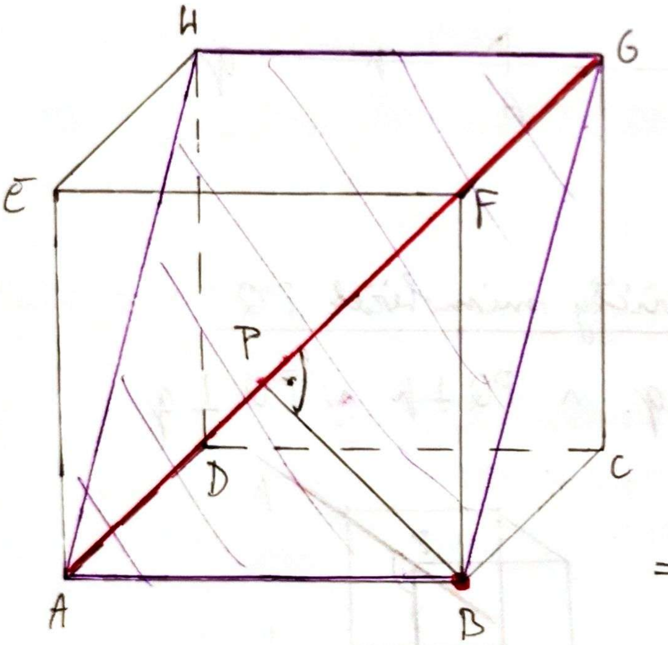




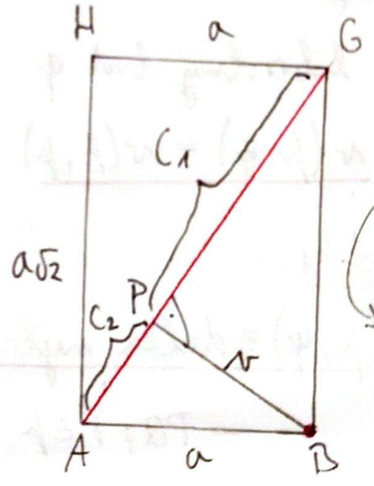
- vzdálenost bodu a roviny
  - → $A \notin \rho$
  - → $v(A,\rho)$ = vzdálenost bodu A od jeho pravoúhlého průmětu do roviny ρ
  - ⇒ $v(A,\rho) = v(A,A') = |AA'|$



- vzdálenost přímky a roviny
  - → $p \notin \rho$
  - → neurčuje se pro přímku různoběžnou s rovinou
  - ⇒ $p \parallel \rho$
    - → $v(p, \rho) = v(A, \rho) \wedge A \in p$
- vzdálenost 2 rovin
  - → $\rho \parallel \sigma$
    - → $v(\rho, \sigma) = v(A, \sigma) \wedge A \in \rho$
  - → příklady
    - $v(B, \leftrightarrow AG)$



→



→ Eukl. věty

$c = c_1 + c_2 = a\sqrt{3}$

→ $v^2 = c_1 \cdot c_2$

→ $a^2 = c \cdot c_2$

$c_2 = \frac{a^2}{c}$

$c_1 = c - c_2$

$$\Rightarrow v^2 = \left(c - \frac{a^2}{c}\right) \cdot \frac{a^2}{c} = \left(a\sqrt{3} - \frac{a^2}{a\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{a^2}{a\sqrt{3}}$$

$$v^2 = \left(a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2 \cdot a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

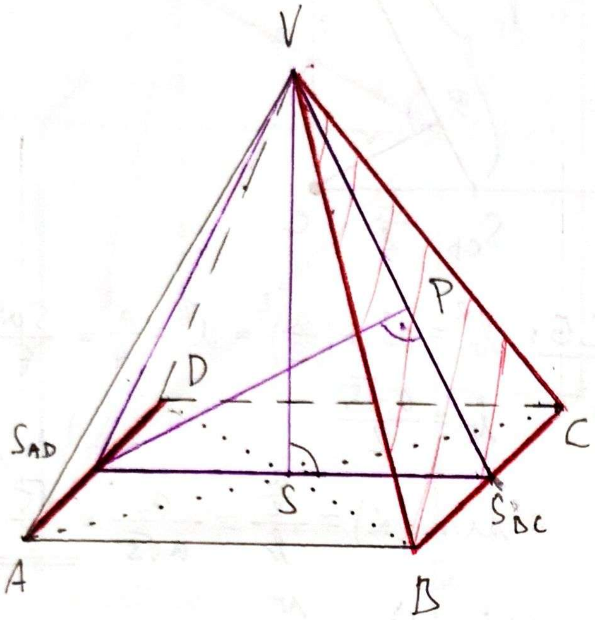
$$v^2 = \frac{6a^2}{9} = \frac{2a^2}{3}$$

$$v = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

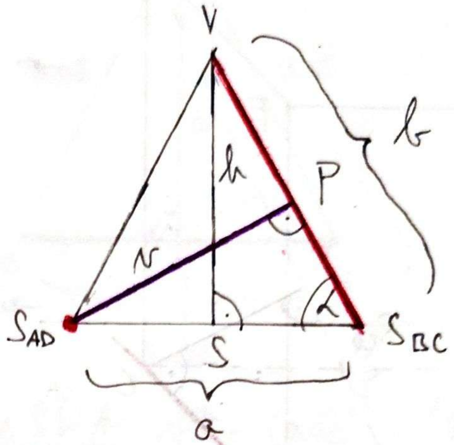
• $v(\leftrightarrow AD, \leftrightarrow BCV)$

$\to a = 4\text{ cm} \wedge h = 6\text{ cm}$

$\to \leftrightarrow AD \parallel \leftrightarrow BC \Rightarrow \leftrightarrow AD \parallel \leftrightarrow BCV$



$\to$



$\to \underline{\triangle SS_{BC}V}$: $b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$

$b = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \underline{2\sqrt{10}}$

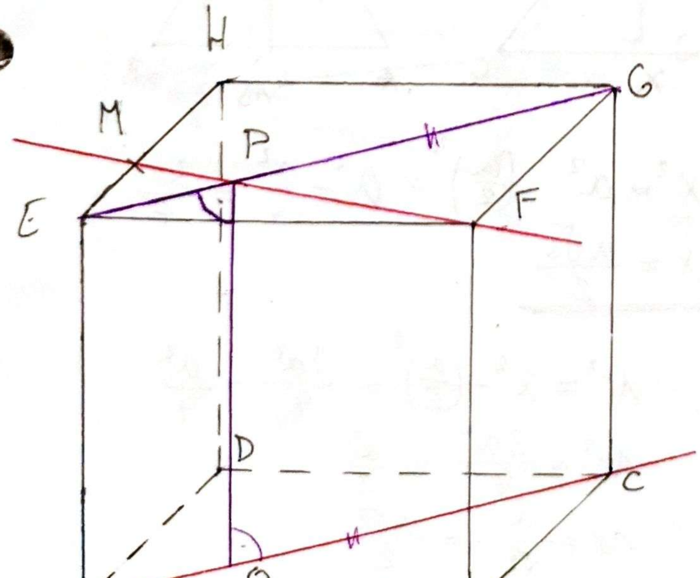
: $\sin(\alpha) = \frac{h}{b} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{10}}{10}}}$

$\to \underline{\triangle S_{AD}PS_{BC}}$: $\sin(\alpha) = \frac{v}{a}$

$v = a \cdot \sin(\alpha) = 4 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10}$

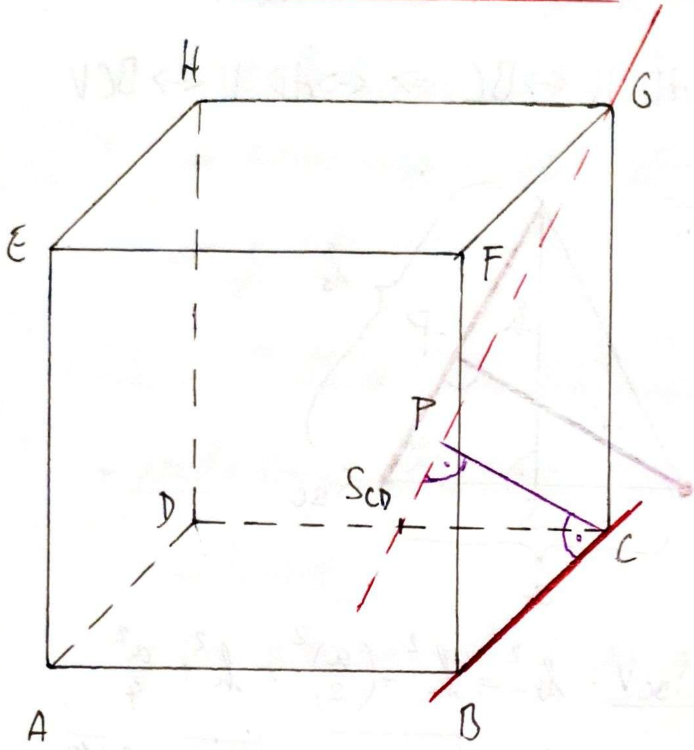
$\underline{\underline{v = \frac{6\sqrt{10}}{5} \doteq 3{,}8\text{ cm}}}$

• $v(\leftrightarrow AC, \leftrightarrow FM)$

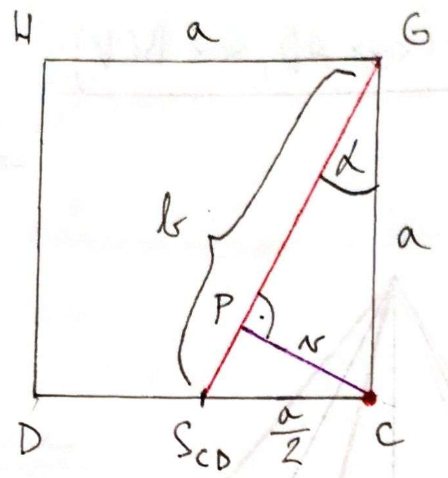


$\underline{\underline{v = |PQ| = a}}$

2) $v(\leftrightarrow BC, \leftrightarrow GS_{CD})$



$\rightarrow$



$\rightarrow$ $\Delta S_{CD}CG$: $b^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

: $\sin(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

↳ $BC \perp DCG \wedge PC \subset DCG$

$\Rightarrow BC \perp PC$

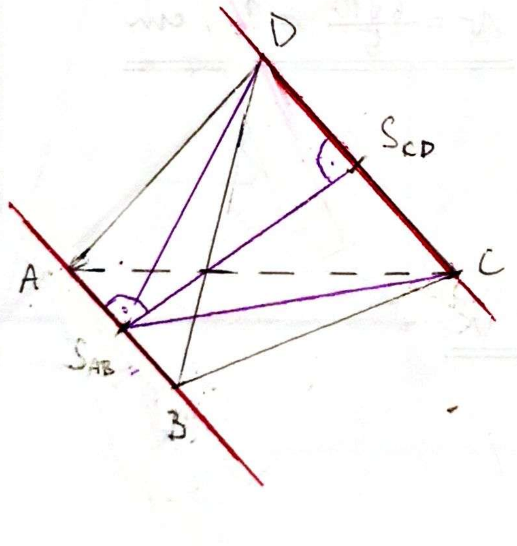
$\rightarrow$ ΔPCG: $\sin(\alpha) = \frac{v}{a}$

$v = a \cdot \sin(\alpha)$

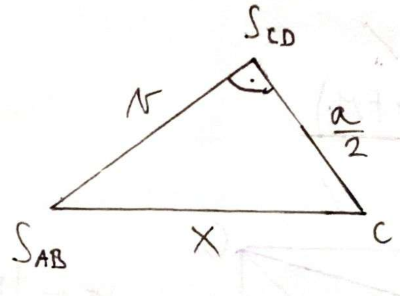
$v = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

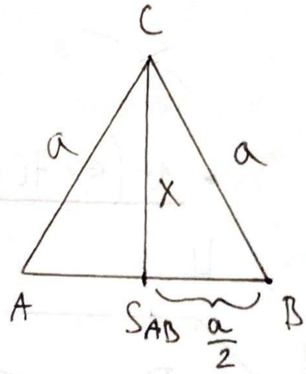
3) $v(\leftrightarrow AB, \leftrightarrow CD)$

$\rightarrow$ pravidelný čtyřstěn



$\rightarrow$





$\rightarrow$ $\Delta S_{AB}BC$: $x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

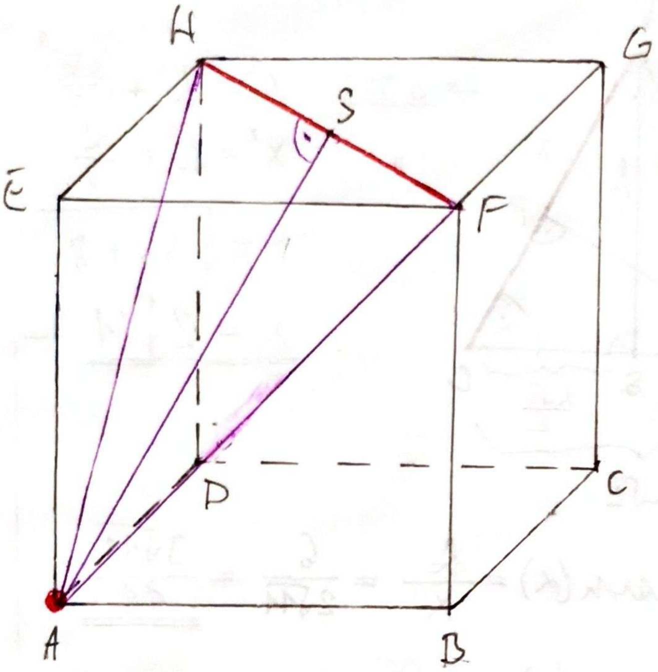
$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

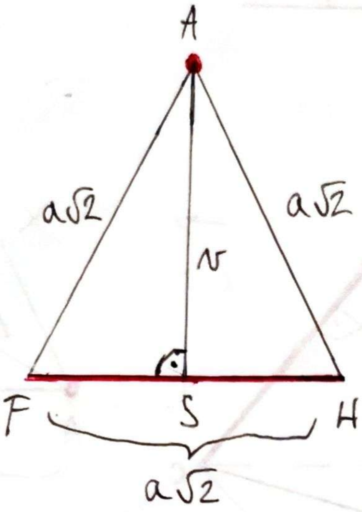
$\rightarrow$ $\Delta S_{AB}S_{CD}C$: $v^2 = x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$

$v^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

$v = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

17/f: $v(A, \leftrightarrow FH) \wedge a = 4$ cm



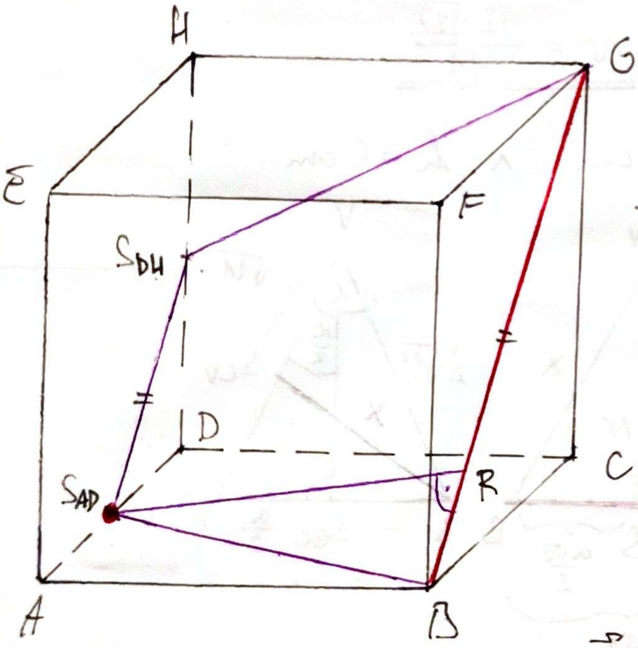


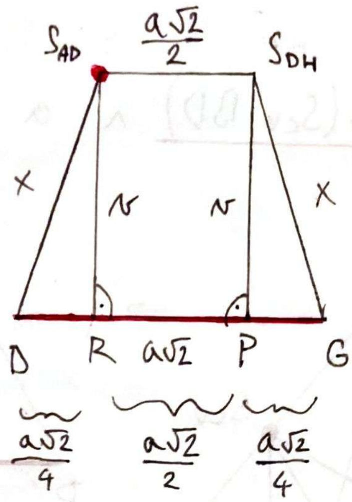
$\rightarrow \triangle SHA: \; v^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

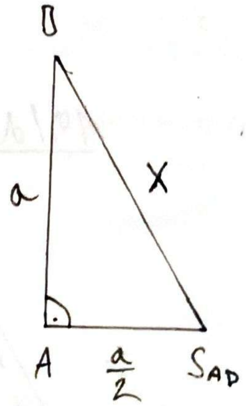
$v^2 = 32 - 8 = 24$

$v = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm

17/h: $v(S_{AD}, BG) \wedge a = 4$ cm







$\rightarrow \triangle ABS_{AD}: \; x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

$x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

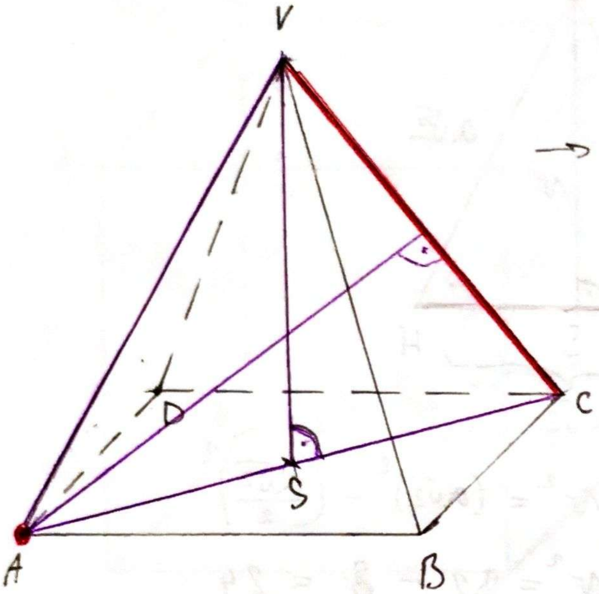
$\triangle BRS_{AD}: \; v^2 = x^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}$

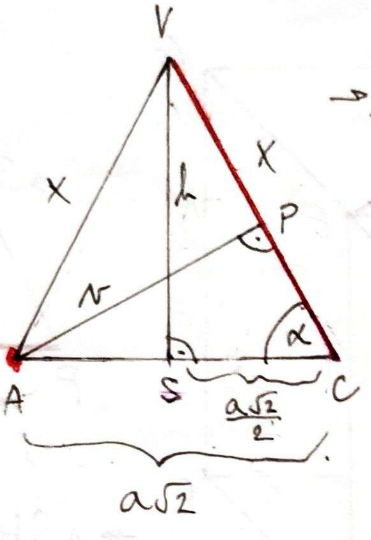
$v^2 = \frac{10a^2}{8} - \frac{a^2}{8} = \frac{9a^2}{8}$

$v = \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{a \cdot 3\sqrt{2}}{4}$

$v = \frac{4 \cdot 3\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}$

19/b: $v(A, CV) \wedge a = 4\ cm \wedge h = 6\ cm$





→ $\underline{\Delta SCV}$: $x^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$x^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$

$x = \sqrt{36 + 8}$

$\underline{x = 2\sqrt{11}}$

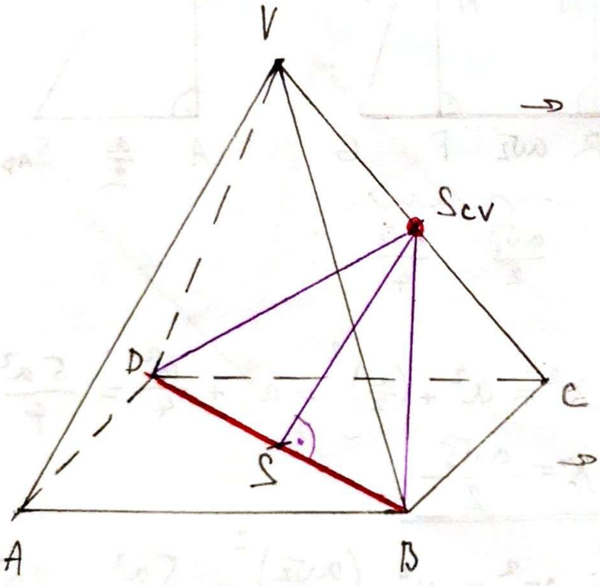
→ $\underline{\Delta SCV}$: $\sin(\alpha) = \frac{h}{x} = \frac{6}{2\sqrt{11}} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{11}}{11}}}$

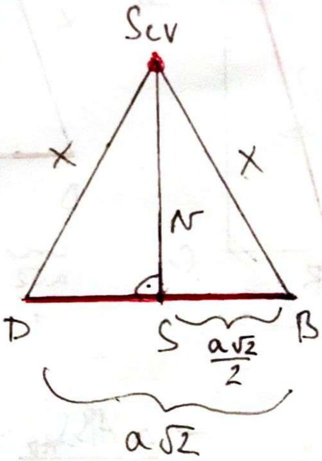
→ $\underline{\Delta APC}$: $\sin(\alpha) = \frac{v}{a\sqrt{2}}$

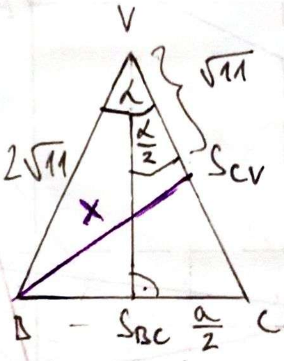
$v = a\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{11} = \frac{a \cdot 3\sqrt{22}}{11}$

$\underline{\underline{v = \frac{12\sqrt{22}}{11}}}$

19/d: $v(S_{CV}, BD) \wedge a = 4\ cm \wedge h = 6\ cm$







→ $\underline{\Delta S_{BC}CV}$: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$

$\frac{\alpha}{2} \doteq 17{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \doteq 35{,}1°}}$

→ $\underline{\Delta B S_{CV} V}$: $x^2 = (2\sqrt{11})^2 + (\sqrt{11})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} \cdot \cos(\alpha)$

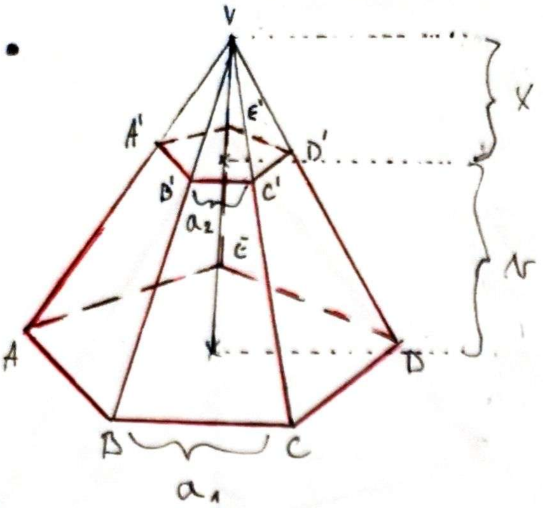
$x^2 \doteq 44 + 11 - 44 \cdot \cos(35{,}1°)$

$x \doteq \sqrt{55 - 44 \cdot \cos(35{,}1°)} = \sqrt{19}$

→ $\underline{\Delta S B S_{CV}}$: $v^2 = x^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 19 - 8$

$\underline{\underline{v = \sqrt{11}}}$

POVRCHY A OBJEMY

- 

$a_1 = 4\text{ cm} \wedge a_2 = 2\text{ cm} \wedge v = 6\text{ cm}$

$\Rightarrow V = ?$

$\rightarrow S_{\text{⬠}} = a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \quad (\text{⬠} = 5 \cdot \Delta)$

$\rightarrow V = V_1 - V_2$

$\rightarrow$ podobnost jehlanů ABCDEV a A'B'C'D'E'V

$$\frac{v+x}{a_1} = \frac{x}{a^2}$$

$$a_2 \cdot v + a_2 \cdot x = a_1 \cdot x$$

$$a_2 \cdot x - a_1 \cdot x = -a_2 \cdot v$$

$$x(a_2 - a_1) = -a_2 \cdot v$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a_2 \cdot v}{a_1 - a_2}}}$$

$\rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{p1} \cdot (v + x)$

$\rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{p2} \cdot x$

- $V_1 = \dfrac{S_{p1}}{3}\left(v + \dfrac{v \cdot a_2}{a_1 - a_2}\right)$

$$V_1 = \frac{S_{p1}}{3}\left(\frac{v \cdot a_1 - v \cdot a_2 + v \cdot a_2}{a_1 - a_2}\right)$$

$$V_1 = \frac{S_{p1}}{3} \cdot \frac{v \cdot a_1}{a_1 - a_2}$$

- $V_2 = \dfrac{S_{p2}}{3} \cdot \dfrac{v \cdot a_2}{a_1 - a_2}$

- $V = V_1 - V_2$

$$V = \frac{S_{p1} \cdot v \cdot a_1}{3(a_1 - a_2)} - \frac{S_{p2} \cdot v \cdot a_2}{3(a_1 - a_2)}$$

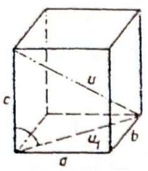
$$\underline{\underline{V = \frac{v}{3} \cdot \frac{a_1 \cdot S_{p1} - a_2 \cdot S_{p2}}{a_1 - a_2}}}$$

$$\Rightarrow V = 2 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}} - 2 \cdot \sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2}$$

$$\underline{\underline{V = 14\sqrt{25+10\sqrt{5}} \doteq 96{,}35 \text{ cm}^3}}$$

V následujících vzorcích je V objem, S povrch, S_p obsah podstavy, S_{pl} obsah pláště, v výška tělesa, u tělesová úhlopříčka, r poloměr, d průměr.

Kvádr

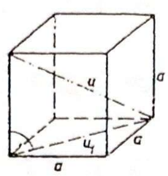


$V = abc$

$S = 2(ab + ac + bc)$

$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Krychle



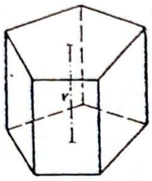
$V = a^3$

$S = 6a^2$

$u = a\sqrt{3}$

$u_1 = a\sqrt{2}$ stěnová úhlopříčka

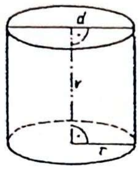
Hranol



$V = S_p \cdot v$

$S = 2S_p + S_{pl}$

Rotační válec

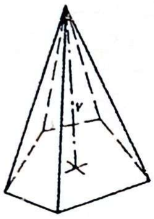


$V = \pi r^2 v = \frac{1}{4}\pi d^2 v$

$S = 2\pi r(r + v)$

$S_{pl} = 2\pi r v = \pi d v$

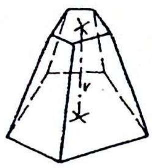
Jehlan



$V = \frac{1}{3} S_p v$

$S = S_p + S_{pl}$

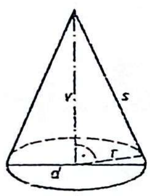
Komolý jehlan



$V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$

Rotační kužel

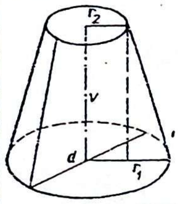


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

$S = \pi r^2 + \pi r s =$
$= \pi r(r + s)$

$S_{pl} = \pi r s$

Komolý rotační kužel

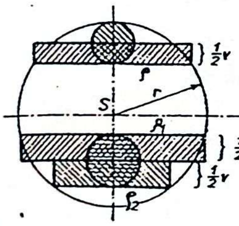


$V = \frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 +$
$+ \pi(r_1 + r_2)s =$
$= \pi[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2)s]$

$S_{pl} = \pi(r_1 + r_2)s$

Koule a její části



Objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Povrch koule $S = 4\pi r^2$
(Obsah kulové plochy)

ρ r = poloměr tý koule

Obsah kulového vrchlíku a kulového pásu $S = 2\pi r v$

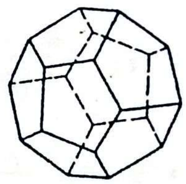
Objem kulové úseče $V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) = \pi v^2\left(r - \frac{v}{3}\right)$ vrchlík

Objem kulové vrstvy $V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$ pás

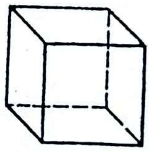
Objem kulové výseče $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$, v je výška příslušné kulové úseče = koule ∩ jehlan s vrcholem v S

Pravidelný mnohostěn má shodné stěny, kterými jsou pravidelné n-úhelníky. Součet vnitřních úhlů pravidelných n-úhelníků u jednoho vrcholu musí být menší než 360°. Tedy: Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu rovnostranné trojúhelníky (vnitřní úhel v rovnostranném trojúhelníku má velikost 60°), mohou být u jednoho vrcholu buď tři – **pravidelný čtyřstěn (tetraedr**, obr. 141a), nebo čtyři – **osmistěn (oktaedr**, obr. 141b), nebo pět – **pravidelný dvacetistěn (ikosaedr**, obr. 141c).

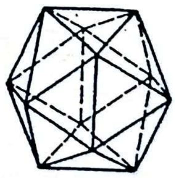
Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu čtverce (vnitřní úhel ve čtverci je pravý), mohou být u jednoho vrcholu pouze tři – **pravidelný šestistěn neboli krychle (hexaedr**, obr. 141d). Jsou-li stěnami pravidelného mnohostěnu pravidelné pětiúhelníky (velikost vnitřního úhlu v pravidelném pětiúhelníku je 108°), mohou se v jednom vrcholu stýkat pouze tři – **pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr**, obr. 141e).



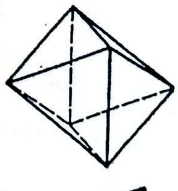
Obr. 141e



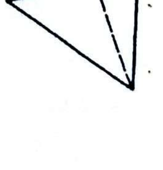
Obr. 141d



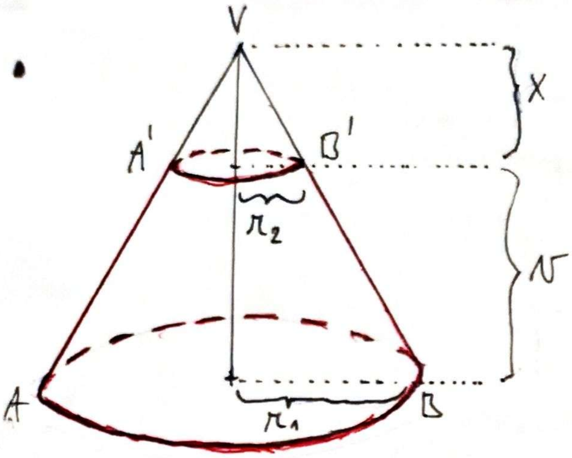
Obr. 141c



Obr. 141b



Obr. 141a



$r_1 = 5\text{ cm} \wedge r_2 = 3\text{ cm} \wedge v = 4\text{ cm}$

$\Rightarrow V, S_{pl} - ?$

$\to V = V_1 - V_2$

$\to S_{pl} = S_{pl_1} - S_{pl_2}$

$\to$ podobnost kuželů ABV a A'B'V

$$\frac{v+x}{r_1} = \frac{x}{r_2}$$

$$v \cdot r_2 + x \cdot r_2 = x \cdot r_1$$

$$x(r_2 - r_1) = -v \cdot r_2$$

$$x = \frac{v \cdot r_2}{r_1 - r_2}$$

$\to V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{p_1}(v+x)$

$\to V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{p_2} x$

- $V_1 = \frac{S_{p_1}}{3} \cdot \left(v + \frac{v \cdot r_2}{r_1 - r_2}\right)$

$V_1 = \frac{S_{p_1}}{3} \cdot \frac{v \cdot r_1}{r_1 - r_2} = \frac{\pi \cdot r_1^2 \cdot v \cdot r_1}{3(r_1 - r_2)}$

$V_1 = \frac{\pi \cdot v \cdot r_1^3}{3(r_1 - r_2)}$

- $V_2 = \frac{S_{p_2}}{3} \cdot \frac{v \cdot r_2}{r_1 - r_2} = \frac{\pi \cdot r_2^2 \cdot v \cdot r_2}{3(r_1 - r_2)}$

$V_2 = \frac{\pi \cdot v \cdot r_2^3}{3(r_1 - r_2)}$

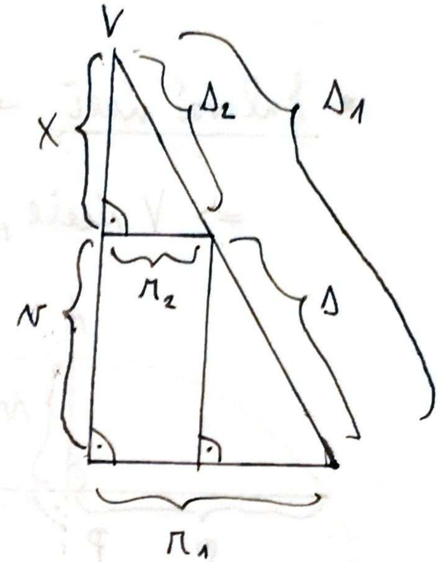
- $V = \frac{\pi \cdot v \cdot r_1^3}{3(r_1 - r_2)} - \frac{\pi \cdot v \cdot r_2^3}{3(r_1 - r_2)}$

$V = \frac{1}{3}\pi v \cdot \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2}\right) = \frac{v}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)}{r_1 - r_2}$

$V = \frac{v}{3} \cdot \pi \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$

$\Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \cdot (25 + 15 + 9)$

$V = \frac{196}{3}\pi \doteq 205{,}25\text{ cm}^3$



$$\rightarrow s_1^2 = r_1^2 + (v + x)^2$$

$$s_1^2 = r_1^2 + \frac{v^2 \cdot r_1^2}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{r_1^2\left((r_1-r_2)^2 + v^2\right)}{(r_1-r_2)^2}$$

$$\rightarrow s_2^2 = r_2^2 + x^2$$

$$s_2^2 = r_2^2 + \frac{v^2 \cdot r_2^2}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{r_2^2\left((r_1-r_2)^2 + v^2\right)}{(r_1-r_2)^2}$$

$$\rightarrow s^2 = (r_1 - r_2)^2 + v^2$$

- $S = \pi \cdot r_1 \cdot s_1 - \pi \cdot r_2 \cdot s_2$

$$S = \pi\left(r_1 \cdot \frac{r_1 \cdot s}{r_1 - r_2} - r_2 \cdot \frac{r_2 \cdot s}{r_1 - r_2}\right)$$

$$S = \pi\left(\frac{s \cdot r_1^2 - s \cdot r_2^2}{r_1 - r_2}\right)$$

$$S = \pi \cdot s \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2}$$

$$\underline{\underline{S = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)}}$$

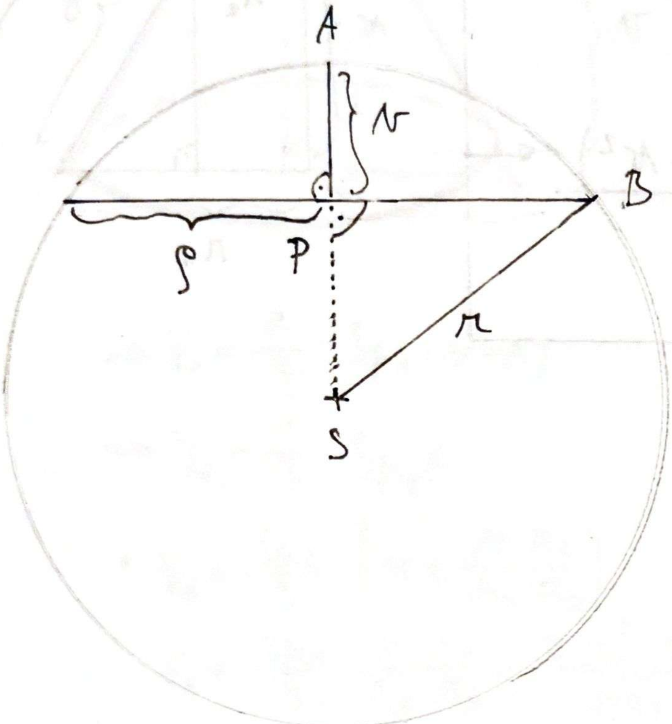
$$\Rightarrow S = \pi \cdot \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2} \cdot (r_1 + r_2)$$

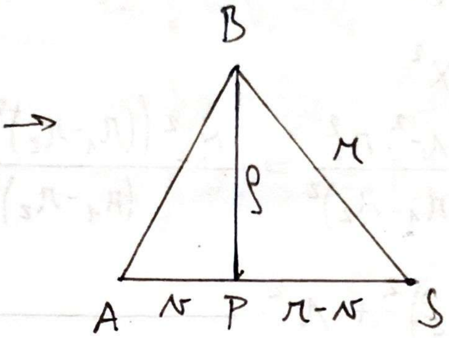
$$S = 8\pi\sqrt{4 + 16} = 8\pi\sqrt{20}$$

$$\underline{\underline{S = 16\pi\sqrt{5} \doteq 112{,}4\ \mathrm{cm}^2}}$$

• Kulová úseč $\Rightarrow v = 3\,\text{cm} \wedge r = 5\,\text{cm}$

$\Rightarrow$ V úseče, S vrchlíku, S úseče, S podstavy úseče





$$\Rightarrow \rho^2 = r^2 - (r-v)^2 = r^2 - r^2 + 2r\cdot v - v^2$$

$$\rho^2 = 2rv - v^2$$

$$\underline{\underline{\rho = \sqrt{2r\cdot v - v^2}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho = \sqrt{30-9} = \sqrt{21}}}$$

• $V = \frac{v}{6}\cdot\pi\cdot(3\cdot\rho^2 + v^2)$

$V = \frac{\pi}{2}\cdot(3\cdot 21 + 9) = \frac{\pi}{2}\cdot 72$

$\underline{\underline{V = 36\pi \doteq 113{,}1\ \text{cm}^3}}$

• $S_v = 2\pi\cdot r\cdot v$

$S_v = 2\cdot\pi\cdot 5\cdot 3$

$\underline{\underline{S_v = 30\pi \doteq 94{,}25\ \text{cm}^2}}$

• $S = S_v + S_p$

$S = 2\pi\cdot r\cdot v + \pi\cdot\rho^2$

$\underline{\underline{S = \pi(2rv + \rho^2)}}$

$\Rightarrow S = \pi(30 + 21)$

$\underline{\underline{S = 51\pi \doteq 160{,}22\ \text{cm}^2}}$

- sud = válec bez horní podstavy

$\Rightarrow r = 0{,}35\ m \wedge v = 1{,}2\ m$

$\Rightarrow$ prázdný sud : $m = 30\ kg \wedge \rho = 7800\ kg \cdot m^{-3}$

$\Rightarrow V$, tloušťka plechu $(d) = ?$

- $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$

$V = \pi \cdot 0{,}35^2 \cdot 1{,}2\ m^3$

$\underline{\underline{V \doteq 0{,}46\ m^3}}$

- $V_p = S \cdot d \Rightarrow$ objem plechu = jeho obsah · tloušťka

$\Rightarrow \underline{\underline{V_p = \frac{m}{\rho}}}$

$\Rightarrow S = S_p + S_q = \pi \cdot r^2 + 2\pi r v$

$\underline{\underline{S = \pi r (r + 2v)}}$

- $d = \frac{V_p}{S} = \frac{\frac{m}{\rho}}{\pi r (r + 2v)}$

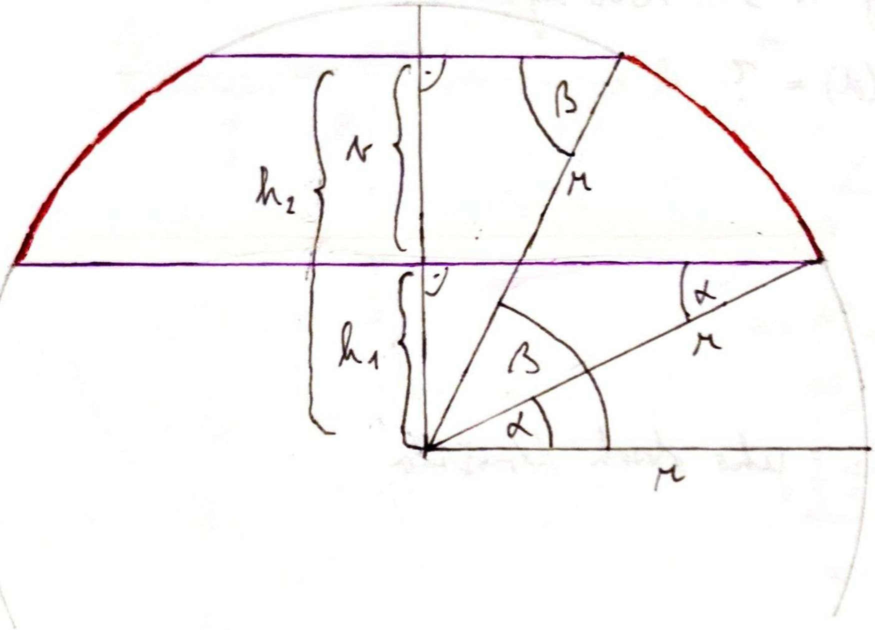
$\underline{\underline{d = \frac{m}{\pi \cdot r \cdot \rho \cdot (r + 2v)}}}$

$d = \frac{30}{\pi \cdot 0{,}35 \cdot 7800 \cdot (0{,}35 + 2{,}4)}\ m$

$\underline{\underline{d \doteq 1{,}27 \cdot 10^{-3}\ m \doteq 1{,}3\ mm}}$

- Kolik procent povrchu koule tvoří tento kulový pás?

$\Rightarrow r = 10 \ \wedge \ \alpha = 30° \ \wedge \ \beta = 60°$



- $v = h_2 - h_1$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \dfrac{h_1}{r} \Rightarrow h_1 = r \cdot \sin(\alpha)$

$\rightarrow \sin(\beta) = \dfrac{h_2}{r} \Rightarrow h_2 = r \cdot \sin(\beta)$

$\Rightarrow v = r \cdot \sin(\beta) - r \cdot \sin(\alpha)$

$\underline{\underline{v = r\left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right)}}$

- $S = 2\pi \cdot r \cdot v$

$S = 2\pi \cdot r^2 \cdot \left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right)$

- $S_C = 4\pi \cdot r^2$

$100\% \ \ldots\ldots \ 4\pi \cdot r^2$

$x\% \ \ldots\ldots \ 2\pi \cdot r^2 \cdot \left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right)$

$$x = 100 \cdot \frac{2\pi \cdot r^2 \cdot \left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right)}{4\pi \cdot r^2}$$

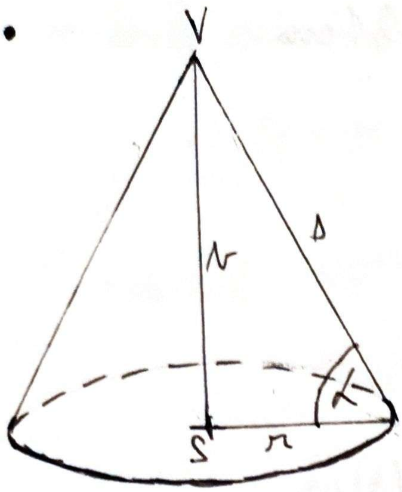
$$x = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right)$$

$$\underline{\underline{x = 50 \cdot \left(\sin(\beta) - \sin(\alpha)\right) \%}}$$

$$\Rightarrow x = 50 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 50 \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \%$$

$$\underline{\underline{x = 25\left(\sqrt{3} - 1\right) \doteq 18{,}3\%}}$$

•



$\underline{v = 10\ cm \wedge \alpha = 30^\circ}$

$\Rightarrow V, S = ?$

$\rightarrow \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{r}{v} \Rightarrow r = v \cdot \operatorname{cotg}(\alpha)$

$\rightarrow \sin(\alpha) = \frac{v}{s} \Rightarrow s = \frac{v}{\sin(\alpha)}$

• $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot v^2 \cdot \operatorname{cotg}^2(\alpha) \cdot v = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi \cdot v^3 \cdot \operatorname{cotg}^2(\alpha)}}$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^3 \cdot 3 = \underline{\underline{10^3 \cdot \pi\ cm^3}}$

• $S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot v^2 \cdot \operatorname{cotg}^2(\alpha) + \pi \cdot v \cdot \operatorname{cotg}(\alpha) \cdot \frac{v}{\sin(\alpha)}$

$S = \pi \cdot v^2 \cdot \operatorname{cotg}(\alpha)\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\alpha)}\right)$

$\underline{\underline{S = \pi \cdot v^2 \cdot \operatorname{cotg}(\alpha) \cdot \left(\frac{\cos(\alpha) + 1}{\sin(\alpha)}\right)}}$

$\Rightarrow S = \pi \cdot 100 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{\frac{1}{2}}\right) = 100\sqrt{3} \cdot \pi \cdot (\sqrt{3} + 2)$

$\underline{\underline{S = 100\pi \cdot (3 + 2\sqrt{3})\ cm^2}}$

• $\underline{V = 5\ dm^3 \wedge v = r} \Rightarrow v, r = ?$

$V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ VÁLEC

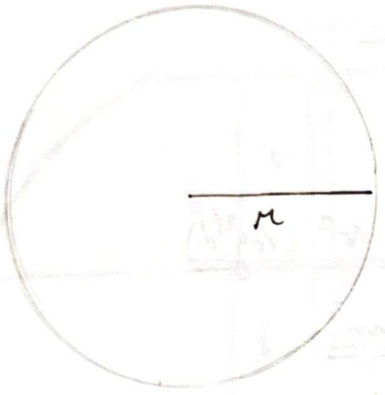
$V = \pi \cdot r^3$

$\underline{\underline{r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}}$

$\underline{\underline{v = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}}}$

• Klubko vlny → $r = 8\,cm \wedge d$ vlny $= 1\,mm = 0{,}1\,cm$

=> délka vlny $s = ?$



$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$V = s \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = s \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{16}{3} \cdot \frac{r^3}{d^2} = s$$

$$\Rightarrow s = \frac{16}{3} \cdot \frac{8^3}{10^{-2}}\ cm$$

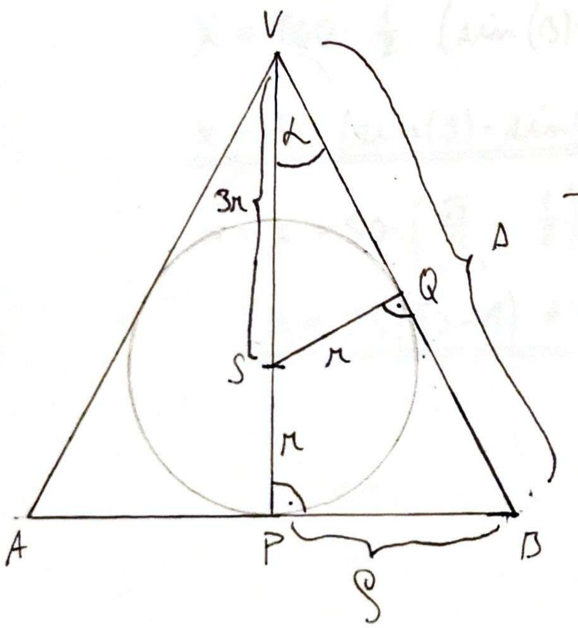
$$s = \frac{1}{3} \cdot 2^{13} \cdot 10^2\ cm$$

$$s \doteq 2730\ m$$

• Koule vepsaná do kužele

→ koule má poloměr r a kužel má výšku $4r$ → $v = 4r$

=> poměr objemů a obsahů



→ $\triangle SQV$: $|VQ|^2 = 9r^2 - r^2 = 8r^2 \Rightarrow |VQ| = r \cdot 2\sqrt{2}$

: $tg(\alpha) = \frac{r}{r \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

→ $\triangle PBV$: $tg(\alpha) = \frac{\rho}{4r} \Rightarrow \rho = tg(\alpha) \cdot 4r$

$\rho = r\sqrt{2}$

: $s^2 = 16r^2 + \rho^2 = 16r^2 + 2r^2 = 18r^2$

$s = r \cdot 3\sqrt{2}$

• $S_o = 4\pi \cdot r^2$

• $S_\Delta = \pi \cdot \rho^2 + \pi \cdot \rho \cdot s$

$S_\Delta = \pi \cdot 2r^2 + \pi \cdot r\sqrt{2} \cdot r \cdot 3\sqrt{2}$

$S_\Delta = \pi \cdot 2r^2 + \pi \cdot 6r^2$

$S_\Delta = 8\pi \cdot r^2$

→ $S_\Delta : S_o$

$8\pi \cdot r^2 : 4\pi \cdot r^2$

$2 : 1$

• $V_o = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

• $V_\Delta = \frac{1}{3}\pi \cdot \rho^2 \cdot v$

$V_\Delta = \frac{1}{3}\pi \cdot 2r^2 \cdot 4r$

$V_\Delta = \frac{8}{3}\pi \cdot r^3$

$V_\Delta : V_o$

$\frac{8}{3}\pi \cdot r^3 : \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$2 : 1$

⇒ koule má poloměr r a kužel má výšku $n \cdot r$

$$\Rightarrow v = n \cdot r \quad \wedge \quad n > 2$$

• $\underline{\triangle SQV}$: $|VQ|^2 = (n-1)^2 \cdot r^2 - r^2 = r^2(n^2 - 2n + 1 - 1)$

$$|VQ| = r \cdot \sqrt{n^2 - 2n}$$

$$: tg(\alpha) = \frac{r}{r\sqrt{n^2-2n}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{n^2-2n}}}}$$

• $\underline{\triangle PBV}$: $tg(\alpha) = \frac{\rho}{n \cdot r} \Rightarrow \rho = n \cdot r \cdot tg(\alpha)$

$$\rho = \frac{n \cdot r \cdot \sqrt{n^2-2n}}{n^2 - 2n}$$

$$\underline{\underline{\rho = \frac{r \cdot \sqrt{n^2-2n}}{n-2}}}$$

$$: s^2 = n^2 \cdot r^2 + \rho^2 = n^2 \cdot r^2 + \frac{r^2 \cdot (n^2-2n)}{(n-2)^2}$$

$$s^2 = r^2 \cdot \left(\frac{n^2 \cdot (n-2)}{(n-2)} + \frac{n(n-2)}{(n-2)^2} \right) = r^2 \cdot \left(\frac{n^2 \cdot (n-2)}{n-2} + \frac{n}{n-2} \right)$$

$$\underline{\underline{s = r \cdot \frac{\sqrt{n^2 \cdot (n-2) + n}}{\sqrt{n-2}}}} = \frac{r \cdot \sqrt{n^2 \cdot (n-2)^2 + n \cdot (n-2)}}{n-2} = \frac{r \cdot \sqrt{(n^2-2n)^2 + (n^2-2n)}}{n-2}$$

• $\underline{V_o = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3}$

• $V_\Delta = \frac{1}{3} \pi \cdot \rho^2 \cdot v = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{r^2 \cdot n \cdot (n-2)}{(n-2)^2} \cdot n \cdot r = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{r^3 \cdot n^2}{n-2}$

$$\underline{V_\Delta = \frac{n^2}{3(n-2)} \cdot \pi \cdot r^3}$$

$$\left. \begin{array}{c} \Rightarrow V_\Delta : V_o \\ \frac{n^2}{3(n-2)} : \frac{4}{3} \end{array} \right\} \underline{\underline{\frac{n^2}{n-2} : 4}}$$

• $\underline{S_o = 4 \pi \cdot r^2}$

• $S_\Delta = \pi \cdot \rho^2 + \pi \cdot \rho \cdot s = \pi \left(\frac{r^2 \cdot n}{n-2} + \frac{r\sqrt{n^2-2n}}{n-2} \cdot \frac{r\sqrt{(n^2-2n) \cdot (n^2-2n+1)}}{n-2} \right)$

$$S_\Delta = \pi \left(\frac{r^2 \cdot n}{n-2} + \frac{r^2 \cdot \sqrt{(n^2-2n)^2 \cdot (n^2-2n+1)}}{(n-2)^2} \right) = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{n \cdot (n-2) + n \cdot (n-2) \cdot \sqrt{n^2-2n+1}}{(n-2)^2} \right)$$

$$S_\Delta = \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{n + n \cdot (n-1)}{n-2} \right)$$

$$\underline{S_\Delta = \frac{n^2}{n-2} \cdot \pi \cdot r^2} \quad \Rightarrow S_\Delta : S_o = \underline{\underline{\frac{n^2}{n-2} : 4}} \quad \Rightarrow V_\Delta : V_o = S_\Delta : S_o$$