KUŽELOSEČKY

- rovinné křivky → průniky roviny s pláštěm rotační kuželové plochy

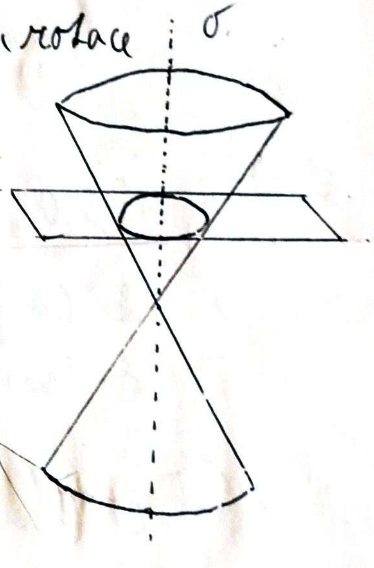
- kružnice
- elipsa

} uzavřené křivky

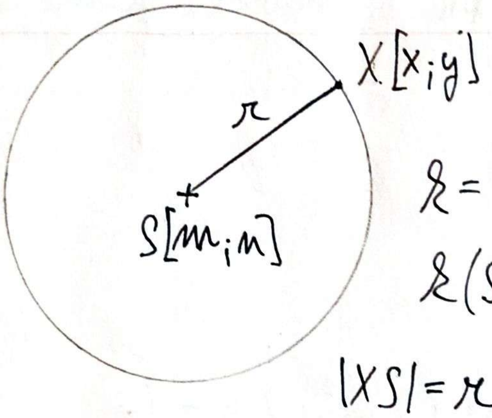
- parabola – rovina protne pouze jednu část kuželové plochy
- hyperbola – rovina protne obě části kuželové plochy

→ Kružnice

- množina bodů s konstantní vzdáleností od středu
- průnik rotační k. p. s rovinou kolmou na osu rotace



→ rovnice



$k = \{X \in \Pi_2 ; |XS| = r\}$

$k(S, r)$

$$|XS| = r = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}$$

→ středová rovnice: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

→ obecná rovnice

$$x^2 - 2xm + m^2 + y^2 - 2yn + n^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xm - 2yn + (m^2 + n^2 - r^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

→ příklady

- $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0 \rightarrow S, r = ?$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 16 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4^2 \Rightarrow r = 4 \wedge S[1;-2]$$

• $A[2,1]$, $B[2,5]$, $C[4,5]$, $D[-1,2]$ – leží na stejné kružnici?

$k(A,B,C): k: x^2+y^2+ax+by+c=0$

$A: 4+1+2a+b+c=0$

$B: 4+25+2a+5b+c=0$

$C: 16+25+4a+5b+c=0$

$$\left.\begin{aligned}2a+b+c&=-5\\2a+5b+c&=-29\end{aligned}\right\}\ominus\ 4b=-24 \Rightarrow \underline{b=-6}$$

$$\left.\begin{aligned}2a+5b+c&=-29\\4a+5b+c&=-41\end{aligned}\right\}\ominus\ 2a=-12 \Rightarrow \underline{\underline{a=-6}}$$

$-12-6+c=-5 \Rightarrow \underline{\underline{c=18-5=13}}$

$\Rightarrow k: x^2+y^2-6x-6y+13=0$

$D: 1+4+6-12+13 \neq 0 \Rightarrow D \notin k \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{neleží}}}$

7; $A[-5,0]$, $B[2,-1]$, $C[1,2]$ → $\triangle ABC$ ⇒ kružnice opsaná = ?

$k: (m-x)^2+(n-y)^2=r^2$

$$\begin{cases}A: (m+5)^2+n^2=r^2\\B: (m-2)^2+(n+1)^2=r^2\\C: (m-1)^2+(n-2)^2=r^2\end{cases}$$

$A,B: \cancel{m^2}+10m+25+\cancel{n^2}=\cancel{m^2}-4m+4+\cancel{n^2}+2n+1$

$14m+20=2n \Rightarrow \underline{\underline{n=7m+10}}$

$A,C: \cancel{m^2}+10m+25+\cancel{n^2}=\cancel{m^2}-2m+1+\cancel{n^2}-4n+4$

$12m+20=-4n=-28m-40$

$40m=-60 \Rightarrow \underline{\underline{m=-\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow n=-\frac{21}{2}+10=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow A: \left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{49}{4}+\frac{1}{4}=\frac{50}{4}=r^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{k: \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}}$

$\underline{\underline{S\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right] \wedge r=\frac{5\sqrt{2}}{2}}}$

5) a) $K[3,2],\ L[1,-4] \wedge K,L \in k \wedge S \in p: y=-x$

$k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \wedge S[m,n] \in p \Rightarrow n=-m$

$K: (3-m)^2+(2-n)^2=r^2$

$L: (1-m)^2+(-4-n)^2=r^2$

$9-6m+4-4n=1-2m+16+8n$

$-4m+13=12n+17$

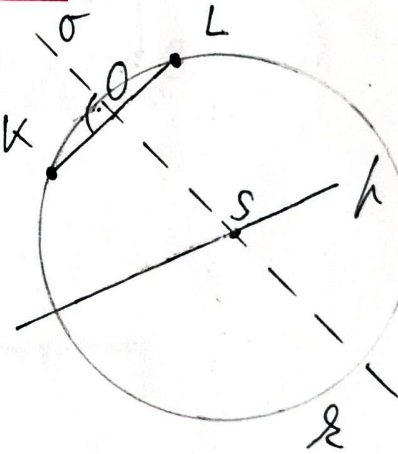
$4n=12n+4 \Rightarrow -8n=4 \Rightarrow \underline{\underline{n=-\frac{1}{2}}}$

$\underline{\underline{m=\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow K: \left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2=2\cdot\frac{25}{4}=\frac{25}{2}=r^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{k: \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}}}$

b) $K[3,2],\ L[1,-4] \wedge K,L \in k \wedge S \in p: x+3y+1=0$



$O=S_{KL}=[2,-1]$

$\vec{KL}=(-2,-6) \rightsquigarrow (1,3)=\vec{n}_\sigma$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \sigma: x+3y+d=0\\ O\in\sigma: 2-3+d=0\end{array}\right\}\ \sigma: x+3y+1=0$

$S \in \sigma \cap p \wedge \sigma \equiv p$

$\Rightarrow S[m,n] \Rightarrow m+3n+1=0 \Rightarrow m=-3n-1$

$\Rightarrow S[-3n-1;\ n]$

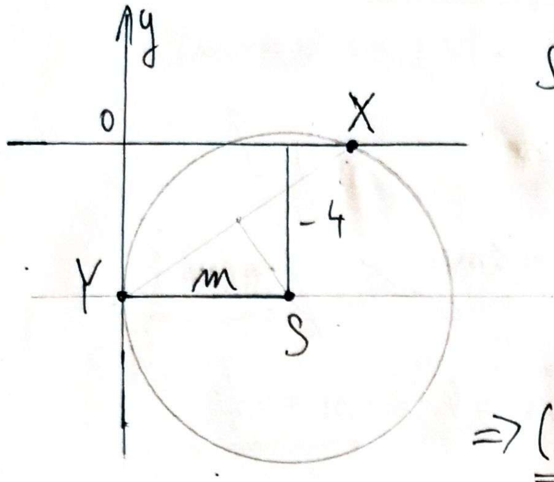
$\Rightarrow r=|SK| \Rightarrow r^2=(-3n-4)^2+(n-2)^2=(3n+4)^2+(n-2)^2=$

$=9n^2+24n+16+n^2-4n+4=$

$=10n^2+20n+20$

$\Rightarrow \underline{\underline{k: (x+3n+1)^2+(y-n)^2=10n^2+20n+20}}$

• k: $Y[0;-4]$ - bod dotyku $\wedge$ $X[6;0]$ - průsečík



$$S[m;-4] \wedge |m| = r$$

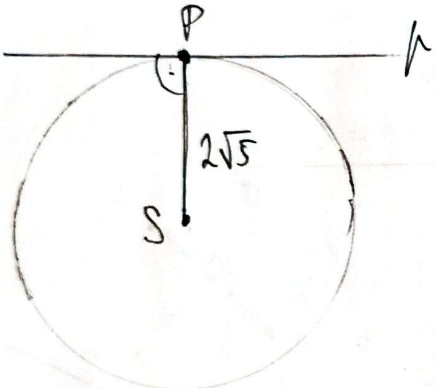
$$|SY| = |SX| \Rightarrow m^2 = (m-6)^2 + 16$$

$$0 = -12m + 36 + 16$$

$$12m = 52 \Rightarrow \underline{\underline{m = \frac{13}{3} = r}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\left(x - \frac{13}{3}\right)^2 + (y+4)^2 = \frac{169}{9}}}$$

• k: dotýká se $p: 2x - y - 4 = 0$ v bodě $P[3,2]$ $\wedge$ $r = 2\sqrt{5}$



$$S[m,n] \rightarrow |SP| = 2\sqrt{5} \wedge \vec{SP} \perp p \Rightarrow \vec{SP} \cdot \vec{v_p} = 0$$

$\vec{n_p}(2,-1)$

$\vec{v_p}(1,2)$

$\vec{SP}(m-3, n-2)$

$$(m-3)^2 + (n-2)^2 = 20$$

$$(m-3) + 2n - 4 = 0$$

$$m - 3 = 4 - 2n$$

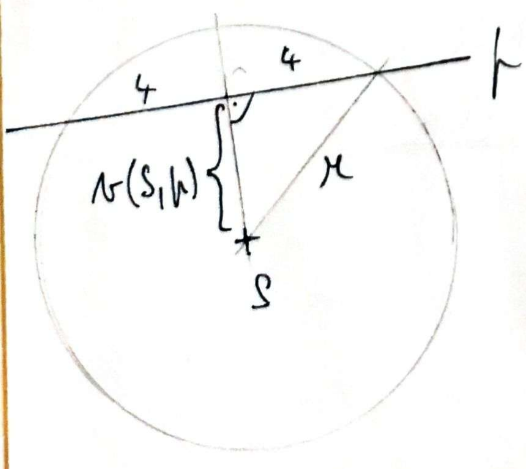
$$\Rightarrow (4-2n)^2 + (n-2)^2 = 20$$

$$16 - 16n + 4n^2 + n^2 - 4n + 4 - 20 = 0$$

$$5n^2 - 20n = 0 = n(n-4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow n_1 = 0 \Rightarrow m_1 = 7 \\ &n_2 = 4 \Rightarrow m_2 = 7 - 8 = -1 \end{aligned}\right\} S_1[7,0] \quad S_2[-1,4]$$

• k: $S[-5,4]$ $\wedge$ $p: 2x - y + 4 = 0$ vytíná tětivu $d = 8$



$$r^2 = v^2(S,p) + 16$$

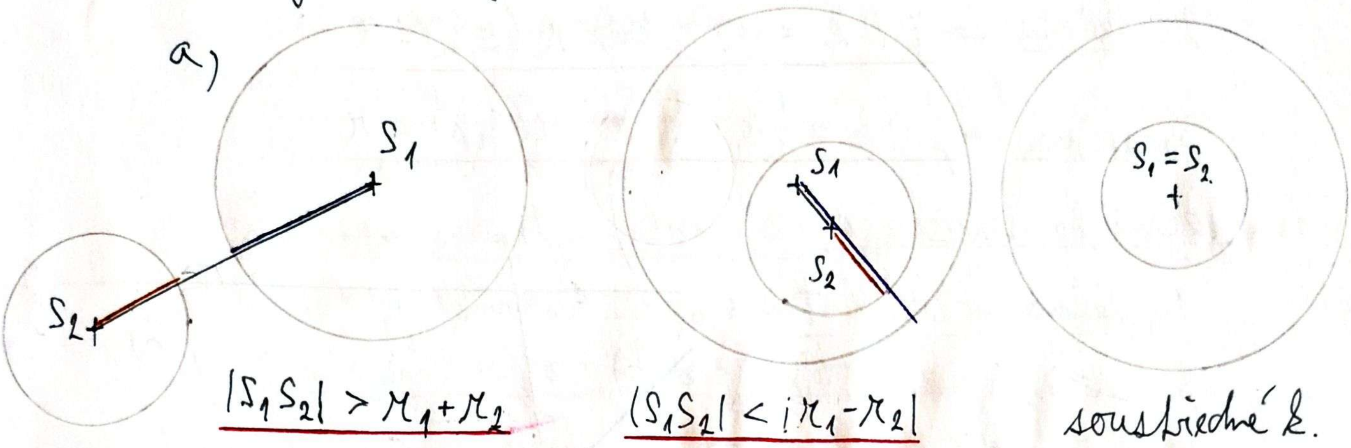
$$r^2 = \frac{(-10-4+4)^2}{4+1} + 16 = \frac{100}{5} + 16 = \underline{\underline{36}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k: (x+5)^2 + (y-4)^2 = 6^2}}$$

→ Vzájemná poloha dvou kružnic

1) žádný společný bod

a)



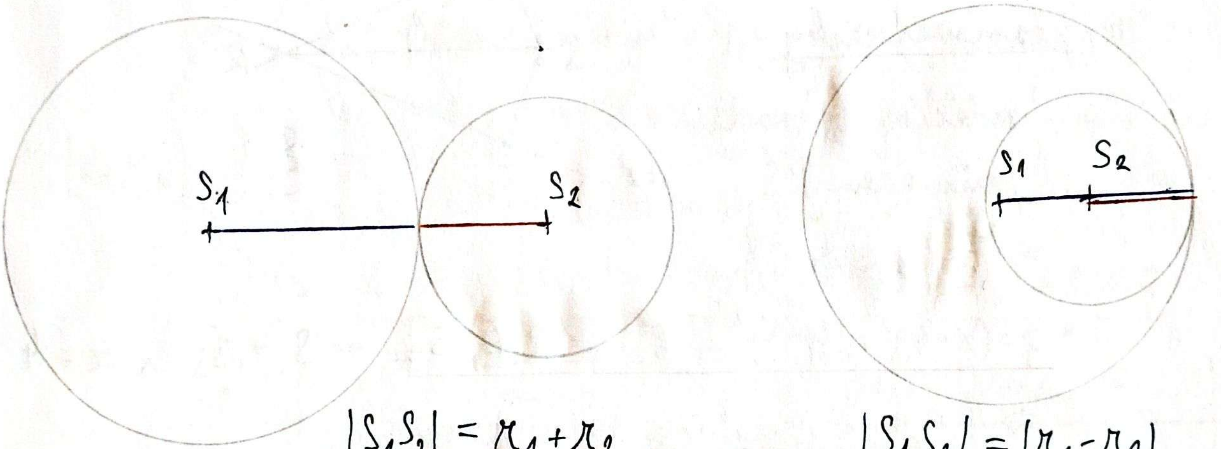
$|S_1S_2| > r_1 + r_2$ | $|S_1S_2| < |r_1 - r_2|$ | soustředné k.

2) jeden společný bod

- spojnice středů 2 kružnic = středná

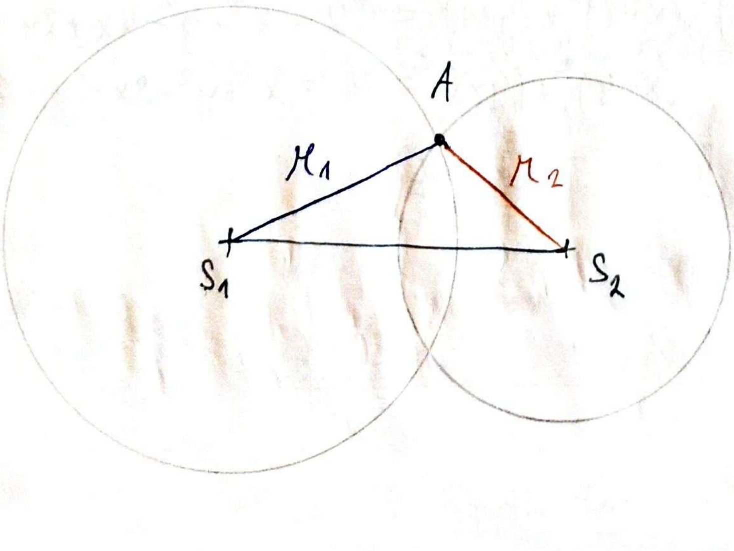
⇒ bod dotyku leží na středné

a) vnější bod dotyku | b) vnitřní bod dotyku



$|S_1S_2| = r_1 + r_2$ | $|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$

3) dva společné body



trojúhelníková nerovnost

$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$

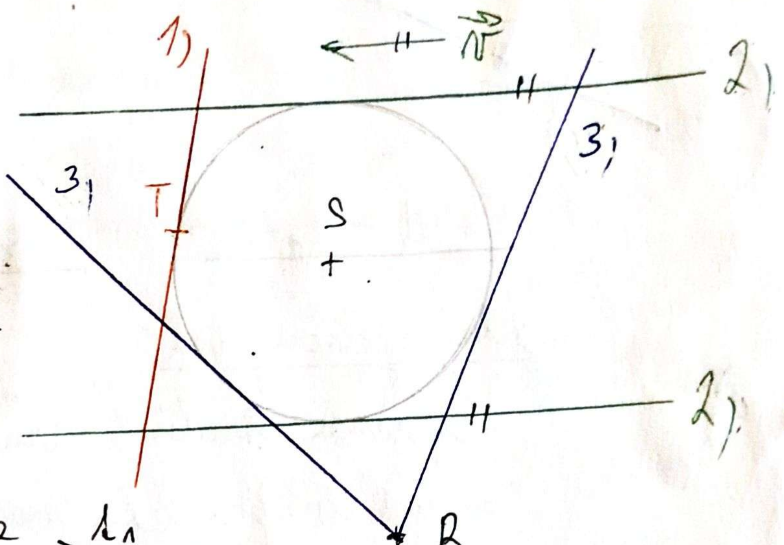
Vzájemná poloha kružnice a přímky

1) **nesečna** → $p \cap k = \emptyset \iff v(S,p) > r$

2) **tečna** → $p \cap k = \{T\} \iff v(S,p) = r$

3) **sečna** → $p \cap k = \{A, B\} \iff v(S,p) < r$

Tečny ke kružnici



1) **tečna v bodě T**

$v(S,t) = r \wedge T[x,y]$

2) **tečna daná směrem $\vec{v}$**

$\vec{v}(a,b) \Rightarrow \vec{n}_1(b,-a)$

$\Rightarrow t: bx - ay + c = 0$

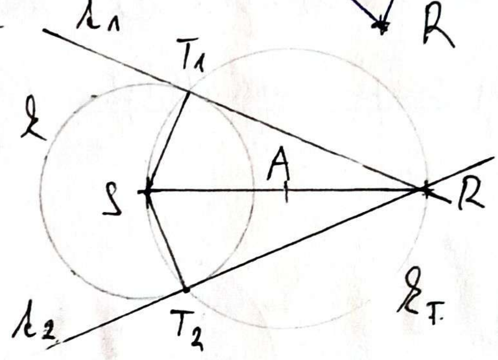
$v(S,t) = r$ v rovnice

3) **tečna z bodu R**

a) **planimetricky**

- udělám k_T nad průměrem RS

$\Rightarrow T_1, T_2 \in k_T \cap k$



• $k: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \wedge R[0,-5]$ → $S[4,3] \wedge r = 4$

$\Rightarrow$?: je R vnitřní nebo vnější bod

$\Rightarrow |RS| = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} > 4 = r \Rightarrow$ vnější

$\sqrt{80} \to 2\sqrt{20}$

1) $A = S_{RS} = [2,-1]$

2) $k_T(A, \frac{1}{2}|RS|): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 20 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$

$$\left.\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+1)^2 &= 20 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 16 = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 \end{aligned}\right\} \ominus$$

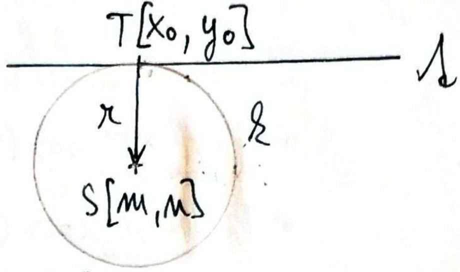
3) $k_T \cap k$:

$\Rightarrow T_1[0,3] \quad T_2\left[\frac{32}{5}; -\frac{1}{5}\right]$

4) $\vec{v}_1 = \vec{RT_1} \Rightarrow t_1: x = 0$

$\vec{v}_2 = \vec{RT_2} \Rightarrow t_2: 3x - 4y - 20 = 0$

b) rovnice tečny kružnice



$k: (x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

$\vec{TS}=(m-x_0,\ n-y_0)=\vec{n}_t$

$\Rightarrow t: (m-x_0)x+(n-y_0)y+c=0 \rightarrow c=?$

$T\in k: (x_0-m)^2+(y_0-n)^2=r^2$

$T\in t: (m-x_0)x_0+(n-y_0)y_0+c=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_0^2+y_0^2-2mx_0-2ny_0+m^2+n^2-r^2=0 \\ -x_0^2-y_0^2+m\cdot x_0+n\cdot y_0+c=0 \end{array}\right\} \oplus$$

$-mx_0-ny_0+m^2+n^2-r^2+c=0$

$\Rightarrow c=m(x_0-m)+n(y_0-n)+r^2$

$\Rightarrow t: (m-x_0)x+m(x_0-m)+(n-y_0)y+n(y_0-n)+r^2=0$

$(m-x_0)(x-m)+(n-y_0)(y-n)=-r^2$

$t: (x_0-m)(x-m)+(y_0-n)(y-n)=r^2$

$x_0x-x_0m-xm+m^2+y_0y-y_0n-yn+n^2-r^2=0$

$x_0x+y_0y-m(x+x_0)-n(y+y_0)+m^2+n^2-r^2=0$

$T[x_0,y_0]$

$\Rightarrow k: x^2+y^2+ax+by+c=0$

$t: x_0x+y_0y+\frac{a}{2}(x+x_0)+\frac{b}{2}(y+y_0)+c=0$

• $k: (x-5)^2+(y-10)^2=9$ → veď tečny bodem $A[2,1]$

→ je A vnitřní nebo vnější bod?

$(2-5)^2+(1-10)^2=9+81=90>9 \Rightarrow$ vnější

$\Rightarrow t: (x_0-5)(x-5)+(y_0-10)(y-10)=9 \ \wedge\ T[x_0,y_0]$

$A\in t: (x_0-5)\cdot(-3)+(y_0-10)(-9)=9$

$-3x_0+15-9y_0+90-9=0 \Rightarrow x_0=-3y_0+32$

$T\in k: (x_0-5)^2+(y_0-10)^2=9=(27-3y_0)^2+(y_0-10)^2$

$\Rightarrow 27^2-6\cdot 27y_0+9y_0^2+y_0^2-20y_0+10^2=9$

$10y_0^2-182y_0+820=0=5y^2-91y_0+410$

$\Rightarrow y_{01}=10 \ \wedge\ y_{02}=\frac{41}{5} \Rightarrow x_{01}=2 \ \wedge\ x_{02}=\frac{37}{5}$

$\Rightarrow T_1[2,10] \Rightarrow t_1: -3x+15=9 \Rightarrow x-2=0$

$\Rightarrow T_2\left[\frac{37}{5},\frac{41}{5}\right] \Rightarrow t_2: \frac{12}{5}x-12-\frac{9}{5}y+18=9 \Rightarrow 4x-3y-5=0$

→ Vzájemná poloha bodu a kružnice → obecná ⇒ >/=/< 0 místo r^2

- $|AS| > r \iff (x-m)^2 + (y-n)^2 > r^2$ → vnější oblast kružnice
- $|AS| = r \iff (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ → leží na kružnici
- $|AS| < r \iff (x-m)^2 + (y-n)^2 < r^2$ → vnitřní olast kružnice

→ Vzájemná poloha přímky a kružnice

- jde přes vzdálenost $v(S,p)$ - což u ostatních kuželoseček nejde

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} p: ax + by + c = 0 \\ k: x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{array}\right\} \text{dosadím} \Rightarrow \text{vznikne parametrická kvadr. rce}$$

$p \cap k = \emptyset \iff D < 0$

$p \cap k = \{T\} \iff D = 0$

$p \cap k = \{A; B\} \iff D > 0$

- $k: x^2 + y^2 + 2x = 0$

  $p: y = rx - r \wedge r \in \mathbb{R}$ - parametr

  ⇒ diskuse pro která r je přímka sečna / tečna / nesečna

$\Rightarrow x^2 + (rx - r)^2 + 2x = 0$

$x^2 + r^2x^2 - 2r^2x + r^2 + 2x = 0$

$x^2(1 + r^2) + x(2 - 2r^2) + r^2 = 0$

$\Rightarrow D = 4 - 8r^2 + 4r^2 - 4r^2(1 + r^2)$

$D = 4 - 8r^2 + 4r^2 - 4r^2 - 4r^4 = \underline{\underline{4 - 12r^2}}$

⇒ chci tečnu: $4 - 12r^2 = 0 \Rightarrow 1 = 3r^2 \Rightarrow \underline{\underline{r = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{t_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge t_2: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}}}$

→ sečna → $4 - 12r^2 > 0$

→ nesečna → $4 - 12r^2 < 0$

• $k: x^2-6x+y^2-4y-5=0 \wedge t \parallel p: x+y+4=0 \to t=?$

$\Rightarrow t: x+y+c=0 \Rightarrow y=-x-c$

$\Rightarrow x^2-6x+(x+c)^2+4(x+c)-5=0$

$x^2-6x+x^2+2xc+c^2+4x+4c-5=0$

$2x^2+x(2c-2)+(c^2+4c-5)=0$

$D=(2c-2)^2-8(c^2+4c-5)$

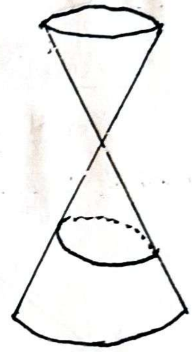
$D=4c^2-8c+4-8c^2-32c+40=-4c^2-40c+44$

$\Rightarrow$ tečna $\Rightarrow D=0=-4c^2-40c+44$

$\Rightarrow c^2+10c-11=0$ $\quad c_1=-11,\ c_2=1$

$\Rightarrow t_1: x+y-11=0$

$t_2: x+y+1=0$

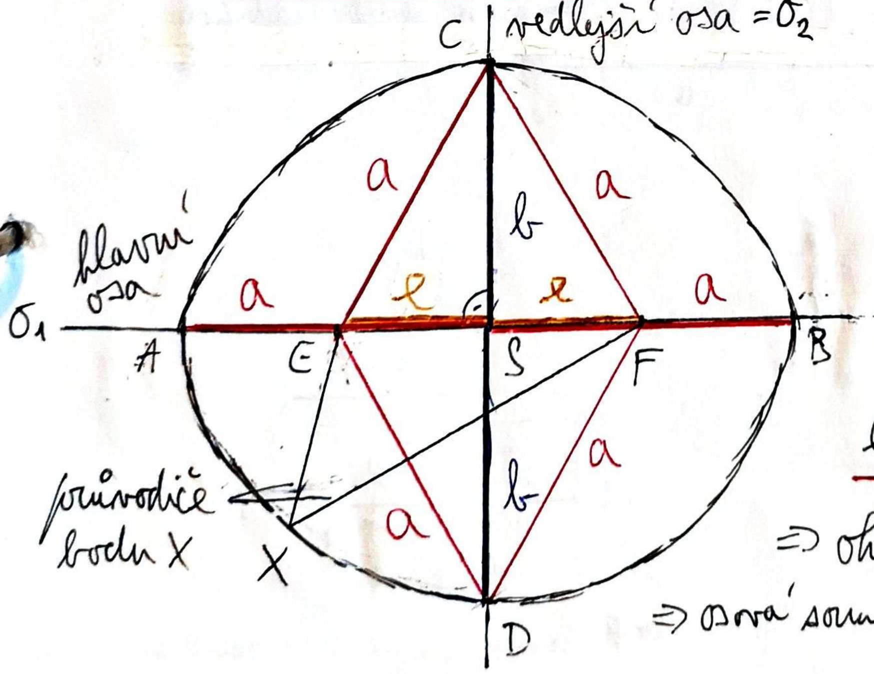


→ Elipsa

→ průnik kuželové/válcové plochy s rovinou

• E, F – ohniska $\wedge$ $|XE|+|XF|=$ konst. $=2a$

$\Rightarrow \mathcal{E}=\{X\in E_2;\ |XE|+|XF|=2a\}$



A, B – hlavní vrcholy

C, D – vedlejší vrcholy

$|AS|=a$ – délka hlavní poloosy

$|CS|=b$ – délka vedlejší poloosy

$|ES|=e$ – excentricita

$e^2=a^2-b^2$ → přes Pyt. větu

⇒ ohnisková vlastnost elipsy

⇒ osová souměrnost podle o_1, o_2 ⇒ středová souměrnost podle S

$|FA|+|FB|=|AB|=2a \wedge |CE|=|CF|=a$

→ elipsa je jako zrcadlový sál → z 1. ohniska se světlo odrazí do druhého

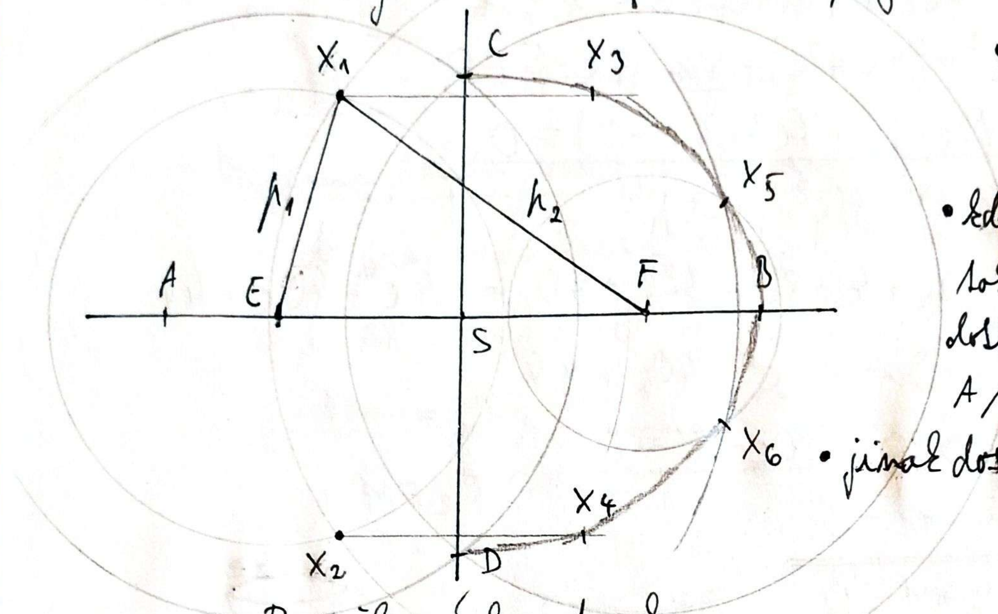
→ E, F jsou různé body a konst. $2a>|EF|$ ⇒ elipsa

⇒ vznikne kružnice o poloměru a ⇔ $E\equiv F$

→ Konstrukce elipsy

• Zahradnická konstrukce

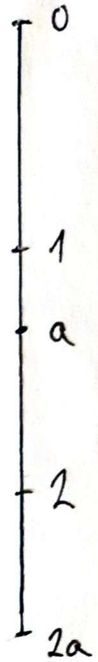
→ vychází z definice elipsy



• když $p_1 = p_2 = a$ tak dostanu C, D

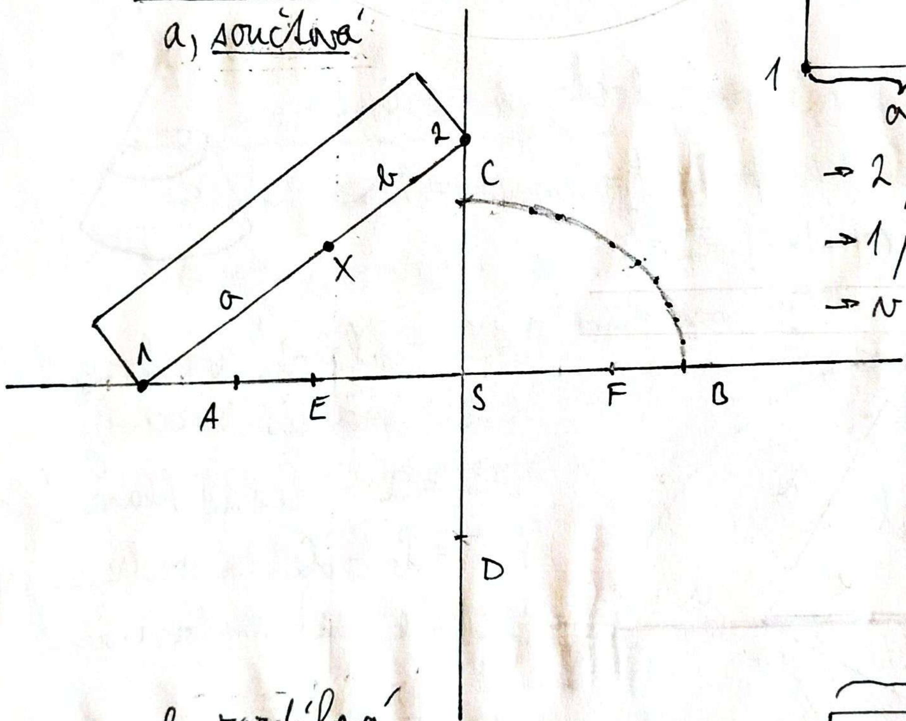
• když $p_1 = a + e$ tak se kružnice dotknou a dostanu A / B

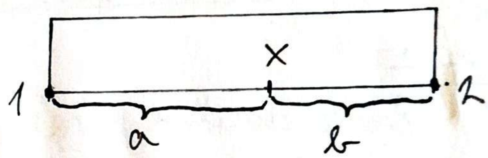
• jinak dostanu 4 body



• Proužková konstrukce

a) součtová



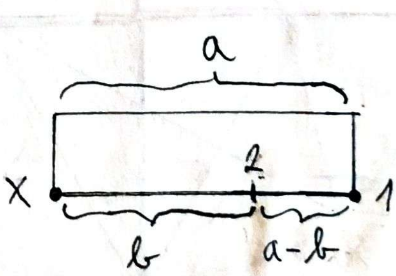


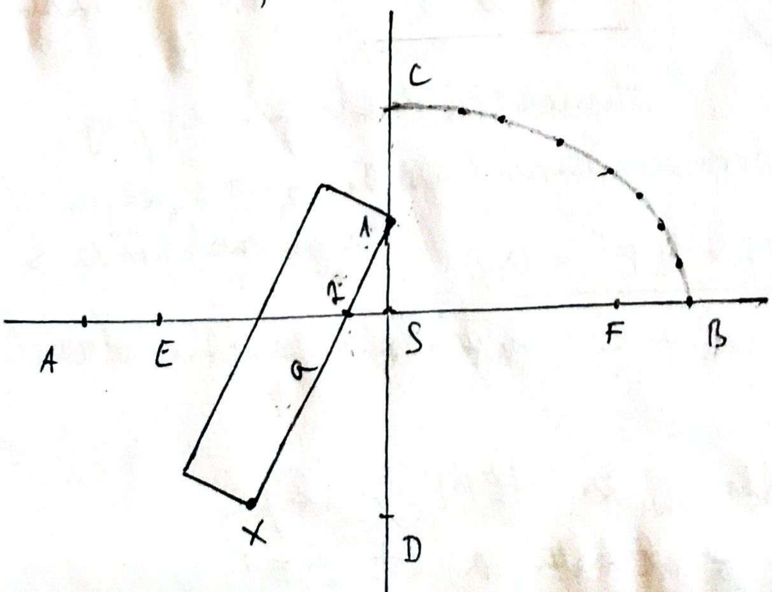
→ 2 posunuju po hlavní ose

→ 1 posunuju po vedlejší ose

→ v X je bod elipsy

b) rozdílová



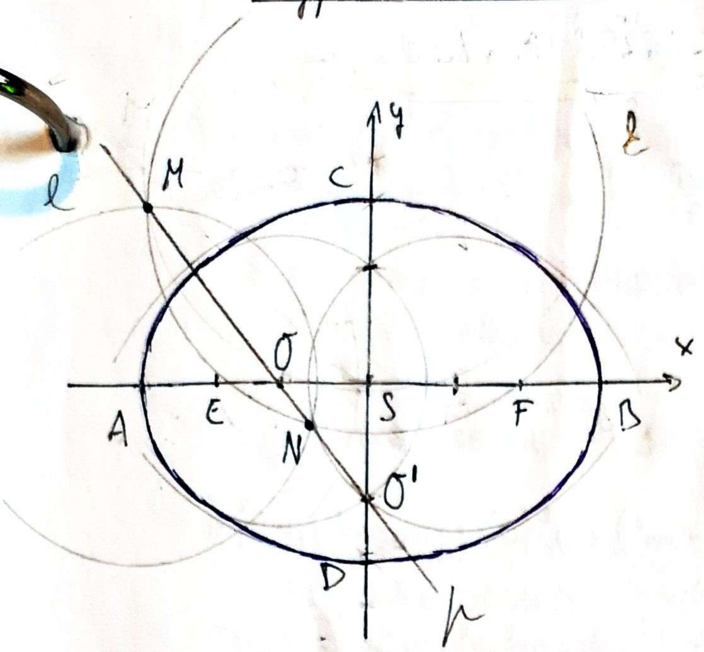


→ 2 posunuju po hlavní ose

→ 1 posunuju po vedlejší ose

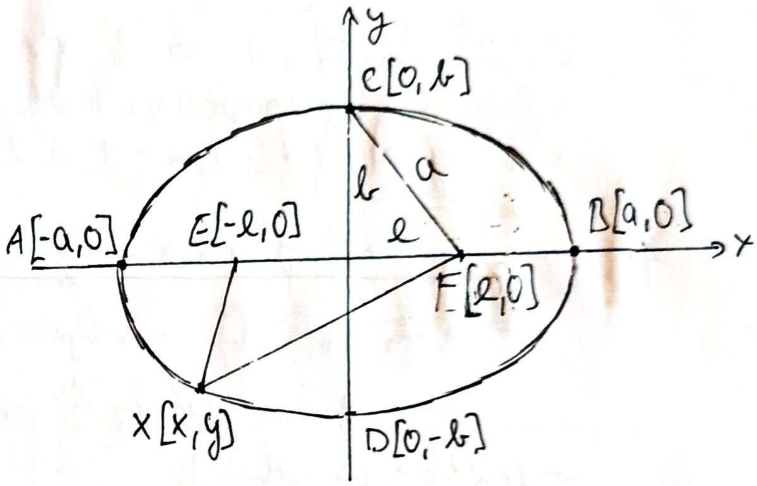
→ v X je bod elipsy

• Hyperoskulační kružnice



1, $k(C, a)$
2, $l(A, b)$
3, $k \cap l = \{M, N\}$
4) $p = \leftrightarrow MN$
5, $O = p \cap AB \Rightarrow \sigma(O, |OA|)$
6, $O' = p \cap CD \rightarrow \sigma'(O', |O'C|)$
7, dle simetrie os další kružnice

→ Odvození rovnice elipsy



$X \in \mathcal{E}: |XE| + |XF| = 2a$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$(x+e)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + (x-e)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-e)^2+y^2} + 2xe = 4a^2 - 2xe$$

$$a\sqrt{(x-e)^2+y^2} = a^2 - xe$$

$2a > |EF|$

$$a^2(x^2-2xe+e^2+y^2) = a^4 - 2a^2xe + x^2e^2$$

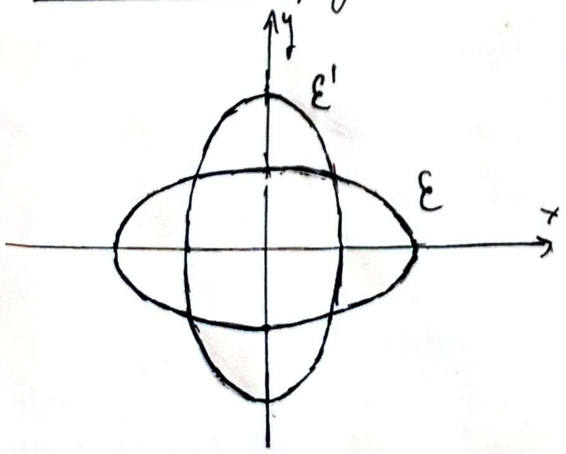
$$x^2-2xe+e^2+y^2 = a^2-2xe+x^2\cdot\frac{e^2}{a^2}$$

$$x^2\left(1-\frac{e^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - e^2 \ \wedge\ e^2 = a^2 - b^2$$

$$x^2\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \ \wedge\ S[m,n]$$

→ Hlavní osa elipsy ∥ osa y



$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}&: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \mathcal{E}'&: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\}$$ inverzní fce
x zaměním za y

jak poznat zda ℰ ○ v 0

a > b vždy!

$$\Rightarrow \mathcal{E}': \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

→ *příklad*

• $E[-1,0] \wedge F[1,0] \wedge X\left[1, \frac{8}{3}\right] \in \mathcal{E}$

↳ $e = 1 \quad \wedge \quad |XE| + |XF| = 2a$

$\sqrt{4 + \frac{64}{9}} + \sqrt{0 + \frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{100}{9}} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} + \frac{8}{3} = \frac{18}{3} = 6 = 2a$

$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b^2 = a^2 - e^2 = 9 - 1 = 8$

$\Rightarrow \mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

→ *Obecná rovnice elipsy*

$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2(x^2 - 2xm + m^2) + a^2(y^2 - 2yn + n^2) = a^2b^2$

$x^2 \cdot b^2 + y^2 \cdot a^2 - x \cdot b^2 2m - y \cdot a^2 2n + b^2m^2 + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$

$\Rightarrow a_0x^2 + b_0y^2 + cx + dy + e = 0$ $- a_0, b_0, c, d, e \in \mathbb{R}$

→ $a_0 \cdot b_0 > 0$ – stejná znaménka

→ $a_0 \neq b_0$ – jinak by to mohla být kružnice (rozhodně ne $\mathcal{E}$)

→ *příklad převodu*

$x^2 + 4y^2 - 6x + 32y + 48 = 0$

$x^2 - 6x + 4(y^2 + 8y) = -48$

↳ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \to -6 = 2b \Rightarrow b = -\frac{6}{2} \Rightarrow b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$

$x^2 - 6x + 9 + 4(y^2 + 8y + 16) = -48 + 9 + 64 = 25$

$(x-3)^2 + 4(y+4)^2 = 25$

$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{\frac{25}{4}} = 1$ — $a = 5$, $b = \frac{5}{2}$, $S[3, -4]$

→ *Vzájemná poloha bodu a elipsy*

$R \in \mathcal{E} \Leftrightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad \vee \quad \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow |ER| + |FR| = 2a$

R – vnější $\Leftrightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E > 0$ — " — > 1

$\Leftrightarrow |ER| + |FR| > 2a$

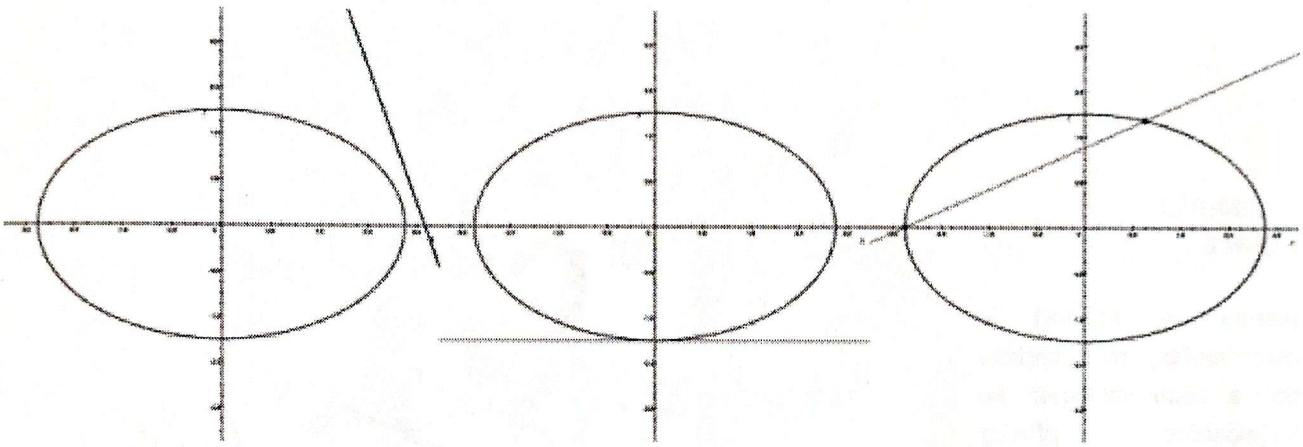
R – vnitřní $\Leftrightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E < 0$ — " — < 1

$\Leftrightarrow |ER| + |FR| < 2a$

Vzájemná poloha elipsy a přímky → vždy řeším soustavu

↳ $D >/=/< 0$ ⇒ nezajímá mě řešení soustavy

- $p \cap E = \emptyset$ $D < 0$
  Přímka p leží vně elipsy E. Nazýváme ji **vnější přímka** (nesečna)elipsy.
- $p \cap E = \{P\}$ $D = 0$
  Přímka p se elipsy E dotýká v bodě P. Přímku p nazýváme **tečna** elipsy E.
- $p \cap E = \{X, Y\}$ $D > 0$
  Přímka elipsou prochází a protíná ji v bodech X a Y. Přímku p nazýváme **sečna** elipsy $\mathcal{E}$.



Vzájemná poloha přímky a elipsy

Příklad 1: Určete vzájemnou polohu přímky p: $x - 3y + 1 = 0$ a elipsy $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Příklad 2: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p: $x = 3 + t$, $y = 2 - 2t$; $t \in \mathbb{R}$, a elipsy $\mathcal{E}$

Věta

Rovnice $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ je rovnicí tečny k elipse $\mathcal{E}$ s rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v bodě $T[x_0; y_0]$.

Příklad 3: Určete tečnu elipsy $\mathcal{E}: \frac{(x+1)^2}{32} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$ v bodě $T[3; ?]$.

Příklad 4: Určete rovnice tečen elipsy $\mathcal{E}$, které jsou kolmé k přímce p: $4x - y + 5 = 0$.

Příklad 5: Bodem R[0,0] veďte tečny k elipse $\mathcal{E}$: $x^2+2y^2-8x+4y+12=0$.

Příklad 6: Dokažte, že bod X[6; -2] je bodem elipsy $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{4*(y+4)^2}{25}=1$ a napište rovnici tečny v daném bodě.

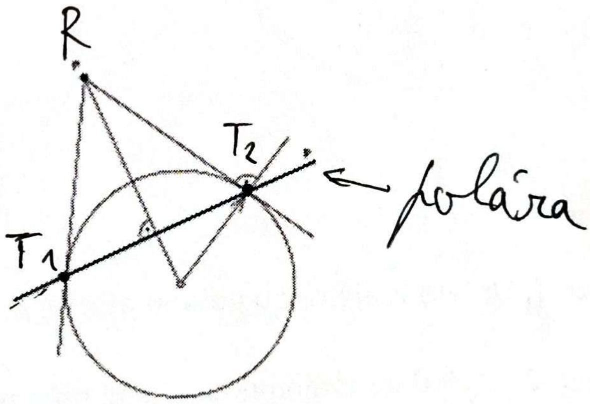
Příklad 7: ***a)*** Napište průsečíky elipsy $x^2+5y^2-12x-50y+141=0$ s přímkou y=x:

b) Určete průsečíky přímky dané rovnicí p: 4x+5y=140 s elipsou $\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$

Příklad 8: Napište rovnice tečen elipsy $(x-1)^2+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ v jejích průsečících s přímkou y=-2x.

Poznámka:
polára

[Latina < řečtina] – *matematika*, matematická polára bodu vzhledem ke kuželosečce, přímka procházející dotykovými body tečen vedených ke kuželosečce daným bodem (pólem poláry).



→ Elipsa a přímka - příklady

1) a) $\mathcal{E}: x^2+5y^2-12x-50y+141=0 \wedge p: y=x$

$x^2+5x^2-12x-50x+141=0$

$6x^2-62x+141=0$

$D=62^2-24\cdot 141=460 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{2\cdot 2\cdot 115}=2\sqrt{115}$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{62\pm 2\sqrt{115}}{12}=\frac{1}{6}(31\pm\sqrt{115})=y_{1,2}$

$\Rightarrow P_1\left[\frac{1}{6}(31+\sqrt{115});\frac{1}{6}(31+\sqrt{115})\right]$

$P_2\left[\frac{1}{6}(31-\sqrt{115});\frac{1}{6}(31-\sqrt{115})\right]$

b) $\mathcal{E}: \frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1 \wedge p: 4x+5y=140 \rightarrow x=\frac{140-5y}{4}$

$20^2\cdot x^2+25^2\cdot y^2=20^2\cdot 25^2$

$4^2\cdot 5^2\cdot x^2+5^2\cdot 5^2\cdot y^2=4^2\cdot 5^2\cdot 25^2$

$16x^2+25y^2=4^2\cdot 25^2=100^2$

$(140-5y)^2+25y^2=100^2$

$140^2-1400y+25y^2+25y^2=100^2$

$14^2\cdot 10^2-14\cdot 10^2y+50y^2=10^4$

$5y^2-140y+1960-1000=5y^2-140y+960=0$

$D=140^2-20\cdot 960=100(196-192)=400$

$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{140\pm 20}{10}=14\pm 2 \Rightarrow y_1=16 \quad y_2=12$

$\Rightarrow x_1=\frac{140-80}{4}=15 \wedge x_2=\frac{140-60}{4}=20$

$\Rightarrow P_1[15,16] \wedge P_2[20,12]$

→ Tečna na elipsu

→ stejně jako u kružnice → funguje pro všechny kuželosečky

$\mathcal{E}: Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

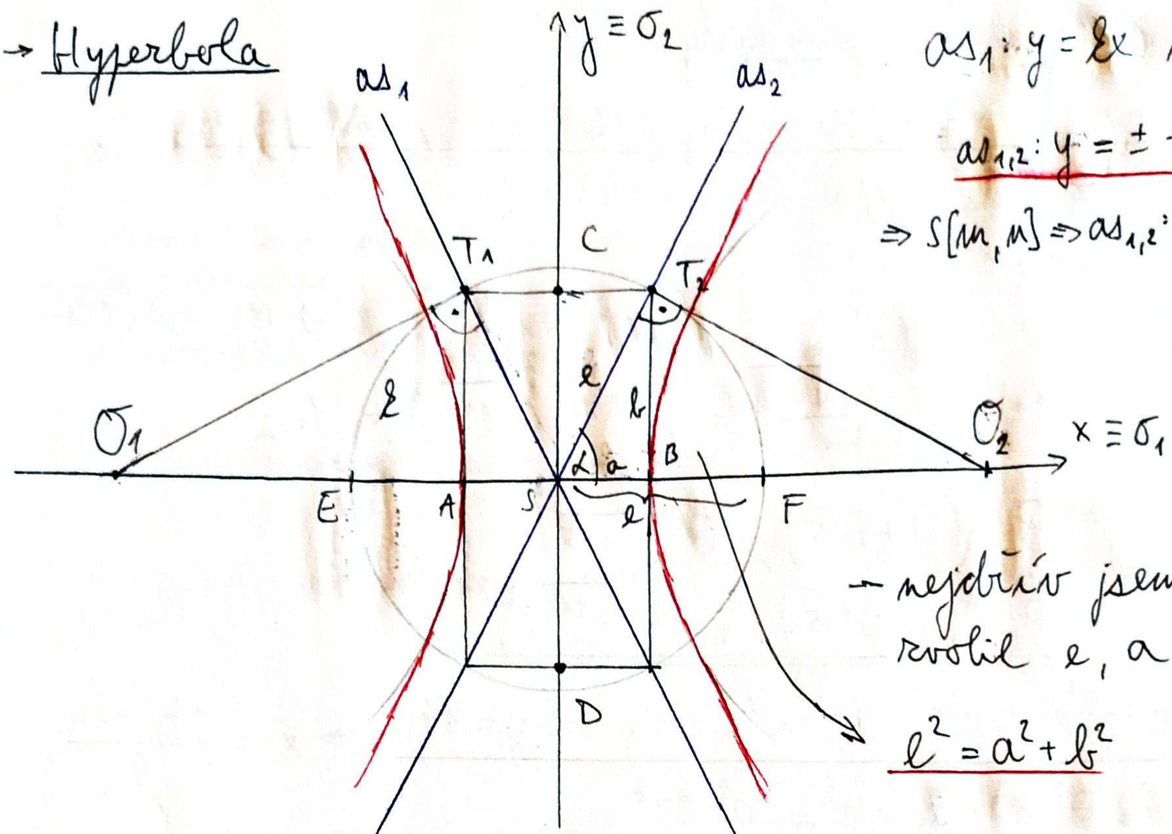
$t: Axx_0+Byy_0+\frac{C}{2}(x+x_0)+\frac{D}{2}(y+y_0)+E=0$

→ řeším soustavu rovnic a $D=0 \Leftrightarrow 1$ bod dotyku

$\mathcal{E}: \frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

$t: \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2}+\frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2}=1$

→ Hyperbola



$as_1 : y = kx \ \wedge \ k = tg\,\varphi = \frac{b}{a}$

$as_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a} x$

$\Rightarrow S[m,n] \Rightarrow as_{1,2} : y - n = \pm \frac{b}{a}(x-m)$

→ nejdřív jsem si zvolil e, a

$e^2 = a^2 + b^2$

1) kružnice $k(S, e)$
2) asymptoty $as_{1,2}$ pomocí obdélníku, charakterizujícího hyperbolu
3) hyperoskulační kružnice → středy $O_{1,2}$ získám kolmicí na $as_{1,2}$ v $T_{1,2}$
4) $\mathcal{H}$ = kružnice + přecházím do oblouku a přibližuji se asymptotě

→ charakteristické vlastnosti $\mathcal{H}$

$\mathcal{H} = \{X \in \pi_2 ; \, ||XE| - |XF|| = 2a\} \ \wedge \ |SA| = a \ \wedge \ |SE| = e \ \wedge \ e^2 = a^2 + b^2$

→ rovnice hyperboly

• $o_1 \parallel x$: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ $\quad as_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a} x \iff S[0,0]$

$\frac{x^2 - 2mx + m^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2ny + n^2}{b^2} = 1$

$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2mx + 2a^2ny + (b^2m^2 - a^2n^2 - a^2b^2) = 0$

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$\mathcal{H} \iff A \cdot B < 0 \Rightarrow A, B$ - různá znaménka

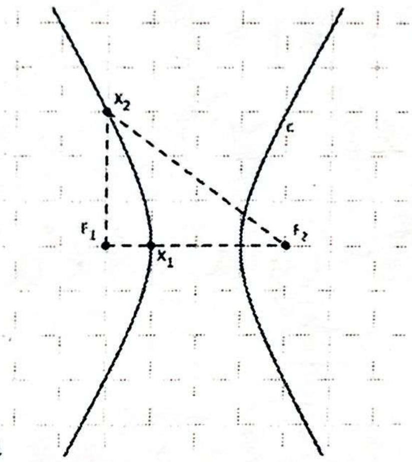
• $o_1 \parallel y$: $\frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$ $\quad as_{1,2} : x = \pm \frac{b}{a} y \Rightarrow as_{1,2} : y = \pm \frac{a}{b} x$

→ jestli $o_1 \parallel y$ v $o_1 \parallel x$ musím zjistit ze středové rovnice
→ z obecné to nezjistím

Hyperbola

Hyperbola je **kuželosečka**. Pro každý bod hyperboly platí, že **absolutní hodnota rozdílu** vzdáleností od dvou pevně daných bodů je vždy stejný. Mimochodem, v češtině je hyperbola jiné označení pro nadsázku.

Jak vypadá hyperbola



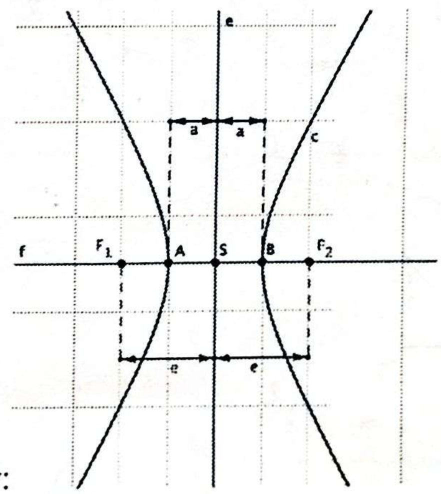
Hyperbola

Všimněte si, že na rozdíl od ostatních kuželoseček jako je elipsa, je hyperbola složena ze dvou křivek. Co znamená předchozí definice? Máme dány dvě ohniska, F_1 a F_2. Pro každý bod X na hyperbole musí platit, že rozdíl $|XF_1|-|XF_2|$ je v absolutní hodnotě stejný.

Na obrázku máme dva body X_1 a X_2. Pro X_1 nám rozdíl vyjde: $|X_1F_1|-|X_1F_2| = 1 - 3 = -2$, v absolutní hodnotě pak dostáváme výsledek 2. Stejnou hodnotu bychom měli získat pro X_2. Zkusíme to: $|X_2F_1|-|X_2F_2| = 3 - 5 = -2$, v absolutní hodnotě 2 (že je délka strany X_2F_2 rovná pěti si můžete vypočítat například pomocí Pythagorovy věty).

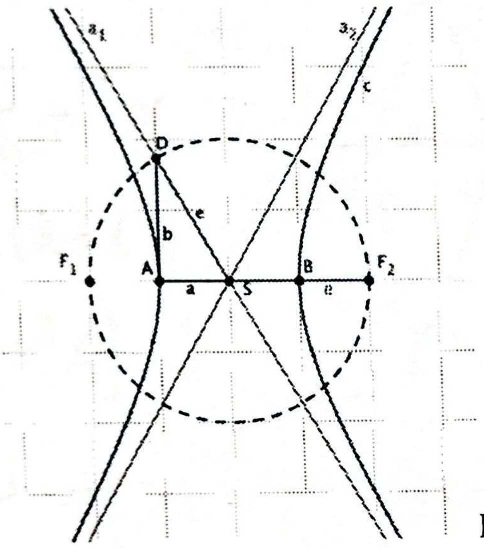
Pokud tento postup aplikujeme na všechny body hyperboly, vždy získáme výsledek 2.

Prohlédněte si rozšířený obrázek předchozí hyperboly:



- **Popis hyperboly**
- Bodům F_1 a F_2 se říká **ohniska**.
- Bod S se nazývá **střed** hyperboly a nachází se ve středu úsečky F_1F_2.
- Přímka F_1F_2 se nazývá **hlavní osa hyperboly**. Kolmice k této ose v bodě S se nazývá **vedlejší osa hyperboly**.
- Průsečíky hyperboly s hlavní osou se nazývají **vrcholy hyperboly**, na obrázku jsou to body A a B.
- Úsečky AS a BS se nazývají **hlavní poloosa hyperboly**. Jejich délku značíme a.
- Délku **vedlejší poloosy hyperboly** značíme b.
- Vzdálenost ohniska od středu se nazývá **excentricita**, značíme e. Platí vztah:

$$e=\sqrt{a^2+b^2}$$



$$e^2=a^2+b^2$$

Hyperbola s vyznačenou vedlejší poloosou

Jedná se o stejnou hyperbolu, kde především přibyly asymptoty přímky a_1, a_2, které procházejí středem S.

Hlavní poloosa a zůstává nezměněna, stále jde o úsečku AS.

Nyní ale na asymptotu naneseme bod D tak, aby vzdálenost $|SD|$ byla rovna excentricitě e. Délka úsečky AD pak představuje délku vedlejší poloosy hyperboly.

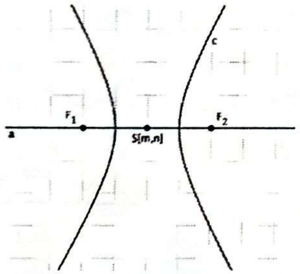
$$||XE|-|XF||=2a$$

Rovnice hyperboly

U hyperboly rozlišujeme dva různé případy. Záleží na tom, jestli je hlavní osa hyperboly rovnoběžná s osou *x* nebo s *y*. Mějme hyperbolu se středem *S* o souřadnicích [*m*, *n*].

- **Hlavní osa je rovnoběžná s osou *x*:**

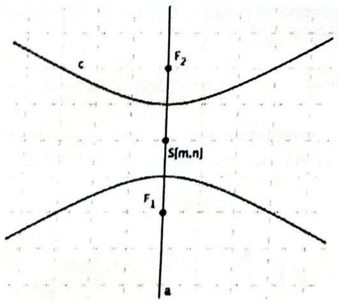
  Hyperbola, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou *x*



Rovnice: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

- **Hlavní osa je rovnoběžná s osou *y*:**

  Hyperbola, jejíž hlavní osa je rovnoběžná s osou *y*



Rovnice: $\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1$

$E[-e,0]$ $F[e,0]$ $X\in\mathcal{H}$ $X[x,y]$ $e^2=a^2+b^2$

$$||XE|-|XF||=2a$$

$$\left|\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}\right|=2a$$

$$(x+e)^2+y^2-2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2=4a^2$$

$$2x^2+2e^2+2y^2-4a^2=2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}$$

$$(x^2+y^2+e^2-2a^2)^2=((x+e)^2+y^2)((x-e)^2+y^2)$$

$$x^4+y^4+e^4+4a^4+2x^2y^2+2x^2e^2+2y^2e^2-4x^2a^2-4y^2a^2-4e^2a^2=$$

$$[(x+e)^2(x-e)^2]^2+y^2(x+e)^2+y^2(x-e)^2+y^4$$

$$[x^2-e^2]^2+y^2(2x^2+2e^2)+y^4=x^4+y^4+e^4-2x^2e^2+2x^2y^2+2y^2e^2$$

$$\Rightarrow 4a^4+4x^2e^2-4x^2a^2-4y^2a^2-4e^2a^2=0$$

$$a^4+x^2e^2=x^2a^2+y^2a^2+e^2a^2=a^2(x^2+y^2+e^2)$$

$$a^4+x^2(a^2+b^2)=a^2(x^2+y^2+a^2+b^2)$$

$$a^4+x^2a^2+x^2b^2=a^2x^2+a^2y^2+a^4+a^2b^2$$

$$x^2b^2-y^2a^2=a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$o_1 \parallel \vec{x}$: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$

$o_1 \parallel \vec{y}$: $\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1$

inverzní fce
⇒ záměním x za y
jako u Elipsy

→ Hyperbola - příklady

→ převod z obecné rovnice na středovou

$\mathcal{H}: -11x^2 + 5y^2 - 22x - 30y = 21$

$5(y^2 - 6y) - 11(x^2 + 2x) = 21$

$5(y^2 - 6y + 9) - 11(x^2 + 2x + 1) = 21 + 5 \cdot 9 - 11$

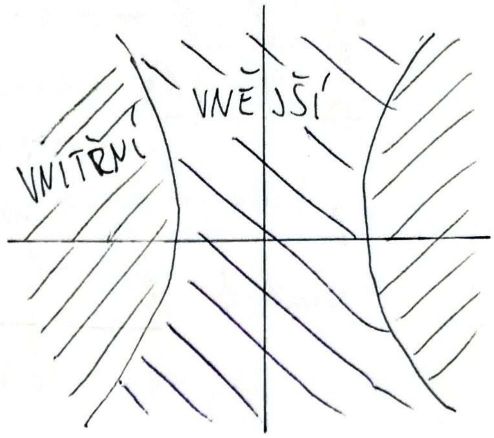
$5(y-3)^2 - 11(x+1)^2 = 55$

$\frac{(y-3)^2}{11} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$ $\quad a = \sqrt{11} \quad o_1 \parallel y \quad S[-1; 3]$

$b = \sqrt{5} \quad F[-1; -1]$

$e = 4 \quad E[-1; 7]$

→ **Vzájemná poloha bodu a hyperboly**



→ opačně než u ostatních kuželoseček

• R-vnější $\Leftrightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} < 1$

$\Leftrightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E < 1$

• R-vnitřní $\Leftrightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} > 1$

$\Leftrightarrow Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E > 1$

→ příklad: $\mathcal{H}: 9x^2 - 25y^2 = 225$

a) $K[6; y_K] \wedge K \in \mathcal{H}: 9\cdot 36 - 25y^2 = 225 \Rightarrow 99 = 25y^2 \Rightarrow y_K = \pm\frac{3\sqrt{11}}{5}$

b) $L[6; y_L] \wedge L$-vnitřní b.: $9\cdot 36 - 25y^2 > 225 \Rightarrow 99 > 25y^2 \Rightarrow \frac{99}{25} > y^2$

$\Rightarrow |y_L| < \frac{3\sqrt{11}}{5} \Rightarrow y_L \in \left(-\frac{3\sqrt{11}}{5}; \frac{3\sqrt{11}}{5}\right)$

c) $M[x_M; 6] \wedge L$-vnější b.: $9x^2 - 25\cdot 36 < 225 \Rightarrow 9x^2 < 25\cdot 9 + 25\cdot 36$

$\Rightarrow 9x^2 < 25\cdot 45 \Rightarrow x^2 < 5^3 \Rightarrow |x| < 5\sqrt{5} \Rightarrow x_M \in (-5\sqrt{5}; 5\sqrt{5})$

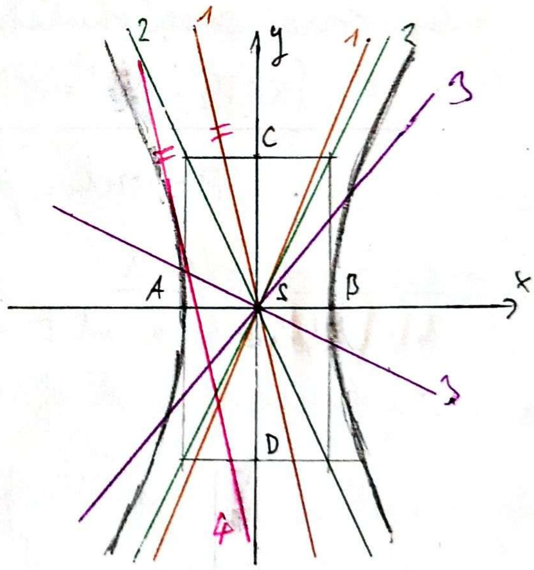
→ **Tečna na hyperbolu**

$\mathcal{H}: Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$t: Axx_0 + Byy_0 + \frac{C}{2}(x + x_0) + \frac{D}{2}(y + y_0) + E = 0$

$\mathcal{H}: \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

$t: \frac{(x-m)(x_0-m)}{a^2} - \frac{(y-n)(y_0-n)}{b^2} = 1$



→ **Vzájemná poloha přímky a hyperboly**

• přímky procházející středem $\mathcal{H}$

1 • nesečny: $k \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right) \cup \left(\frac{b}{a}; \infty\right)$

2 • asymptoty: $k = \pm\frac{b}{a}$

3 • sečny: $k \in \left(-\frac{b}{a}; \frac{b}{a}\right)$

• ostatní

4 • tečny - rovnoběžky s nesečnami

• sečny protínající $\mathcal{H}$ v 1 bodě

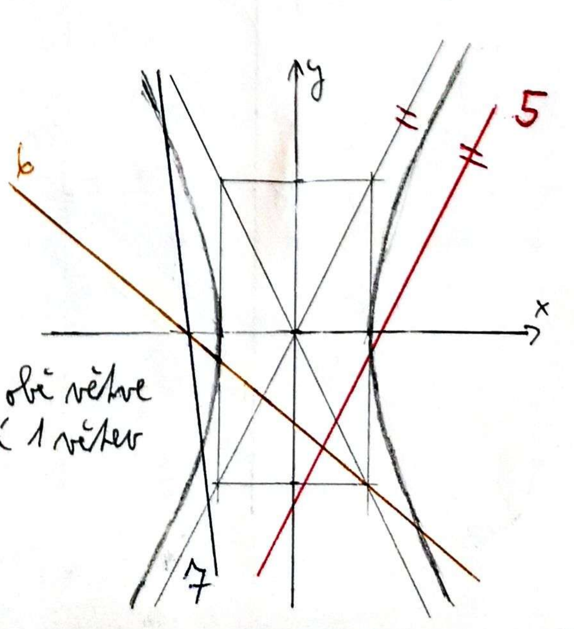
5 - rovnoběžky s asymptotami

• sečny protínající $\mathcal{H}$ ve 2 bodech

6 - rovnoběžky se sečnami - protíná obě větve

7 - rovnoběžky s nesečnami - protíná 1 větev

• nesečny



- $p \cap \mathcal{H} = \emptyset$ → nesečny
- $p \cap \mathcal{H} = \{A\}$ → tečny
  → rovnoběžky s asymptotami } na to si člověk musí dát pozor
- $p \cap \mathcal{H} = \{A; B\}$ → sečny

→ příklad: $\mathcal{H}: \frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+7)^2}{12} = 1 \wedge p: 3x + y - 2 = 0$ – vz. poloha = ?

$y = 2 - 3x \Rightarrow 3(x-5)^2 - (9-3x)^2 = 12 \Rightarrow 3(x-5)^2 - 9(3-x)^2 = 12$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 - 3(9 - 6x + x^2) = 4$

$x^2 - 3x^2 - 10x + 18x + 25 - 27 - 4 = 0$

$-2x^2 + 8x - 6 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ⟨ $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -1$, $x_2 = 3 \Rightarrow y_2 = -7$ } 2 body ⇒ sečna

→ kolik protíná ramen?

$a = 2 \wedge b = 2\sqrt{3} \Rightarrow$ k asymptot: $k_a = \frac{\pm 2\sqrt{3}}{2} = \pm\sqrt{3}$

k přímky: $k_p = -3$

→ $k_p > k_a \Rightarrow$ protíná 1 rameno

→ Parabola

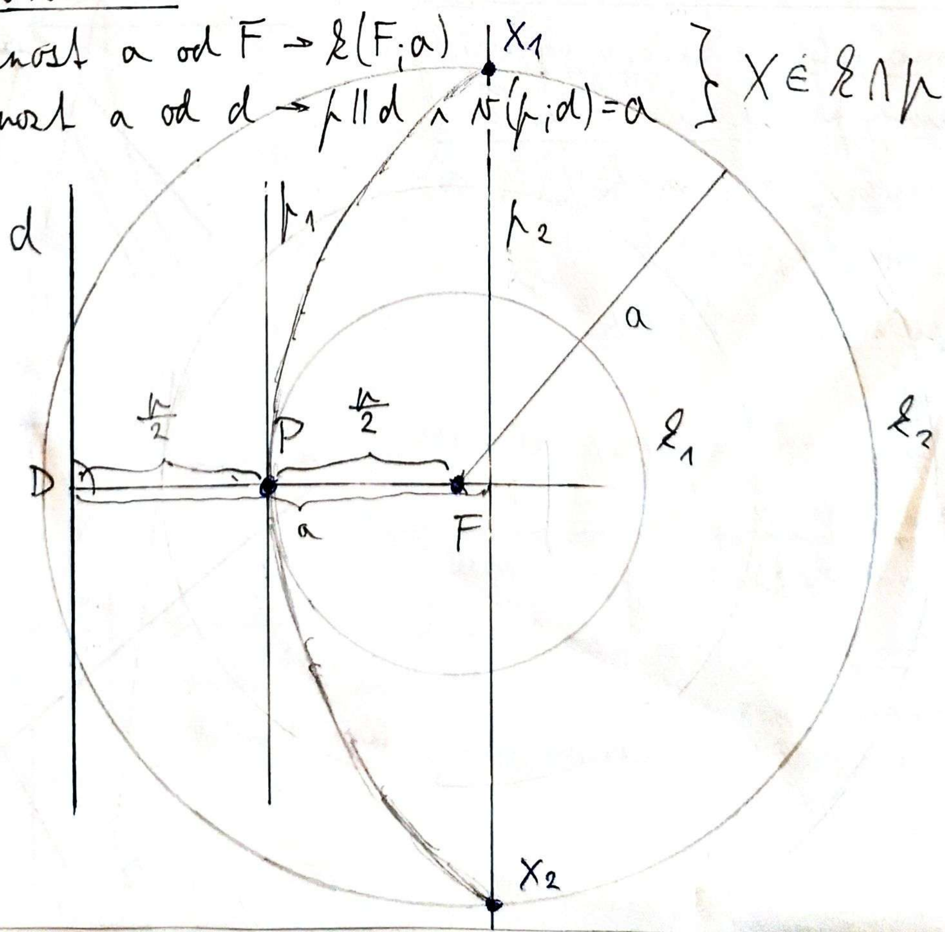
→ definovaná pomocí ohniska F a řídicí přímky d

$\mathcal{P} = \{X \in \pi_2 ; |XF| = v(X;d)\} \wedge v(F;d) = p$ parametr

P - vrchol paraboly $\Rightarrow v(P;d) = |PF| = \frac{p}{2}$

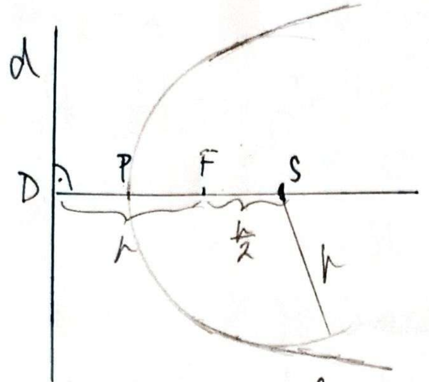
→ sestrojení bodu X

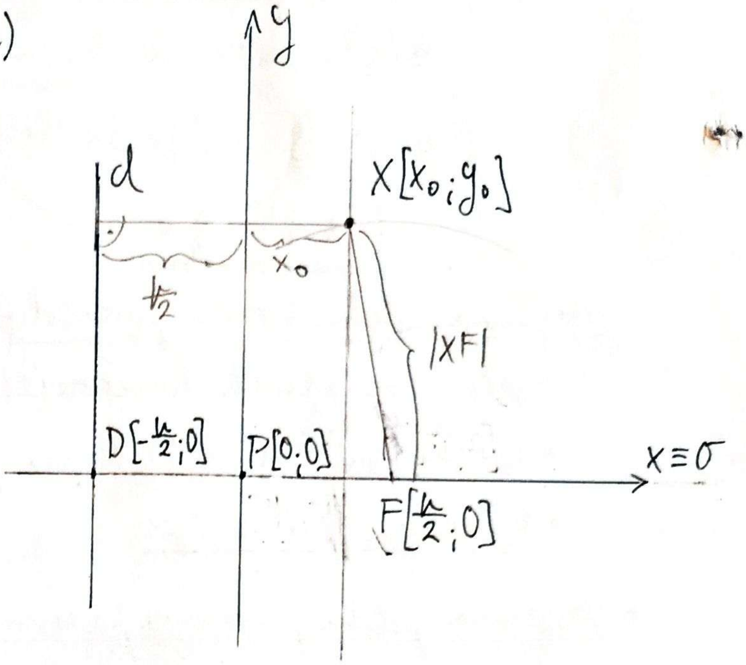
- vzdálenost a od F → $k(F;a)$
- vzdálenost a od d → $p \parallel d \wedge v(p;d) = a$ } $X \in k \cap p$



→ Hyperoskulační kružnice

→ S leží $\frac{p}{2}$ za F a $k(S;p)$





→ Vrcholová rovnice paraboly

$|XF| = v(d;X)$

$\sqrt{(x_0-\frac{p}{2})^2+y_0^2} = x_0+\frac{p}{2}$

$x_0^2 - x_0p + \frac{p^2}{4} + y_0^2 = x_0^2 + x_0p + \frac{p^2}{4}$

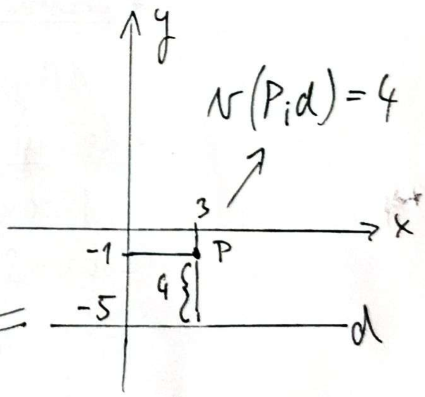
$\underline{\underline{y_0^2 = 2x_0p}} \rightarrow P[0;0],\ F[\frac{p}{2};0],\ o \parallel x^+$ — $o \parallel x$, $+ \Leftrightarrow$ orientace doprava

- $o \parallel x^+$: $y^2 = 2xp \rightarrow F[\frac{p}{2};0] \wedge d: x = -\frac{p}{2}$
- $o \parallel x^-$: $y^2 = -2xp \rightarrow F[-\frac{p}{2};0] \wedge d: x = \frac{p}{2}$
- $o \parallel y^+$: $x^2 = 2yp \rightarrow F[0;\frac{p}{2}] \wedge d: y = -\frac{p}{2}$
- $o \parallel y^-$: $x^2 = -2yp \rightarrow F[0;-\frac{p}{2}] \wedge d: y = \frac{p}{2}$

$o \parallel x: (y-n)^2 = \pm 2p(x-m)$

$o \parallel y: (x-m)^2 = \pm 2p(y-n)$

→ příklad: $P[3;-1] \wedge d: y=-5 \rightarrow P_x, P_y = ?$



$v(P,d) = 4 \Rightarrow p = 8$ $\quad o \parallel y^+ \Leftarrow$

$o \parallel y^+ \Rightarrow (x-m)^2 = 2p(y-n)$

$(x-3)^2 = 16(y+1)$

$P_x[x;0]: (x-3)^2 = 16 \Rightarrow x-3 = \pm 4 \Rightarrow P_{x_1}[7;0] \wedge P_{x_2}[-1;0]$

$P_y[0;y]: 9 = 16y+16 \Rightarrow 16y = -7 \Rightarrow \underline{\underline{P_y[0;-\frac{7}{16}]}}$

→ Obecná rovnice paraboly

$o \parallel x: y^2 + Ax + By + C = 0$

$o \parallel y: x^2 + Ax + By + C = 0$

Když ohnisko E posuneme do nekonečna, tak dostaneme P

→ příklad: $P: 4y^2 - 3x + 12y + 9 = 0$ – vrcholová r. = ?

$4(y^2+3y) = 3x - 9$

$4(y^2+3y+\frac{9}{4}) = 3x - 9 + 9$

$(y+\frac{3}{2})^2 = \frac{3}{4}x$

$P[0; -\frac{3}{2}]$, $p = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{3}{16}$

$o \parallel x^+ \Rightarrow F[\frac{3}{16}; -\frac{3}{2}]$

$\Rightarrow d: x = -\frac{3}{16}$

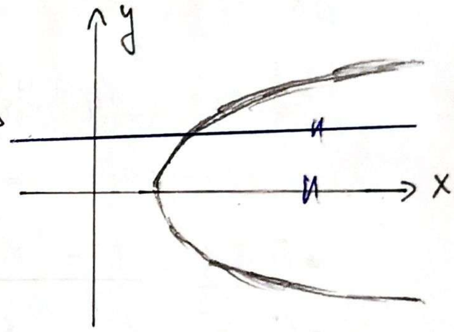
→ Vzájemná poloha bodu a paraboly

→ jako u ostatních kuželoseček – kromě H

- R – vnitřní: $y^2 < 2px \wedge y^2 + Ax + By + C < 0$
- R – vnější: $y^2 > 2px \wedge y^2 + Ax + By + C > 0$

→ Vzájemná poloha přímky a paraboly

- $p \cap P = \emptyset$ – nesečny
- $p \cap P = \{A\}$ – tečny
  – rovnoběžky s osou paraboly
- $p \cap P = \{A;B\}$ – sečny



→ příklad: $P: x^2 - 4x - y + 3 = 0 \wedge M[0; -1]$

→ najdi všechny přímky p: $M \in p \wedge p$ protíná P v právě 1 bodě

- sečna rovnoběžná s osou y

$s \parallel y \Rightarrow s: x = b \wedge M \in s \Rightarrow 0 = b \Rightarrow \underline{\underline{s: x = 0}}$

- tečny

$t: xx_0 - 2(x+x_0) - \frac{1}{2}(y+y_0) + 3 = 0$

$M \in t: -2x_0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y_0 + 3 = 0$

$-4x_0 - y_0 + 7 = 0 \Rightarrow y_0 = 7 - 4x_0$

$T \in P: x_0^2 - 4x_0 - y_0 + 3 = 0$

$\Rightarrow x_0^2 - 4x_0 - 7 + 4x_0 + 3 = 0 \Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_0 = \pm 2}}$

$\Rightarrow y_{01} = 7 - 8 = \underline{-1} \wedge y_{02} = 7 + 8 = \underline{15}$

$t_1: 2x - 2(x+2) - \frac{1}{2}(y-1) + 3 = 0$

$2x - 2x - 4 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} + 3 = 0$

$-\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t_1: y + 1 = 0}}$

$t_2: -2x - 2(x-2) - \frac{1}{2}(y+15) + 3 = 0$

$-2x - 2x + 4 - \frac{1}{2}y - \frac{15}{2} + 3 = 0$

$-4x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{t_2: y + 8x + 1 = 0}}$

→ Parabola - příklady

• $P: (x-3)^2 = 2p(y+2) \wedge t: x+y+2=0 \rightarrow p, T = ?$

$\rightarrow y = -x-2 \Rightarrow (x-3)^2 = 2p(-x)$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 2px + 9 = 0$

$x^2 + x(2p-6) + 9 = 0$

$D = 4p^2 - 24p + 36 - 36 = 4p^2 - 24p$

$D = 0 = 4p^2 - 24p \Rightarrow p(p-6) = 0 \quad \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 6 \end{cases}$

$p_1: (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ - to není parabola

$p_2: (x-3)^2 = 12(y+2) \Rightarrow \underline{\underline{p = 6}}$

$x = \frac{-b \pm D}{2a} = \frac{-(12-6)}{2} = -3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \underline{\underline{T[-3;1]}}$

KUŽELOSEČKY - SHRNUTÍ

$k: (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$\mathcal{E}: \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \iff o \parallel x$

$\quad \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1 \iff o \parallel y$

$\Big\} \; a^2 = e^2 + b^2 \Rightarrow a > b$, $\quad |XE| + |XF| = 2a$

$\mathcal{H}: \frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \iff o \parallel x$

$\quad \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1 \iff o \parallel y$

$\Big\} \; e^2 = a^2 + b^2$, $\quad \big||XE| - |XF|\big| = 2a$

$\mathcal{P}: (y-n)^2 = \pm 2p(x-m) \iff o \parallel x$

$\quad (x-m)^2 = \pm 2p(y-n) \iff o \parallel y$

$\Big\} \; |XF| = v(X;d) \wedge v(F;d) = p$, $\quad |PF| = v(P;d) = \frac{p}{2}$

$\mathcal{K}: Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

- $k: A = B \neq 0$
- $\mathcal{E}: A \neq B \wedge A \cdot B > 0$ - stejná znaménka
- $\mathcal{H}: A \neq B \wedge A \cdot B < 0$ - různá znaménka
- $\mathcal{P}: A = 0 \vee B = 0$

$t: Axx_0 + Byy_0 + \frac{C}{2}(x+x_0) + \frac{D}{2}(y+y_0) + E = 0$

→ řeším soustavu rovnic a $D = 0$ - je pouze 1 bod dotyku

$p \cap \mathcal{K}$: řeším soustavu rovnic

$D < 0 \iff p \cap \mathcal{K} = \{\}$ - vnější přímka

$D = 0 \iff p \cap \mathcal{K} = \{A\}$ - tečna

- $\mathcal{H}: p \parallel as$
- $\mathcal{P}: p \parallel o$

$\Big\}$ sečna

$D > 0 \iff p \cap \mathcal{K} = \{A; B\}$ - sečna

$A \cap \mathcal{K}: Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E > 0$ - vnější bod: $k, \mathcal{E}, \mathcal{P}$

$\quad Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E < 0$ - vnitřní bod: $k, \mathcal{E}, \mathcal{P}$

$\Big\}$ $\mathcal{H}$ opačně: $>$ vnitřní, $<$ vnější