POSLOUPNOSTI A ŘADY

→ posloupnost = funkce, jejíž argument je vždy přirozené číslo

- nekonečná posloupnost – definičním oborem je množina N všech přirozených čísel
- konečná posloupnost – definičním oborem je množina $M = \{1; 2; \dots; n\}$ kde n je konečné přirozené číslo

→ čísla: 4, 7, 10, 13, 16, … jsou členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $1 + 3n$

$\Rightarrow a_n = 1 + 3n$

$\Rightarrow$ posloupnost zapisujeme $\{1 + 3n\}_{n=1}^{\infty}$

→ graf

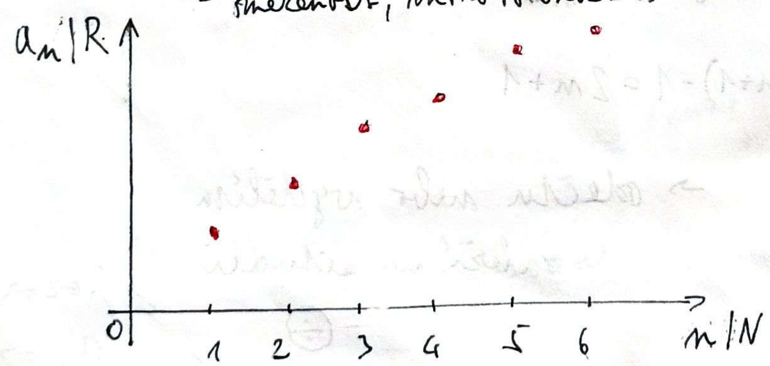
→ posloupnosti znázorňujeme v pravoúhlé soustavě souřadnic

→ graf je vždy množina izolovaných bodů $\{[n; a_n] \in N \times R\}$

→ posloupnost s reálnými členy je zvláštní případ funkce

$\Rightarrow$ u posloupností můžeme zkoumat obdobné vlastnosti

→ omezenost, monotónnost …



→ určení posloupnosti

- výčtem → 2, 4, 8, 16 …
- charakteristickou vlastností = funkčním předpisem → $a_n = 2n^2$
- rekurentně → $a_1 = 2 \wedge a_{n+1} = 2a_n + 3 \Rightarrow a_2 = 2a_1 + 3 = 7$

↳ musí být určen 1. člen

→ příklady

- $1, 3, 9 \ldots \rightarrow a_n = 3^{n-1}$
- $2, 4, 8 \ldots \rightarrow a_n = 2^n$
- $2, 4, 9 \ldots \rightarrow a_{n+1} = 2 \cdot a_n + (n+1) \bmod 2 \wedge a_1 = 2$
- $-2, -5, -8 \ldots \rightarrow a_n = 1 - 3n$
- $-\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, -1, -3 \ldots \rightarrow a_n = -3^{n-3}$
- $1, 2, 3, 5 \ldots \rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \wedge a_1 = 1 \wedge a_2 = 2$
- $5, 2, 3, -1 \ldots \rightarrow a_{n+1} = a_{n-1} - a_n \wedge a_1 = 5 \wedge a_2 = 2$
- $2, 1, 4, 9, 22 \ldots \rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \wedge a_1 = 2 \wedge a_2 = 1$
- $-4, -1, 4, 11 \ldots \rightarrow a_n = n^2 - 5$
- $0, 2, 0, 2, 0 \ldots \rightarrow a_n = 1 - (-1)^{n+1}$
- $\{3n \cdot (2-n)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 3, 0, -9, -24 \ldots$
- $\{\sin(\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \sin(\frac{4}{3}\pi), \sin(\frac{7}{3}\pi), \sin(\frac{10}{3}\pi), \sin(\frac{13}{3}\pi) \ldots$

  $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \ldots$

→ převod zadání vzorcem na rekurentní zadání

- $a_n = 2n - 1 \equiv \{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$

$\Rightarrow a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n + 1$

$\begin{cases} a_{n+1} = 2n+1 \\ a_n = 2n-1 \end{cases}$ → odečtu nebo vydělím

↳ ~~záleží~~ záleží na situaci

pozor, dělím $a_n \Rightarrow a_1 \neq 0$ a ani další a_n

$\ominus$

$a_{n+1} - a_n = 2n + 1 - 2n + 1$

$a_{n+1} = a_n + 2$

$\rightarrow a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

$\div$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n-1}$

$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n-1}$

$a_1 = 1$

předpis vypadá jinak, ale funguje stejně

→ převod rekurentního zadání na zadání vzorcem

- $a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot a_n \wedge a_1 = 2$

$a_1 = 2$

$a_2 = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

$a_3 = \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$

$a_4 = \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{4}$

odhad: $a_n = \frac{n+1}{n}$

důkaz: 1) platí to pro 1?

$a_1 = \frac{2}{1} = 2$ – a to odpovídá

2) $a_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$

$a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot a_n$

$a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n}$

$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ – a to odpovídá

$\Rightarrow a_n = \frac{n+1}{n} \equiv \left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ cbd

- $a_{n+2} = \frac{4}{3}(a_{n+1} + a_n) \wedge a_1 = 2 \wedge a_2 = 4$

→ $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 16,\ a_5 = 32$

⇒ odhad: $a_n = 2^n$

1) $a_1 = 2^1,\ a_2 = 2^2 = 4$ – a to odpovídá

2) $a_{n+2} = 2^{n+2}$

$\left.\begin{array}{l} a_n = 2^n \\ a_{n+1} = 2^{n+1} \end{array}\right\}$ $a_{n+2} = \frac{4}{3} \cdot (2^{n+1} + 2^n) = \frac{4}{3}(2 \cdot 2^n + 2^n)$

$a_{n+2} = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 2^n = 4 \cdot 2^n$

$a_{n+2} = 2^{n+2}$ – a to odpovídá

⇒ $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ cbd

• 4/c) $a_{n+1} = a_n \cdot (-1)^{2n+1} + 2 \wedge a_1 = -1$

$a_1 = -1$
$a_2 = -1 \cdot (-1)^3 + 2 = 3$
$a_3 = 3 \cdot (-1)^5 + 2 = -1$
$a_4 = -1 \cdot (-1)^7 + 2 = 3$
$a_5 = 3 \cdot (-1)^9 + 2 = -1$
$a_6 = -1 \cdot (-1)^{11} + 2 = 3$

odhad: $a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2$

1) $a_1 = 1 + (-1)^1 \cdot 2 = -1$ - a to odpovídá

2) $a_{n+1} = 1 + (-1)^{n+1} \cdot 2 =$
$= 1 + (-1) \cdot (-1)^n \cdot 2 =$
$= 1 - 2 \cdot (-1)^n$

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot (-1)^{2n+1} + 2 = (1 + 2 \cdot (-1)^n) \cdot (-1)^{2n+1} + 2 =$
$= -1 \cdot (1 + 2 \cdot (-1)^n) + 2 = -1 - 2 \cdot (-1)^n + 2$
$a_{n+1} = 1 - 2 \cdot (-1)^n$ - a to odpovídá

$\Rightarrow \{1 + (-1)^n \cdot 2\}_{n=1}^{\infty}$ cbd

• 5/b) $a_n = 4 \cdot a_{n-1} - 3 \cdot a_{n-2} \wedge a_1 = 1 \wedge a_2 = 3$

$a_1 = 1$
$a_2 = 3$
$a_3 = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 9$
$a_4 = 4 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 27$
$a_5 = 4 \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 81$
$a_6 = 4 \cdot 81 - 3 \cdot 27 = 243$

odhad: $a_n = 3^{n-1}$

1) $a_1 = 3^0 = 1 \wedge a_2 = 3^1 = 3$ ✓

2) $\left.\begin{array}{l} a_{n-1} = 3^{n-2} \\ a_{n-2} = 3^{n-3} \end{array}\right\} a_n = ?$

$\Rightarrow a_n = 4 \cdot 3^{n-2} - 3 \cdot 3^{n-3} = 4 \cdot 3^{n-2} - 3^{n-2} = 3^{n-2} \cdot (4-1) =$
$a_n = 3^{n-1}$ - a to odpovídá

$\Rightarrow \{3^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ cbd

→ vlastnosti posloupností

• monotónnost

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí $\Leftrightarrow \forall r,s \in N;\ r<s \Rightarrow a_r < a_s$

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající $\Leftrightarrow \forall r,s \in N;\ r<s \Rightarrow a_r > a_s$

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající $\Leftrightarrow \forall r,s \in N;\ r<s \Rightarrow a_r \leq a_s$

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí $\Leftrightarrow \forall r,s \in N;\ r<s \Rightarrow a_r \geq a_s$

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní $\Leftrightarrow \forall r,s \in N;\ a_r = a_s$

• omezenost

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená zdola $\Leftrightarrow \exists A \in R;\ \forall n \in N;\ a_n \geq A$

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora $\Leftrightarrow \exists B \in R;\ \forall n \in N;\ a_n \leq B$

• $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená $\Leftrightarrow \exists A,B \in R;\ \forall n \in N;\ A \leq a_n \leq B$

→ příklady

• 6/h) urči monotónnost – odhad: ⊖ lin. lomená fce → rostoucí

$\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty} \rightarrow a_n = \frac{n+1}{2n+3}$

$\rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1+1}{2(n+1)+3} = \frac{n+2}{2n+5}$ $\quad n \in N \Rightarrow$ můžu násobit

$\Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{n+1}{2n+3} < \frac{n+2}{2n+5} \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)(2n+5) < (n+2)(2n+3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n^2+5n+2n+5 < 2n^2+3n+4n+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $5<6$ – a to je pravda $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí cbd

stejný princip

→ nebo odečtu $a_{n+1} - a_n$ → má být >0

$\Rightarrow \frac{n+2}{2n+5} - \frac{n+1}{2n+3} = (n+2)(2n+3) - (n+1)(2n+5) =$

$= 2n^2+3n+4n+6-2n^2-5n-2n-5 =$

$= 1$ – a to je větší než 0

$\Rightarrow$ posloupnost je rostoucí cbd

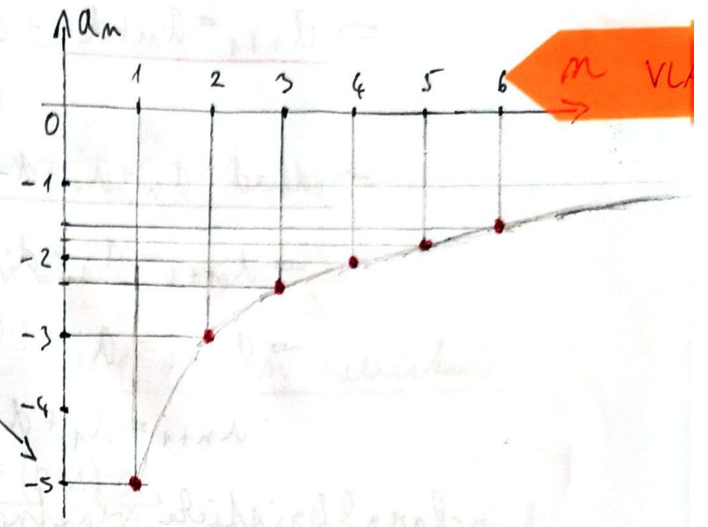
• 7/f) urči omezenost

$$\left\{\frac{n+4}{-n}\right\}_{n=1}^{\infty} \sim y = \frac{x+4}{-x} = \frac{x}{-x} + \frac{4}{-x} = \frac{-4}{x} - 1$$

=> odhad: omezená

$a_n < -1$

$a_n \geq -5$



$\Rightarrow a_n < -1 \Rightarrow -\frac{4}{n} - 1 < -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{4}{n} < 0$ – a to je pravda $(n \in N)$

$\Rightarrow a_n \geq -5 \Rightarrow -\frac{4}{n} - 1 \geq -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{4}{n} \geq -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4 \geq -4n \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geq 1$ – a to je pravda $(n \in N)$

$\Rightarrow \left\{\frac{n+4}{-n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená cbd

– dodatek k monotonnosti

- všechny se stejně dá definovat takhle
  - → rostoucí $\Leftrightarrow \forall n \in N;\ a_n < a_{n+1}$
- každá rostoucí posloupnost je neklesající
- každá klesající posloupnost je nerostoucí
- nerostoucí a neklesající posloupnosti jsou monotónní

→ aritmetická posloupnost

→ přičítám vždy stejné číslo d = diference k a_n abych dostal a_{n+1}

⇒ $a_{n+1} = a_n + d$ − d = diference aritmetické posloupnosti

$d \in \mathbb{R}$

⇒ odhad: $a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$

$$\left.\begin{aligned} &\to a_{n+1} = a_1 + d\cdot n \\ &\to a_{n+1} = a_1 + d\cdot(n-1) + d \\ &\quad a_{n+1} = a_1 + d\cdot n \end{aligned}\right\} a_n = a_1 + d\cdot(n-1) \text{ cbd}$$

→ charakteristické vlastnosti AP

- rozdíl sousedních členů je konstantní − je to d
- AP se chová jako lineární funkce

$$\left.\begin{aligned} &\to y = ax + b \ \wedge\ x \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{a platí: } a = d,\ b = a_1 - d \end{aligned}\right\} a_n = d\cdot n + (a_1 - d)$$

- monotonnost
  - $d > 0$ − rostoucí
  - $d = 0$ − konstantní
  - $d < 0$ − klesající

→ $a_r = a_1 + d(r-1)$

$a_s = a_1 + d(s-1)$

$a_r - a_s = a_1 + d(r-1) - a_1 - d(s-1)$

$a_r - a_s = (r-s)\cdot d$

↳ $a_r = a_s + (r-s)\cdot d$ ⇒ $a_n = a_s + (n-s)\cdot d$

→ příklady ar. posloupností

- $x_n = n$ → $d = 0$
- $a_n = 5 - 2n$ → $d = -2$
- $a_n = \frac{5n-1}{3}$ → $d = \frac{5}{3}$
- $a_n = \frac{1-n}{3}$ → $d = -\frac{1}{3}$

→ příklady

- $a_1 = 10$, $d = -3$, $a_n = -121$ $\Big\}\ n = ?$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$\frac{a_n - a_1}{d} = n-1$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$
$$n = \frac{-131}{-3} + 1 = \frac{134}{3}$$

→ $3 \nmid 134 \Rightarrow n$ neexistuje

- $a_6 = 39$, $a_8 = a_4 + 24$, $a_1 = ?$

$$a_r - a_s = (r-s)\cdot d$$
$$a_8 - a_4 = (8-4)\cdot d$$
$$24 = 4d$$
$$d = 6$$
$$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot d$$
$$a_1 = a_6 - 5d$$
$$a_1 = 39 - 30$$
$$a_1 = 9$$

- $a_5 = 120$, $a_{12} = 225$, $a_n = ?$

$$a_{12} = a_5 + d(12-5)$$
$$7d = a_{12} - a_5$$
$$d = \frac{a_{12} - a_5}{7}$$
$$d = \frac{105}{7}$$
$$d = 15$$

$$a_n = a_5 + (n-5)\cdot d$$
$$a_n = 120 + (n-5)\cdot 15$$
$$a_n = 120 + 15n - 75$$
$$a_n = 45 + 15n$$

• dokaž, že posloupnost $\left\{\frac{5+n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{6+n}{2} \\ a_n = \frac{5+n}{2} \end{array}\right\} a_{n+1} - a_n \text{ musí být konstantní}$$

$$\Rightarrow \frac{6+n}{2} - \frac{5+n}{2} = \frac{1}{2} \text{ - a to je konstantní}$$

$\Rightarrow \left\{\frac{5+n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s $d = \frac{1}{2}$ cbd

1) a) $$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{2n}{2n+1} \\ a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} \end{array}\right\} a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{2n+3} - \frac{2n}{2n+1} =$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1) - 2n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$

$$= \frac{4n^2+2n+4n+2-4n^2-6n}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} \text{ cbd}$$

$$a_1 = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ je rostoucí $\Rightarrow a_{n+1} = a_n + X \wedge X > 0$

$\Rightarrow$ je omezená zdola $\rightarrow a_n \geq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ odhad: je omezená shora 1

$\Rightarrow \frac{2n}{2n+1} < 1 \Rightarrow 2n < 2n+1 \Rightarrow 0 < 1$ - a to je pravda

$\Rightarrow$ je omezená zdola i shora: $\frac{2}{3} \leq a_n < 1$ cbd

b) $$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{n}{2^n} \\ a_{n+1} = \frac{n+1}{2 \cdot 2^n} \end{array}\right\} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2 \cdot 2^n} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n+1}{2n} \text{ cbd} \quad - a_1 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ monotonnost

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 = \frac{3}{8} \\ a_4 = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \text{odhad: je nerostoucí} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n$$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2 \cdot 2^n} \leq \frac{n}{2^n} \Rightarrow n+1 \leq 2n \Rightarrow$

$\Rightarrow n \geq 1$ - a to vždy platí

$\Rightarrow$ je nerostoucí cbd

$\Rightarrow$ je omezená shora - $a_n \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ odhad: je omezená zdola 0

$\Rightarrow \frac{n}{2^n} > 0 \Rightarrow n > 0$ - a to vždy platí

$\Rightarrow$ je omezená zdola i shora: $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ cbd - $\forall n \in N$

→ součet n členů aritmetické posloupnosti

- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$\Rightarrow S_n = a_n + a_{n-2} + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ ⊕

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{\underbrace{a_1 + d + a_n - d}_{a_1 + a_n}} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{\underbrace{a_1 + 2d + a_n - 2d}_{a_1 + a_n}} + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

→ suma od 1 do n ⇒ n závorek

$\Rightarrow 2S_n = n(a_1 + a_n)$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

→ příklady

- $a_1 = 9,\ d = -2 \rightarrow S_{50} = ?$

$S_{50} = \frac{50}{2}(a_1 + a_{50}) \rightarrow a_{50} = a_1 + 49d$

$S_{50} = 25(2a_1 + 49d)$

$S_{50} = 25(18 - 98) = -25 \cdot 80$

$S_{50} = -2000$

- $a_1 = 2,\ S_5 = 16 \rightarrow S_{16} = ?$

nebo lehčí: $S_5 = 2{,}5(2a_1 + 4d) \Rightarrow d$

→ $S_5 = 2{,}5 \cdot (a_1 + a_5) \Rightarrow \frac{S_5}{2{,}5} - a_1 = a_5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_5 = \frac{16}{2{,}5} - 2 = 4{,}4$

→ $a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow d = \frac{a_5 - a_1}{4} = 0{,}6$

→ $a_{16} = a_1 + 15d \Rightarrow a_{16} = 2 + 9 = 11$

→ $S_{16} = 8(2 + 11) = 104$

→ shrnutí vzorců AP

$a_{n+1} = a_n + d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_r = a_s + (r-s)d$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

→ *příklady*

- $S_n = n^2 + 2n \rightarrow a_n = ?$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$\Rightarrow S_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 2\cdot 1 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 3}}$

$\Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d \Rightarrow 2a_1 + d = S_2$

$d = S_2 - 2a_1$

$\underline{\underline{d = 4 + 4 - 6 = 2}}$

$\Rightarrow a_n = 3 + (n-1)\cdot 2$

$a_n = 3 + 2n - 2$

$\underline{\underline{a_n = 2n + 1}} \rightarrow \{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$

- $\left.\begin{matrix} a_4 : a_6 = -1 \\ a_2 \cdot a_8 = -9 \end{matrix}\right\} a_n = ?$

$(a_1 + d)(a_1 + 7d) = -9$

$\frac{a_1 + 3d}{a_1 + 5d} = -1 \Rightarrow a_1 + 3d = -a_1 - 5d$

$2a_1 = -8d$

$\underline{\underline{a_1 = -4d}}$ – dosadím

$\Rightarrow (-4d + d)(-4d + 7d) = -9$

$-3d \cdot 3d = -9 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{d = \pm 1}}$ dosadím

$\Rightarrow a_1 = -4\cdot(\pm 1)$

$\underline{\underline{a_1 = \mp 4}}$

$\Rightarrow a_n = \mp 4 \pm (n-1) = \mp 4 \pm n \mp 1$

$\underline{\underline{a_n = \mp 5 \pm n}}$

$\hookrightarrow \{n-5\}_{n=1}^{\infty} \quad \{5-n\}_{n=1}^{\infty}$

• mezi 3 a 43 vlož 7 čísel tak, aby vznikla AP - vypiš členy

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_9 &= 43 \end{aligned}\right\} a_9 = a_1 + 8d \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_1}{8} = \frac{40}{8}$$

$$\underline{\underline{d = 5}}$$

$$a_n = 3 + (n-1)5$$

$$a_n = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_2 &= 8 \\ a_3 &= 13 \\ a_4 &= 18 \\ a_5 &= 23 \\ a_6 &= 28 \\ a_7 &= 33 \\ a_8 &= 38 \end{aligned}\right\} \left\{5n-2\right\}_{n=2}^{8}$$

• jaká teplota je dole v hloubce 1160 metrů, pokud v hloubce 9 m je teplota 11°C a každých 100 m se zvýší o 0,7°C?

$$\left.\begin{aligned} a_9 &= 11 \\ a_{109} &= 11 + 0{,}7 \end{aligned}\right\} a_9 + 100d - a_9 = 11{,}7 - 11$$

$$100d = 0{,}7$$

$$\underline{\underline{d = 0{,}007}}$$

$$\Rightarrow a_{1160} = a_9 + 1151d$$

$$a_{1160} = 11 + 1151 \cdot 0{,}007$$

$$\underline{\underline{a_{1160} = 19{,}057}}$$

→ geometrická posloupnost

→ a_n násobím vždy stejným číslem q = kvocient abych dostal a_{n+1}

$\Rightarrow a_{n+1} = q \cdot a_n$

$\Rightarrow$ odhad: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$\left.\begin{array}{l} \to a_{n+1} = a_1 \cdot q^n \\ \to a_{n+1} = q \cdot a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_{n+1} = a_1 \cdot q^n \end{array}\right\} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ cbd}$$

→ charakteristická vlastnost GP

→ podíl sousedních členů je konstantní - je to q

→ GP se chová jako exponenciální funkce - graf = exponenciela

$$\left.\begin{array}{l} \to y = k \cdot a^x \\ \quad \hookrightarrow \text{a platí: } k = a_1,\ a = q \end{array}\right\} a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

→ $a_r = a_1 \cdot q^{r-1}$

$a_s = a_1 \cdot q^{s-1}$

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{q^{r-1}}{q^{s-1}}$$

$a_r = a_s \cdot q^{r-1-s+1}$ → $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$ $\Rightarrow$ $a_n = a_s \cdot q^{n-s}$

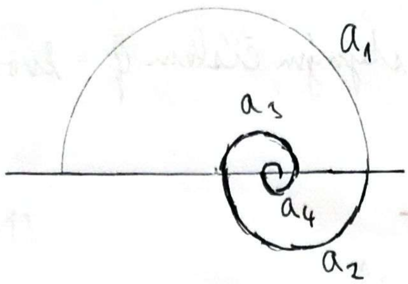
→ monotonnost

→ závisí na a_1 i na q

- $a_1 > 0$ → $q > 1$ → rostoucí
  - → $q = 1$ → konstantní
  - → $q \in (0;1)$ → klesající
- $a_1 < 0$ → $q > 1$ → klesající
  - → $q = 1$ → konstantní
  - → $q \in (0;1)$ → rostoucí
- $q < 0$ → body skáčou na 2 exponencielách souměrných podle osy x
- $a_1 = 0$ → všechny členy = 0
- $q = 0$ → všechny členy až na ten první = 0

→ **příklady geometrických posloupností**

• **spirála**

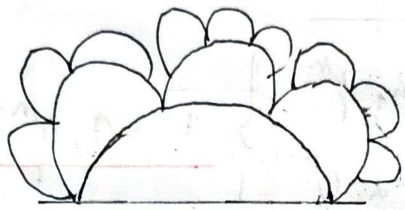


a_n = délka oblouku $n = \pi \cdot r$

→ vždy zmenšíme r o $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$

• **fraktály**



→ počet objektů na určité úrovni fraktálu

$\Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot a_n$

• **spoření**

→ vkladová částka = c_1
→ úrok = 3,5%

$c_{n+1} = c_n \cdot 1{,}035$

→ **příklady**

• $a_1 = 4$, $a_3 = 16$

$a_3 = a_1 \cdot q^2$
$16 = 4 \cdot q^2$

$q^2 = 4$
$q = \pm 2$

$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ → 4, 8, 16, 32

$a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$ → 4, −8, 16, −32

• **mezi čísla 2 a 486 vložte 4 čísla tak, aby vznikla GP**

$a_1 = 2$
$a_6 = 486 = a_1 \cdot q^5$

$486 = 2 \cdot q^5$
$q^5 = 243$
$q = 3$

$a_2 = 6$
$a_3 = 18$
$a_4 = 54$
$a_5 = 162$

• **přičteme-li k číslům −6, 2, 26 stejné číslo, dostaneme první 3 členy GP**

$a_1 = -6 + x$
$a_2 = 2 + x$
$a_3 = 26 + x$

$$\frac{a_2}{a_1} = q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow \frac{2+x}{x-6} = \frac{26+x}{2+x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+x)^2 = (x-6)(26+x)$$
$$4 + 4x + x^2 = 26x + x^2 - 156 - 6x$$
$$160 = 16x$$
$$x = 10$$

$\Rightarrow a_1 = 4,\ a_2 = 12,\ a_3 = 36$

→ součet n členů GP

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$$

$$\left.\begin{aligned} S_n \cdot q - S_n &= a_1 \cdot q^n - a_1 \\ S_n (q-1) &= a_1 (q^n - 1) \end{aligned}\right\} \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \text{ pro } q \neq 1$$

$S_n = n \cdot a_1$; pro $q = 1$

→ příklad

• $q = 2 \wedge S_5 = 93 \rightarrow a_7 = ?$

$$S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$$93 = a_1 \cdot \underbrace{\frac{32 - 1}{2 - 1}}_{} = 31$$

$a_1 = 3$

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$a_7 = 3 \cdot 2^6$

$a_7 = 192$

→ příklady typu $a_3 + a_5 = 10$
$a_1 + a_6 = 40$ řešení jako u AP

→ příklady typu dokaž, že: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ jsou 3 členy GP

→ vyjadřuji, že podíl 2 sousedních členů = q

→ nerovnice:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^x} < 1$$

$$\Rightarrow S_x < 1 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{q^x - 1}{q - 1} < 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}{\frac{1}{2} - 1} < 1$$

$$2^{-1} \frac{2^{-x} - 1}{-\frac{1}{2}} < 1$$

$$2^{-x-1} - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$$

$2^{-(x+1)} > 0$ – to platí pro všechny x

$\Rightarrow K = \mathbb{R}$

→ kvádr, kde strany jsou 3 po sobě jdoucí členy GP

$V = 216\ cm^3$, $S = 252\ cm^3 \Rightarrow a, b, c = ?$

$a \cdot b \cdot c = 216 \longrightarrow a^3 \cdot q^3 = 216 \Rightarrow a \cdot q = 6$

$2(ab + ac + bc) = 252 \longrightarrow a^2 \cdot q + a^2 \cdot q^2 + a^2 \cdot q^3 = 126$

$\left.\begin{array}{l} b = a \cdot q \\ c = a \cdot q^2 \end{array}\right\}$

$a = \frac{6}{q}$

$a^2 (q + q^2 + q^3) = 126$

$$\frac{36}{q^2}(q + q^2 + q^3) = 126$$

$$q + q^2 + q^3 = 3{,}5 \cdot q^2 \quad | : q$$

$$q^2 - 2{,}5q + 1 = 0$$

$\left.\begin{array}{l} D = 2{,}5 \cdot 2{,}5 - 4 \\ D = 6{,}25 - 4 = 2{,}25 \end{array}\right\}$ $q_{1,2} = \frac{2{,}5 \pm 1{,}5}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{array}$

$\Rightarrow q_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \underline{\underline{a = 3,\ b = 6,\ c = 12}}$

$\Rightarrow q_2 = \frac{1}{2} = a_1 = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 12,\ b = 6,\ c = 3}}$

DÚNO zaměnitelné

→ vyučíváme

$(-3)^n = 2$ = kladné číslo ⇒ n je sudé

$3^n = 2 \xleftarrow{a}$

- Gumová kulička puštěná ze 2 m se poprvé odrazí do výšky 1,9 m. Po kolikátém odrazu už nepřekoná výšku 1,5 m?

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 1{,}9 \end{aligned}\right\} q = \frac{1{,}9}{2} = 0{,}95$$

$a_n < 1{,}5 \Rightarrow n = ?$

$$1{,}5 > a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 1{,}5 > 2 \cdot 0{,}95^{n-1}$$

$$\log(0{,}75) > (n-1) \cdot \log(0{,}95)$$

$$\frac{\log(0{,}75)}{\log(0{,}95)} < n-1$$

$$n > \frac{\log(0{,}75)}{\log(0{,}95)} + 1 \doteq 6{,}6$$

$\Rightarrow n = 7$) ne 7 → a_1 nebyl odraz

$\Rightarrow$ Výška 1,5 m nepřekoná po 6. odrazu

- strany pravoúhlého trojúhelníku tvoří GP → $q = ?$

$a = a, \ b = a \cdot q, \ c = a \cdot q^2$

$q > 1$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 \cdot q^4 = a^2 + a^2 \cdot q^2$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Sub: } q^2 = x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow \text{Sub: } x = q^2$$

$$|q| = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{chci } q > 0$$

$$q = \frac{\sqrt{2 \pm 2\sqrt{5}}}{2} \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$$

$$q = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{2} \doteq 1{,}272$$

$q < 1$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = a^2 \cdot q^2 + a^2 \cdot q^4$$

$$q^4 + q^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$|q| = \frac{\sqrt{-1 \pm \sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$$

$$q = \frac{\sqrt{-2 \pm 2\sqrt{5}}}{2}$$

$$q = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} \doteq 0{,}786$$

- Pojištění stálo v roce 2000 300 \$ měsíčně, kolik bude stát v roce 2050, pokud inflace bude 8% ročně?

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 300 \\ q = 1{,}08 \end{array}\right\} a_{51} = ?$$

za 1 rok ... $a_2 = 300 \cdot 1{,}08$

za 2 roky ... $a_3 = 300 \cdot 1{,}08^2$

za 50 let ... $a_{51} = 300 \cdot 1{,}08^{50}$

$$a_{51} = 300 \cdot 1{,}08^{50}$$

$$a_{51} \doteq 14\,070{,}5$$

$\Rightarrow$ V roce 2050 bude pojištění stát 14 070,5 \$

- V sudu bylo původně 26 l vína. Honza každý den nabere ze sudu 1 litr a pak do něj naleje 1 l vody. Kolik vína vypil Honza za 10 dní?

1. den $\rightarrow 26\,l \Rightarrow$ vypil $\frac{26}{26} = 1$ l vína

2. den $\rightarrow 26 \cdot \frac{25}{26} \Rightarrow$ vypil $26 \cdot \left(\frac{25}{26}\right) \cdot \frac{1}{26} = \frac{25}{26}$ l vína

3. den $\rightarrow 26 \cdot \left(\frac{25}{26}\right)^2 \Rightarrow$ vypil $26 \cdot \left(\frac{25}{26}\right)^2 \cdot \frac{1}{26} = \left(\frac{25}{26}\right)^2$ l vína

$$\Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

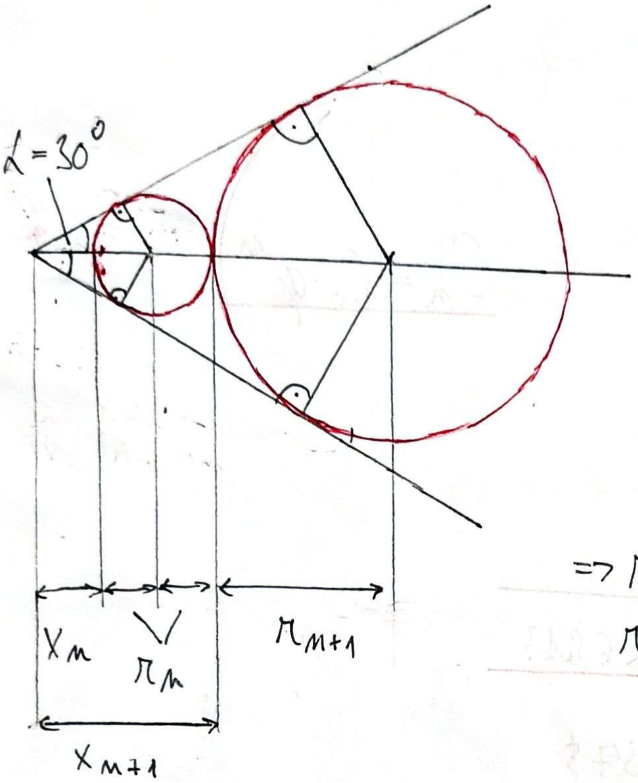
$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{25}{26}\right)^{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = \frac{25}{26} \end{array}\right\} \quad S_{10} = \frac{\left(\frac{25}{26}\right)^{10} - 1}{\frac{25}{26} - 1}$$

$$S_{10} \doteq 8{,}43$$

$\Rightarrow$ Za 10 dní Honza vypil 8,43 l vína

- Do úhlu, jehož ramena svírají 60° je vepsáno 5 kružnic tak, že každá následující se dotýká té předchozí.
  → Kolikrát je součet ploch všech kruhů větší než plocha toho prvního?



- $$\frac{r_n}{\sin(\alpha)} = \frac{x_n + r_n}{\sin(90)} = x_n + r_n$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{r_n}{\sin(\alpha)} - \frac{r_n \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$x_n = r_n \cdot \frac{1 - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

- $$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{x_n + r_n}{x_{n+1} + r_{n+1}} = \frac{x_n + r_n}{x_n + 2r_n + r_{n+1}}$$

$$\Rightarrow r_n(x_n + 2r_n + r_{n+1}) = r_{n+1}(x_n + r_n)$$

$$r_n \cdot x_n + 2 \cdot r_n^2 + r_n \cdot r_{n+1} = r_{n+1} \cdot x_n + r_{n+1} \cdot r_n$$

$$r_{n+1} = \frac{r_n \cdot x_n + 2 \cdot r_n^2}{x_n} = r_n + \frac{2 r_n^2}{x_n}$$

$$\Rightarrow r_{n+1} = r_n + \frac{r_n \cdot 2 r_n}{r_n \frac{1 - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha)}} = r_n + 2 r_n \cdot \left(\frac{\sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}\right)$$

$$r_{n+1} = r_n \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{2 \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}\right) = q$$

→ pro $\alpha = 30°$ se $r_{n+1} = r_n \cdot 3 \Rightarrow q = 3$

- $P_1 = \pi \cdot r_1^2$
- $S_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \pi(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2) = \pi\left(r_1^2 + (r_1 \cdot q)^2 + \dots + (r_1 \cdot q^{n-1})^2\right)$

$$S_n = \pi\left(r_1^2 + r_1^2 \cdot q^2 + \dots + r_1^2 \cdot q^{2n-1}\right)$$

$$S_n = \pi \cdot r_1^2 \cdot \left(1 + q^2 + \dots + q^{2n-1}\right) = P_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(q^{2i-2}\right)$$

- $$\frac{S_5}{P_1} = \frac{P_1}{P_1} \cdot \sum_{i=1}^{5} \left(3^{2i-2}\right) = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + 3^8$$

$$S_5 : P_1 = 7381$$

→ **úročování**

- **jednoduché**: vždy úročím počáteční vklad - AP
- **složené**: vždy úročím aktuální částku - GP

→ **pojmy**

- počáteční vklad : C_0
- počáteční dluh : D_0
- splátka : S
- roční úrok: p_a
- měsíční úrok: p_m
- čtvrdletní úrok: p_s

$$C_n = C_0 \cdot q^n$$

→ $C_0 = 2000\$$
$p_a = 6\%$

→ kolik bude mít v bance za 6 let?

$$\left.\begin{aligned} C_6 &= C_0 \cdot p_a^6 \\ C_6 &= 2000 \cdot 1{,}06^6 \end{aligned}\right\} \underline{\underline{C_6 \doteq 2837\$}}$$

→ $C_0 = 5000$ Kč
$p_m = 11\%$
$C_n = 22\,000$ Kč

→ za kolik let bude mít C_n?

$$C_n = C_0 \cdot q^n$$

$$22\,000 = 5000 \cdot 1{,}11^n$$

$$4{,}4 = 1{,}11^n \Rightarrow \log(4{,}4) = n \cdot \log(1{,}11) \Rightarrow n = \frac{\log(4{,}4)}{\log(1{,}11)} \doteq 14{,}2$$

$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow$ Za 1,25 roka tam bude mít 22 000.

→ **půjčky a dluhy**

→ když člověk splácí vždy když se úročí

$$D_1 = q \cdot D_0 - S$$

$$D_2 = q \cdot D_1 - S = q^2 \cdot D_0 - S \cdot q - S$$

$$\vdots$$

$$D_n = D_0 \cdot q^n - S \cdot q^{n-1} - S \cdot q^{n-2} - \dots - S \cdot q - S$$

$$D_n = D_0 \cdot q^n - S(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \rightarrow S_n = 1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\boxed{D_n = D_0 \cdot q^n - S \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

• $D_0 = 300\,000$ Kč

$p_a = 14\%$

$n = 5$ let → za 5 let to chce mít splacený ⇒ $D_5 = 0$

$S = ?$

$$D_5 = 0 = D_0 \cdot q^5 - S \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$$

$$S \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = D_0 \cdot q^5$$

$$S = D_0 \cdot q^5 \cdot \frac{q - 1}{q^5 - 1}$$

$$S = 300\,000 \cdot 1{,}14^5 \cdot \frac{0{,}14}{1{,}14^5 - 1}$$

$$\underline{\underline{S = 87\,385 \text{ Kč}}}$$

• $S = 50\,000$

$p_a = 15\%$

$n = 20$ let → chce to splatit za 20 let ⇒ $D_{20} = 0$

$D_0 = ?$

$$0 = D_0 \cdot q^{20} - S \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1}$$

$$D_0 = \frac{S}{q^{20}} \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = \frac{50\,000}{1{,}15^{20}} \cdot \frac{1{,}15^{20} - 1}{0{,}15}$$

$$\underline{\underline{D_0 = 313\,000 \text{ Kč}}}$$

→ **Spoření**

• <u>základní vklad</u> = jistina

• <u>úrok</u> = částka, kterou vám banka platí za to, že jste jí půjčili

• <u>roční úrokovací míra</u> = částka v procentech, udávající velikost úroku za uložení peněz na 1 rok

• <u>úrokovací období</u> = doba, po které banka připíše úrok

→ 1 rok = 360 dní – připíše 1x úrok

→ 1 měsíc = 30 dní – připíše $12 \times \frac{1}{12}$ úroku

→ 1 den – připíše $360 \times \frac{1}{360}$ úroku

• <u>úrokovací doba</u> = doba, po kterou vkladatel půjčuje bance peníze

• <u>výpovědní lhůta</u> = doba, po které si vkladatel může vybrat peníze

→ pokud chce dřív ⇒ pokuta

• <u>daň z příjmu z úroků</u> – platí se státu 15% úroků

→ platí se pouze u spoření

→ jednoduché úrokování

→ úroková míra – např. 1,02

→ bez daně: $C_n = C_0 + n \cdot C_0 \cdot p$

→ daň = 0,85

→ s daní: $C_n = C_0 + n \cdot C_0 \cdot p \cdot d = C_0 \cdot (1 + n \cdot p \cdot d)$

$C_n = C_0 + u_n$

⇒ úrok po n zúročeních: $u_n = n \cdot C_0 \cdot p \cdot d$

- Občan si 24.5. 2014 vložil na účet 10 500 Kč.
  Kolik bude jeho výnos 2.12.2017? $p_a = 12\%$

→ při počítání půjčky se započítává den vkladu ale nezapočítává den výběru.

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 2014: 7 \text{ dnů} + 7 \text{ měsíců} = 7 + 7 \cdot 30 \\ &2015: 1 \text{ rok} = 12 \cdot 30 \\ &2016: 1 \text{ rok} = 12 \cdot 30 \\ &2017: 11 \text{ měsíců} + 1 \text{ den} = 1 + 11 \cdot 30 \end{aligned}\right\} 3 \cdot \text{rok} + 6 \cdot \text{měsíc} + 8 \cdot \text{den}$$

$$\Rightarrow u = \left(3 \cdot C_0 \cdot 0{,}12 + 6 \cdot C_0 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{1}{12} + 8 \cdot C_0 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{1}{360}\right) \cdot \text{daň}$$

$$u = 10\,500\left(0{,}36 + 0{,}06 + 0{,}12 \cdot \frac{1}{45}\right) \cdot 0{,}85$$

$$u = 3\,772 \text{ Kč}$$

- Občan splatil úvěr i s úroky částkou 1255 000 Kč.
  Půjčka byla splacena po 340 dnech, při ročním úroku 8%
  → jak velký úvěr si vzal?

$$D_0 + \text{úrok} = 1255\,000$$

$$D_0 + D_0 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{340}{360} = 1255\,000$$

$$D_0\left(1 + 0{,}08 \cdot \frac{17}{18}\right) = 1255\,000$$

$$D_0 = \frac{1255\,000}{1 + 0{,}08 \cdot \frac{17}{18}}$$

$$D_0 = 1\,166\,839 \text{ Kč}$$

→ složené úrokování

→ bez daně: $C_1 = C_0 + C_0 \cdot p = C_0(1+p)$
$C_2 = C_1 \cdot (1+p) = C_0 \cdot (1+p)^2$ $\Big\}$ $C_n = C_0 \cdot (1+p)^n$

→ s daní: $C_n = C_0 \cdot (1 + p \cdot d)^n = C_0 + u$

⇒ úrok po zúročeních: $u_n = C_0 \cdot (1 + p \cdot d)^n - C_0$

- Jaký byl vklad, když banka po 5 letech s ročním úrokem 8% vyplatila 41 684,78 Kč s ročním úrokovacím obdobím?

$C_5 = 41\,684{,}78$ Kč
$p_a = 8\%$
$C_0 = ?$

$C_5 = C_0(1 + 0{,}08 \cdot 0{,}85)^5$

$C_0 = \dfrac{41\,684{,}78}{(1 + 0{,}08 \cdot 0{,}85)^5}$

$C_0 = 30\,000$ Kč

- Občan na účet každý měsíc vkládá 1000 Kč. $p_a = 5\%$. Je měsíční úrokovací období. Kolik bude mít po 20 letech?

- na začátku: $C_0 = C_0$
- 1. měsíc: $C_1 = C_0 \cdot q + C_0$
- 2. měsíc: $C_2 = C_1 \cdot q + C_0 = C_0 \cdot q^2 + C_0 \cdot q + C_0$
- 3. měsíc: $C_3 = C_0 \cdot q^3 + C_0 \cdot q^2 + C_0 \cdot q + C_0$
- n. měsíc: $C_n = C_0 (\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{n+1 \text{ členů}})$

$n+1$ členů ⇒ $S_{n+1} = 1 \cdot \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

$$C_n = C_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

→ $q = 1 + 0{,}05 \cdot 0{,}85 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{4817}{4800}$

$n = 20 \cdot 12 = 240$

→ $C_{240} = 1000 \cdot \dfrac{q^{241} - 1}{q - 1}$

$C_{240} = 379\,598$ Kč

Limity posloupností

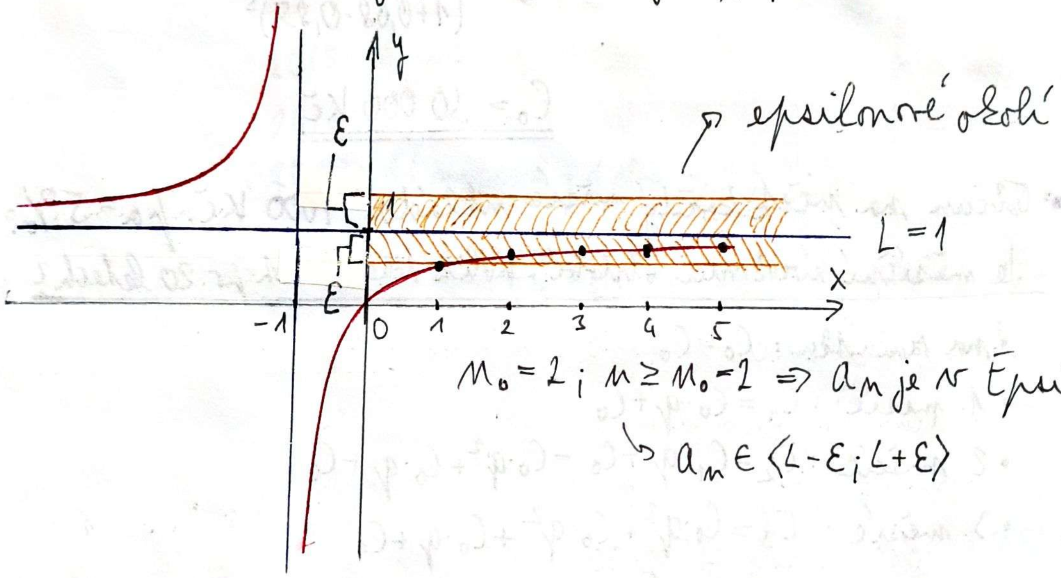
definice

$$\lim_{n \to \infty}(a_n) = L \iff \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in N;\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

- limita posloupnosti = číslo, ke kterému se hodnoty dané posloupnosti v nekonečnu přibližují
- posloupnost je konvergentní pokud má reálnou limitu
- posloupnost je divergentní pokud má limitu rovnu nekonečnu, minus nekonečnu nebo limitu nemá

příklad

$$a_n = \frac{n}{n+1} \to f: y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y = \frac{-1}{x+1} + 1 \quad S[-1;1]$$



$n_0 = 2;\ n \geq n_0 = 2 \Rightarrow a_n$ je v Epsilonovém okolí

$\rightarrow a_n \in \langle L - \varepsilon; L + \varepsilon \rangle$

věty o limitě posloupnosti

- každá posloupnost má max. 1 limitu
- každá konvergentní posloupnost je omezená
- každá omezená monotónní posloupnost je konvergentní
- každá shora omezená neklesající posloupnost je konvergentní
- každá zdola omezená nerostoucí posloupnost je konvergentní

→ nechť a_n a b_n jsou konvergentní posloupnosti a nechť $\lim_{n\to\infty}(a_n) = A$, $\lim_{n\to\infty}(b_n) = B$ a C je kladné reálné číslo, pak následující posloupnosti jsou také konvergentní a platí: L

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty}(C \cdot a_n) = C \cdot A$
- $\lim_{n\to\infty}(|a_n|) = |A|$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$ pro $B \neq 0$

→ základní limity

- $\lim_{n\to\infty}(a \cdot n^k) = \infty \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n^k}\right) = 0$ pro $k \in R^+$
- $\lim_{n\to\infty}(a^n) = \begin{cases} 0 \text{ pro } a \in (-1;1) \\ \infty \text{ pro } a \in \langle 1;\infty) \\ \text{neexistuje pro } a \in (-\infty;-1\rangle \end{cases}$

→ příklady

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right) = \underline{\underline{0}}$
- $\lim_{n\to\infty}(7) = \underline{\underline{7}}$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\cdot n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{4}{1+0} = \underline{\underline{4}}$
- $\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right] = 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\cdot n^2 - 4n + 7}{17\cdot n^2 + n - 6}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2 - 4n + 7}{17n^2 + n - 6} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right) =$
  $= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5 - \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{17 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}}\right) = \frac{5-0+0}{17+0-0} = \underline{\underline{\frac{5}{17}}}$
- $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{4} - 16\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4^{\frac{1}{n}} - 16\right) = \lim_{n\to\infty}\left(4^0 - 16\right) = \underline{\underline{-15}}$

→ limita podílu polynomů

• stejného stupně → podíl koeficientů nejvyšších mocnin

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-2}{3n^2-n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{5+0-0}{3-0+0}=\underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

• v čitateli je vyšší stupeň → nekonečno / −nekonečno

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-2}{-n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{5}{\frac{1}{\infty}}=\underline{\underline{\infty}}$$

• ve jmenovateli je vyšší stupeň → nula ↳ nebo rozšířím $\frac{1}{n^{k-1}}$ místo $\frac{1}{n^k}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n^2-n+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{3-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{0}{3}=\underline{\underline{0}}$$

→ limita podílu exponenciálních výrazů

→ vždy dělím výrazem s největším základem

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5\cdot 2^n-3\cdot 3^n+5}{2\cdot 3^n+3\cdot 7^n-1}\cdot\frac{\frac{1}{7^n}}{\frac{1}{7^n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^n-3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+5\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n}{2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+3-1\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n}\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5\cdot 0-3\cdot 0+5\cdot 0}{2\cdot 0+3-1\cdot 0}\right]=\frac{0}{3}=\underline{0}$$

→ v čitateli je max. základ a 1. ve jmenovateli b

$a=b \Rightarrow L=$ podíl koeficientů

$a>b \Rightarrow L=\infty \vee -\infty$

$a<b \Rightarrow L=0$

→ limita součtu nebo rozdílu odmocnin

→ upravím na rozdíl čtverců ⇒ zlomek ⇒ to umím

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2+2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt{n^2-4}-\sqrt{n^2+2n}\right)\left(\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2+2n}\right)}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2+2n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2-4-n^2-2n}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2+2n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-2n-4}{\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2+2n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{-2-\frac{4}{n}}{\sqrt{1-\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}\right]=\frac{-2}{1+1}=-1$$

11) a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{3n-6}\right)=\frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{n^2+n-2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=\frac{3+0}{1+0-0}=3$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4n}{3-7n}\right)=-\frac{4}{7}$

12) a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2}{n^2-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}\right)=\frac{1}{\frac{1}{\infty}}=\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^3}}\right)=\frac{0}{1}=0$

13) a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+3}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}=\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4x^2-x}{3x^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4-0}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+0}{2-0}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n^2+n}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+0}{1}}=\sqrt{2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+2x+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+0}{1+0+0}}=1$

→ příklady

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}-1}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{0}-1\right) = \underline{\underline{-1}}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n}+\sqrt{n+5}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{n+2}{n}}+\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{n+5}{n}}}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2-1} = \underline{\underline{2\sqrt{2}-2}}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n-1}+5}{4-2^{n+3}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}\cdot 3^{n}+5}{4-8\cdot 2^{n}}\cdot\frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\underbrace{4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{0^-}}\right) =$$
$$= \frac{\frac{1}{3}+5\cdot\frac{1}{\infty}}{4\cdot\frac{1}{\infty}-8\cdot\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{1}{\infty}} = -\frac{\infty}{3} = \underline{\underline{-\infty}}$$

↳ blížím se k 0 z leva

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7-\log n}{2\cdot\log n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{7}{\log n}-1}{2+\frac{1}{\log n}}\right) = \frac{0-1}{2+0} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{e}}}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{3}n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{3}n}\right)^{\frac{1}{3}n\cdot 3} = \underline{\underline{e^{3}}}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{3n}\right)^{\frac{1}{2}n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{1}{2}n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3}{4}n}\right)^{\frac{3}{4}n\cdot\frac{2}{3}} =$$
$$= e^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{e^2}}}$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(\sin(2n)\right)$ – nemá limitu

→ důkazy limit pomocí definice

• $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n}\right)=2$ | $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-L|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n}-2\right|<\varepsilon$

→ dokážu, že pro každé ε existuje n_0, které splňuje podmínku

$\left|\frac{2n-1}{n}-2\right| = \left|\frac{2n-1-2n}{n}\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{|n|} \wedge n\in N \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Rightarrow n_0>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_k=n_0+k \wedge k\in N$

$n_0+k>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_k>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n_k}<\varepsilon$ cbd

• $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{1-2n}\right)=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n+2}{1-2n}+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{n+2}{1-2n}+\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+4+1-2n}{2-4n}\right| = \left|\frac{5}{2-4n}\right| = \frac{5}{|2-4n|} =$

$=\frac{5}{|4n-2|} \wedge n\in N \Rightarrow \frac{5}{4n-2}<\varepsilon \Rightarrow \frac{5}{\varepsilon}<4n_0-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5}{\varepsilon}+2<4n_0 \Rightarrow n_0>\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$ → k $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N$ ✓ $\Rightarrow n_k=n_0+k \wedge k\in N$

tohle už není important $\Bigg\{$ $n_0+k>\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{1}{2} \Rightarrow n_k-\frac{1}{2}>\frac{5}{4\varepsilon} \Rightarrow 4\varepsilon\left(n_k-\frac{1}{2}\right)>5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon>\frac{5}{4n_k-2}$ cbd

• $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)=2 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N;\ n\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{2n^2+1}{n^2}-2\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{2n^2+1}{n^2}-2\right| = \left|\frac{2n^2+1-2n^2}{n^2}\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}<\varepsilon \Rightarrow n^2>\frac{1}{\varepsilon} \wedge n\in N \Rightarrow n_0>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

13

1) dokaž na základě definice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1-3n} = -\frac{1}{3} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in N;\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{n}{1-3n}+\frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{n}{1-3n}+\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n+1-3n}{3-9n}\right| = \left|\frac{1}{3-9n}\right| =$$

$$= \frac{1}{|9n-3|} = \frac{1}{9n-3} \Rightarrow \frac{1}{9n-3} < \varepsilon$$

$\hookrightarrow n \in N$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 9n-3$$

$$\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3} < n \Rightarrow n_0 > \frac{3\varepsilon+1}{9\varepsilon}$$

2) a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{1-3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1}{-3n^3+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{-3+\frac{1}{n^3}} = -\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n+4^n}{1-5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n+4^n}{1-5\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n-5} = -\frac{1}{5}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2-1}}{n+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{2}$$

d) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3}{2}$$

e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2^{3n}}{2+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-8^n}{2+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^n-1}{\frac{2}{8^n}+\left(\frac{3}{8}\right)^n} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{8}{3}\right)^n}{\frac{2}{3^n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

- Řady

- řada = součet prvků posloupnosti

• konečná: $\sum_{n=1}^{k} a_n$

• nekonečná: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

→ nekonečné geometrické řady

• divergentní

→ pokud: $|q| \geq 1$

→ buď nemají součet, nebo vyjdou +/- nekonečno

• konvergentní

⇒ podmínka konvergence: $|q| < 1$

→ pokud mám posloupnost a_n, která splňuje podmínku konvergence, pak je řada S_n konvergentní a má součet S.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} \left[a_1 \frac{q^n-1}{q-1}\right]$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\frac{a_1}{q-1}}_{\text{konstanty}} \cdot (\underbrace{q^n}_{|q|<1} - 1)\right] = \frac{a_1}{q-1} \cdot (0-1) = \frac{a_1}{1-q}$$

$$\Rightarrow S = \frac{a_1}{1-q}$$

→ příklady

• $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots$

$a_1 = \frac{1}{2} \wedge q = -\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

• $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \cos^{2(n-1)}(x) = 1 + \cos^2(x) + \cos^4(x) + \cos^6(x) + \ldots$

$a_1 = 1 \wedge q = \cos^2(x) \Rightarrow |\cos^2(x)| < 1 \Rightarrow |\cos(x)| < 1$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{k\cdot\pi\}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{1-\cos^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} = \csc^2(x)$

- $(x-2)+(x-2)^2+(x-2)^3+(x-2)^4+\dots=3$

$a_1=(x-2) \wedge q=(x-2)$

$\Rightarrow |x-2|<1 \Rightarrow x\in(1;3)$ ✓

$\Rightarrow S=\frac{x-2}{1-x+2}=\frac{x-2}{3-x}=3$

$x-2=9-3x \Rightarrow 4x=11 \Rightarrow x=\frac{11}{4}$

$\Rightarrow K=\left\{\frac{11}{4}\right\}$

70) a) $3+9+27+81+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}3^n$

c) $2-4+8-16+32-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2^n$

71) a) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=x^2+x^4+x^6+x^8+\dots \Rightarrow a_1=x^2 \wedge q=x^2$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}5(x+1)^{-n}=\frac{5}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}+\dots \Rightarrow a_1=\frac{5}{x+1} \wedge q=\frac{1}{x+1}$

72) a) $\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\dots \Rightarrow$ konvergentní

$a_1=\frac{3}{2} \wedge q=\frac{1}{2} \Rightarrow S=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$

c) $\sqrt{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\dots \Rightarrow$ konvergentní

$a_1=\sqrt{2} \wedge q=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

$\Rightarrow S=\frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4-2}=2\sqrt{2}+2$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{5})^{-n}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\dots \Rightarrow$ konvergentní

$a_1=\frac{\sqrt{5}}{5} \wedge q=\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow S=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{5-\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$

$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{5}(5+\sqrt{5})}{25-5}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{20}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\doteq 0{,}8$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$

$\left.\begin{array}{l}a_1=-\frac{2}{3}\\ q=-\frac{3}{2}\end{array}\right\}$ divergentní $\Rightarrow$ součet neexistuje

74, a) $1+3x+9x^2+\dots=10$

$a_1=1 \wedge q=3x \Rightarrow |3x|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{3} \Rightarrow x\in(-\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

$\Rightarrow S=\frac{1}{1-3x}=10 \Rightarrow 1=10-30x$

$\Rightarrow x=\frac{3}{10}$ ✓ $\Rightarrow K=\{\frac{3}{10}\}$

→ zapeklitější příklady

- $\log(x)+\log\sqrt{x}+\log\sqrt[4]{x}+\log\sqrt[8]{x}+\dots=2$

$\log(x)+\frac{1}{2}\log(x)+\frac{1}{4}\log(x)+\frac{1}{8}\log(x)+\dots=2$

$\log(x)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots\right]=2$

$2\cdot\log(x)=2 \Rightarrow \log(x)=1 \Rightarrow \underline{\underline{x=10}}$

- $x\cdot\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[16]{x^3}\cdot\dots=81$ → P: $x\geq 0$

$x\cdot x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{3}{8}}\cdot x^{\frac{3}{16}}\cdot\dots=81$

$x^{1+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\dots}=x^{1+3(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots)}=x^{1+3}=x^4=81$

$\Rightarrow |x|=3 \wedge$ P: $x\geq 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$

- $x=0{,}5\overline{39}$ – zapiš nekonečnou řadou a vyjádři zlomkem

$0{,}5\overline{39}=\frac{5}{10}+\frac{39}{1000}+\frac{39}{10^5}+\frac{39}{10^7}+\dots=$

$=\frac{5}{10}+\frac{39}{1000}\underbrace{\left(1+10^{-2}+10^{-4}+\dots\right)}$

$a_1=1 \wedge q=10^{-2} \Rightarrow S=\frac{1}{\frac{99}{100}}=\frac{100}{99}$

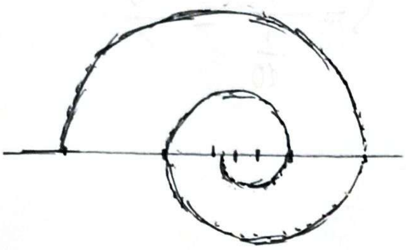
$\Rightarrow 0{,}5\overline{39}=\frac{1}{2}+\frac{39}{10^3}\cdot\frac{10^2}{99}=\frac{1}{2}+\frac{39}{990}=$

$=\frac{495+39}{990}=\frac{534}{990} \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{89}{165}}}$

$$\left.\begin{array}{l}10x=5{,}\overline{39}\\1000x=539{,}\overline{39}\end{array}\right\}\ 990x=534$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{534}{990}=\frac{89}{165}}}$

- spirála z půlkružnic, kde každá další půlkružnice má polomer kratší o tretinu predchozího polomeru

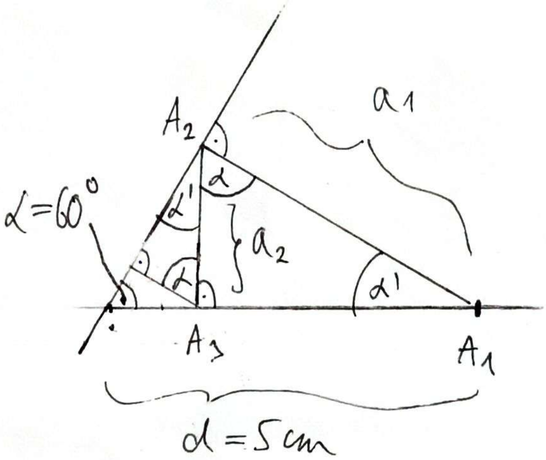


$$r_1 = r_1 \rightarrow l_1 = \pi \cdot r_1$$
$$r_2 = \frac{2}{3} r_1 \rightarrow l_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot r_1$$
$$r_3 = \frac{4}{9} r_1 \rightarrow l_3 = \frac{4}{9}\pi \cdot r_1$$
$$r_4 = \frac{8}{27} r_1 \rightarrow l_4 = \frac{8}{27}\pi \cdot r_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \pi \cdot r_1 \wedge q = \frac{2}{3} \Rightarrow S = \frac{\pi \cdot r_1}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{3\pi \cdot r_1}}$$

- urči délku čáry $A_1, A_2 A_3 \dots$ $\alpha = 60^\circ \wedge d = 5$ cm

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{\sin(\alpha')} = \frac{a_n}{\sin(90)} = a_n$$
$$a_{n+1} = a_n \cdot \sin(\alpha')$$
$$\Rightarrow \frac{a_1}{\sin(\alpha)} = \frac{d}{\sin(90)} = d$$
$$a_1 = d \cdot \sin(\alpha)$$



$$\Rightarrow a_1 = d \cdot \sin(\alpha) \wedge q = \sin(90 - \alpha)$$
$$S = \frac{d \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(90-\alpha)} = \frac{5 \cdot \sin(60)}{1 - \sin(30)}$$
$$\Rightarrow S = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{5\sqrt{3}}}$$