FUNKCE

- funkce = zobrazení v R $\Rightarrow F \subset R^2$
- vlastnosti
  - D(f) – množina všech přípustných hodnot x
  - H(f) – množina všech přípustných hodnot y
  - monotonnost
    - rostoucí → $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
    - klesající → $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
    - neklesající → $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
    - nerostoucí → $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
    - konstantní → $x_1, x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

→ $f(x) = \frac{2x^2}{|x|-1}$

$Df: |x| \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1$

$D(f) = R \setminus \{-1; 1\}$ ✓

$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{|-x|-1} = \frac{2x^2}{|x|-1}$

$\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow$ sudá

  - parita
    - → pro každé x musí v D(f) být i −x
    - sudá → $f(-x) = f(x)$ → osová souměrnost podle y
    - lichá → $f(-x) = -f(x)$ → středová souměrnost podle počátku
  - prostost
    - všechny fční hodnoty jsou unikátní
    - → pro každé y nabývá max. 1 x

    $\Bigg\}\ x_1, x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  - omezenost
    - shora $\Leftrightarrow \exists A \in R;\ \forall x \in D(f);\ f(x) \leq A$
    - zdola $\Leftrightarrow \exists A \in R;\ \forall x \in D(f);\ f(x) \geq A$
  - extrémy
    - maximum v $M \in D(f) \Leftrightarrow \forall x \in D(f);\ f(x) \leq f(M)$
    - minimum v $M \in D(f) \Leftrightarrow \forall x \in D(f);\ f(x) \geq f(M)$
    - → pokud existuje jen 1 max / minimum

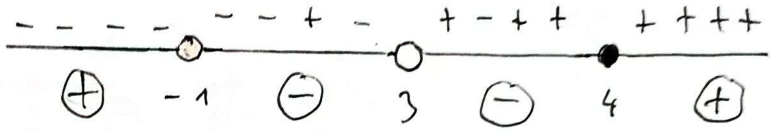
      ⇒ ostré maximum / ostré minimum

- příklady

3) $f: y = \sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$

$$\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3} \geq 0 \quad \begin{matrix} \nearrow x_{1,2} = 3, 4 \\ \searrow x_{1,2} = -1, 3 \end{matrix}$$

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x+1)(x-3)} \geq 0 \rightarrow NB: x = 3;\ x = 4;\ x = -1;\ x = 3$$



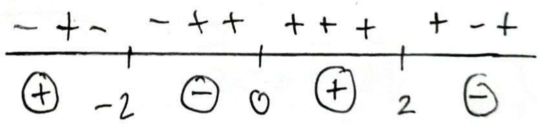
$\Rightarrow$ $D(f) = (-\infty; -1) \cup \langle 4; \infty)$

4) A) $f: y = \dfrac{1}{x^2+x-2}$ $\rightarrow$ $x^2+x-2 \neq 0$

$x_{1,2} = -2, 1$ $\Big\}$ $D(f) = R \setminus \{1; -2\}$

B) $f: y = \sqrt{4x - x^3}$ $\rightarrow$ $x(4-x^2) \geq 0$

$x(2-x)(2+x) \geq 0 \rightarrow NB: x = 0;\ x = 2;\ x = -2$



$\Rightarrow$ $D(f) = (-\infty; -2) \cup \langle 0; 2\rangle$

5) $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{1}{x-1}$

$4 - x^2 \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 1$

$x^2 \leq 4$

$|x| \leq 2$ $\rightarrow$ $D(f) = \langle -2; 2\rangle \setminus \{1\}$

6) $f: y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}$

$-x + 5 - \frac{6}{x} \geq 0 \quad \wedge \ x \neq 0$

$x^2 - 5x + 6 \leq 0$ $\Rightarrow$ $D(f) = \langle 2; 3\rangle$

$x_{1,2} = 2, 3$

7) $f: y = \sqrt{1-x} + \ln(x+1)$

$$1 - x \geq 0 \quad \wedge \quad x + 1 > 0$$

$$x \leq 1 \qquad\qquad x > -1$$

$$\rightarrow -1 < x \leq 1 \quad \Rightarrow D(f) = (-1; 1\rangle$$

8) $f: y = \log_2\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

$$\frac{x-2}{x+2} > 0 \quad \rightarrow NB: x = 2 \; ; \; x = -2$$

$$\begin{array}{ccccc} - \; - & & - \; + & & + \; + \\ \hline + & -2 & - & 2 & + \end{array}$$

$$\Rightarrow D(f) = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$

9) $f: y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{\ln(9-x)}$

$$x + 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 9 - x > 0$$

$$x \geq -5 \qquad\qquad x < 9$$

$$\rightarrow -5 \leq x < 9 \quad \Rightarrow D(f) = \langle -5; 9)$$

10) $f: y = \dfrac{\sqrt{6x - x^2 - 5}}{5^{x-2} - 1}$

$$-x^2 + 6x - 5 \geq 0 \quad \wedge \quad 5^{x-2} - 1 \neq 0$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0 \qquad\qquad 5^{x-2} \neq 1$$

$$x_{1,2} = 5, 1 \qquad\qquad x - 2 \neq 0$$

$$\Rightarrow x \in \langle 1; 5\rangle \qquad\qquad x \neq 2$$

$$\Rightarrow D(f) = \langle 1; 5\rangle \setminus \{2\}$$

11) $f: y = \sqrt{2^x - 3^x}$

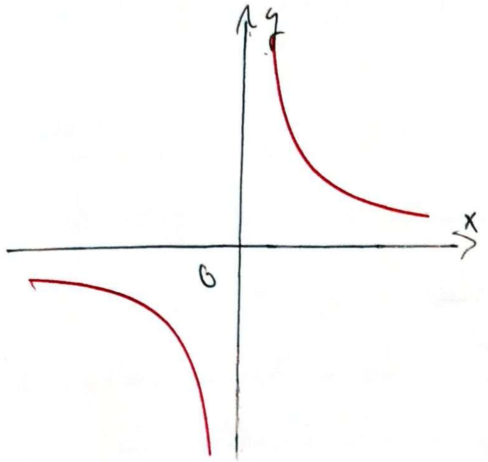
$$2^x - 3^x \geq 0$$

$$2^x \geq 3^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq 1 \quad \Rightarrow D(f) = (-\infty; 0\rangle$$

$$x \leq 0$$

a)



$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

je prostá

je lichá

není spojitá

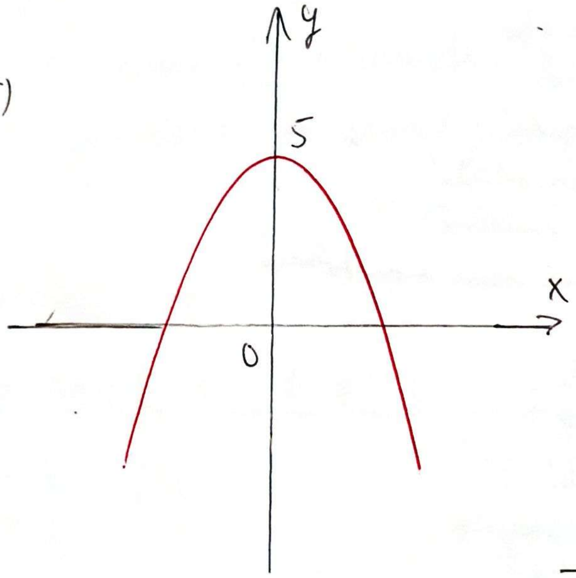
není periodická

není omezená

je klesající – na $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$

---

d)



$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = (-\infty;5\rangle$

není prostá

je sudá

je spojitá

není periodická

je omezená shora

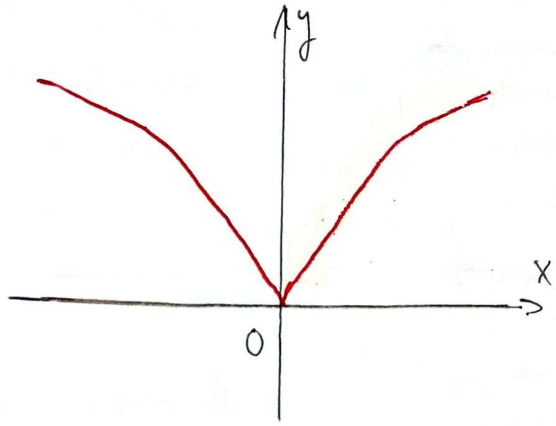
globálně není monotónní

je r. na $(-\infty;0\rangle$

je k. na $\langle 0;\infty)$

---

b)



$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = \langle 0;\infty)$

není prostá

je sudá

je spojitá

není periodická

je omezená zdola

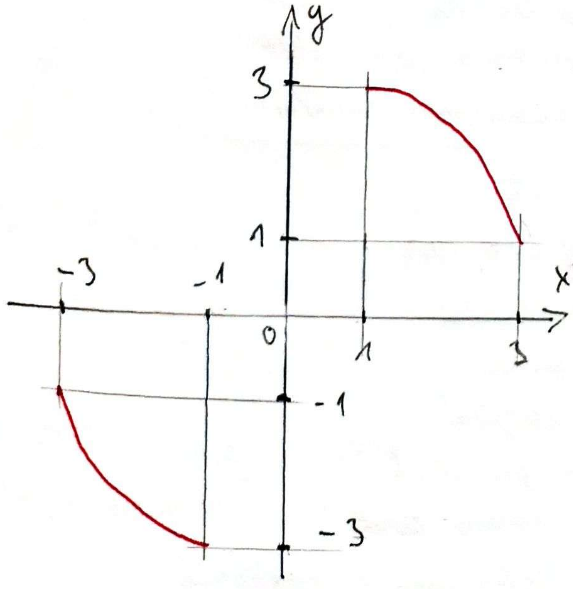
globálně není monotónní

je k. na $(-\infty;0\rangle$

je r. na $\langle 0;\infty)$

---

c)



$D(f) = \langle -3;-1\rangle \cup \langle 1;3\rangle$

$H(f) = \langle -3;-1\rangle \cup \langle 1;3\rangle$

je prostá

je lichá

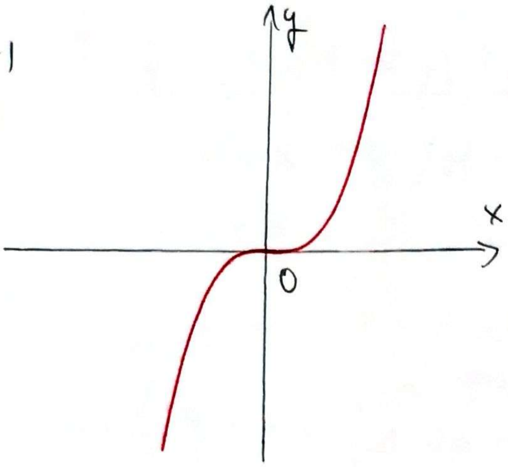
není spojitá

není periodická

je omezená

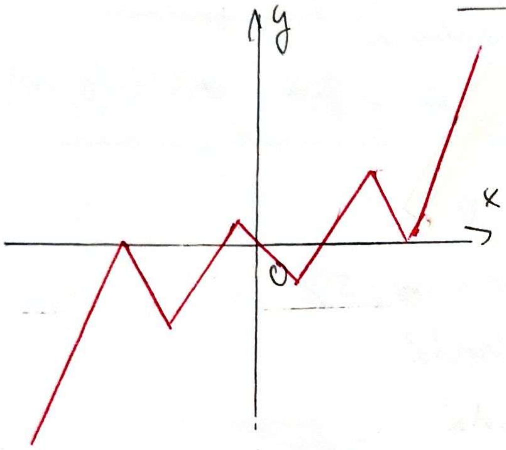
je klesající / na $\langle -3;-1\rangle \cup \langle 1;3\rangle$

e)



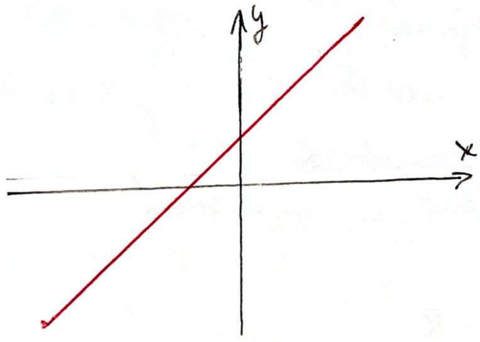
$D(f)=R$
$H(f)=R$
je prostá
je lichá
je spojitá
není periodická
není omezená
je rostoucí

f)



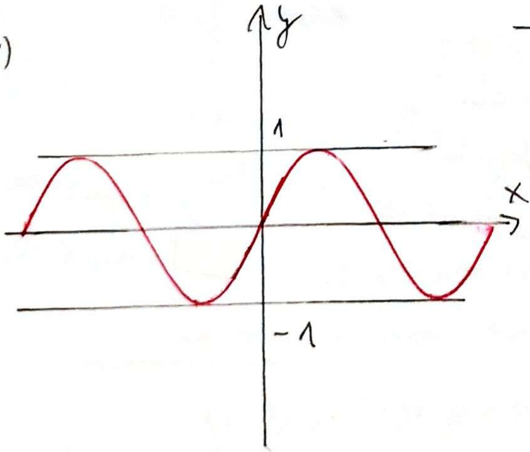
$D(f)=R$
$H(f)=R$
není prostá
je lichá
je spojitá
není periodická
není omezená
globálně není monotónní

g)



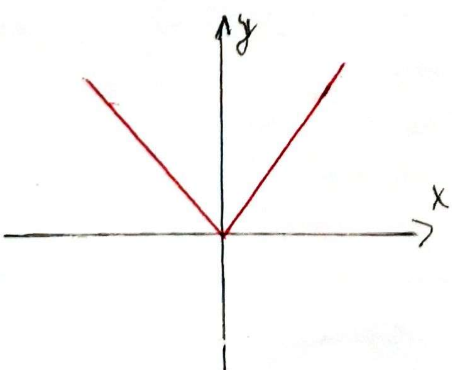
$D(f)=R$
$H(f)=R$
je prostá
nemá paritu
je spojitá
není periodická
není omezená
je rostoucí

h)



$D(f)=R$
$H(f)=\langle -1;1\rangle$
není prostá
je lichá
je spojitá
je periodická
je omezená
globálně není monotónní

i)



$D(f)=R$
$H(f)=\langle 0;\infty)$
není prostá
je sudá
je spojitá
není periodická
je omezená zdola
globálně není monotónní

je k. na $(-\infty;0\rangle$
je r. na $\langle 0;\infty)$

LINEÁRNÍ FUNKCE

$y = ax + b \wedge a, b \in R$

- $a = 0 \Rightarrow y = b$ – konstantní funkce
- $b = 0 \Rightarrow y = ax$ – přímá úměrnost

→ a mění monotonnost a natočení

→ b mění průsečík s osou y

→ parametrický systém lineárních funkcí

- měním b → rovnoběžky s $y = ax$
- měním a → svazek přímek protínajících se v $[0; b]$

↳ až na osu y – to není funkce

→ vlastnosti

1) $y = ax + b \wedge a, b \neq 0$	2) $y = ax \wedge a \neq 0$	3) $y = b$
$D(f) = R$	$D(f) = R$	$D(f) = R$
$H(f) = R$	$H(f) = R$	$H(f) = \{b\}$
$a > 0$ → rostoucí	$a > 0$ → rostoucí	je konstantní
$a < 0$ → klesající	$a < 0$ → klesající	$b \neq 0$ → sudá
nemá paritu	je lichá	$b = 0$ → sudá i lichá
je prostá	je prostá	není prostá
není periodická	není periodická	je periodická ale nelze určit periodu
není omezená	není omezená	je omezená shora i zdola
grafem je přímka	grafem je přímka procházející počátkem	grafem je rovnoběžka s osou x

$P_x\left[-\frac{b}{a}; 0\right]$

$P_y[0; b]$

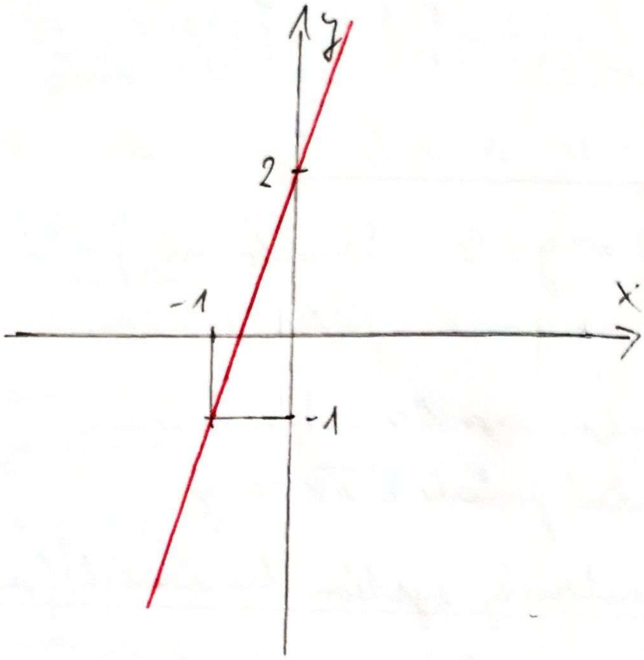
→ způsoby zadání

• předpisem

$f: y = 3x + 2$

• 2 různými body

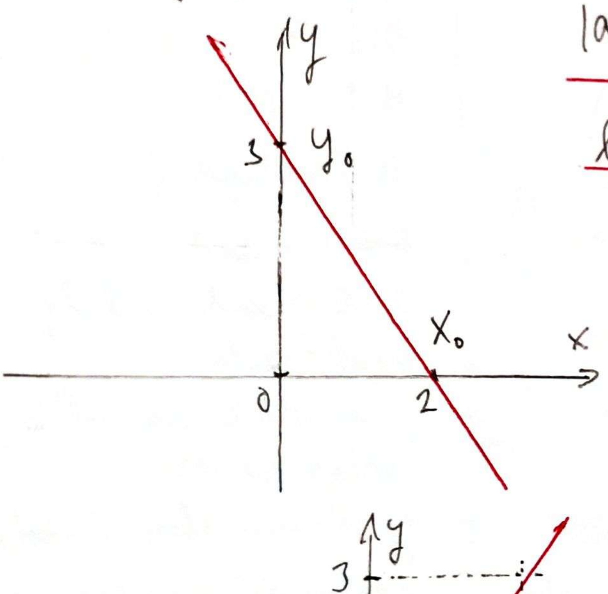
$A[1;5]$
$B[-1;-1]$ } $M[x;y]$



$\Rightarrow 5 = 1 \cdot a + b$
$-1 = -1 \cdot a + b$
$4 = 2b$
$b = 2 \Rightarrow 5 = a + 2$
$a = 3$

} $y = 3x + 2$

• grafem

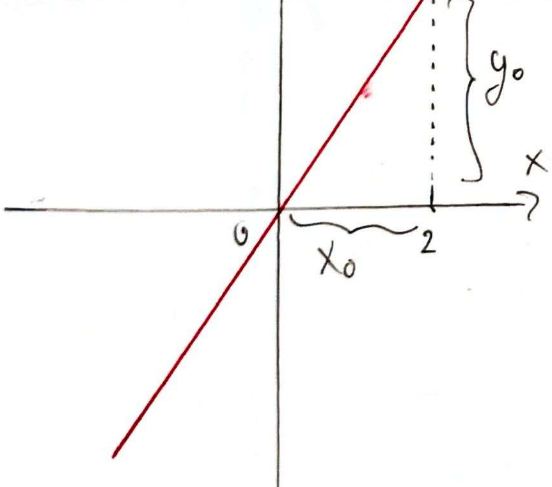


$\nearrow -\frac{y_0}{x_0} = a$

$|a| = \left|\frac{y_0}{x_0}\right| \rightarrow |a| = \left|\frac{3}{2}\right| \Rightarrow a = -1{,}5$

$b = y_0 \rightarrow b = 3$

$\Rightarrow y = -1{,}5x + 3$



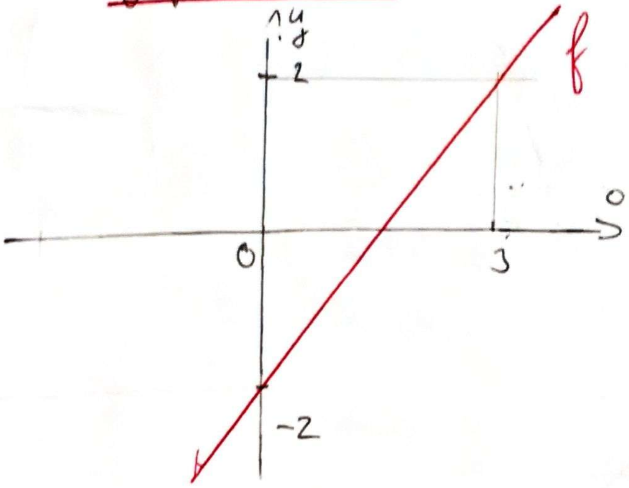
$|a| = \frac{y_0}{x_0} \rightarrow |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1{,}5$

$b = 0 \rightarrow b = 0$

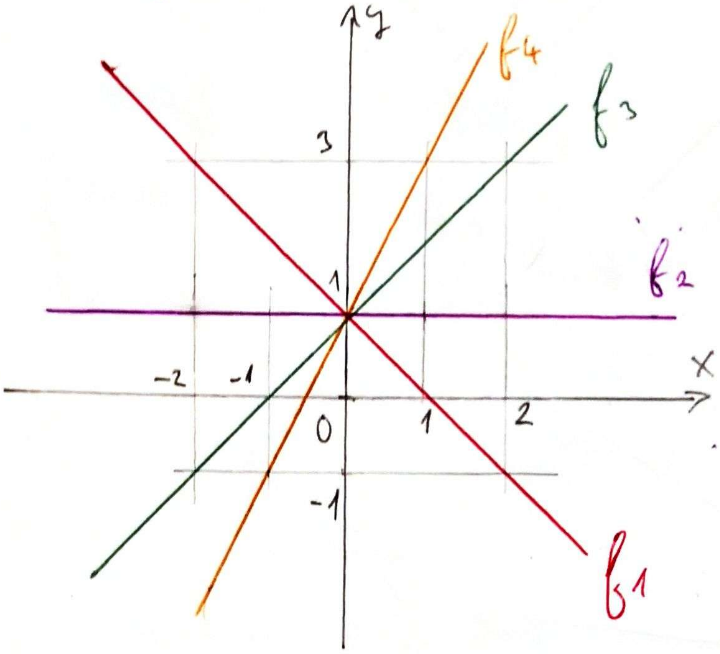
$\Rightarrow y = 1{,}5a$

→ příklady

2) $f: y = \frac{4}{3}x - 2$



4) $y = ax + 1\ ;\ a \in \{-1; 0; 1; 2\}$



$f_1: y = -x + 1$

$f_2: y = 1$

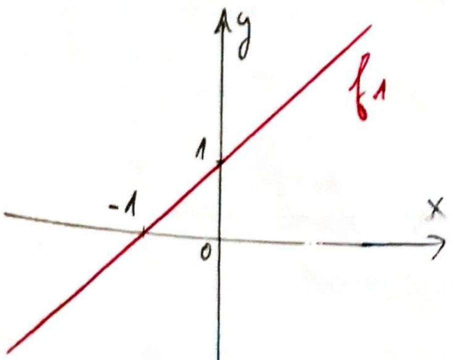
$f_3: y = x + 1$

$f_4: y = 2x + 1$

7) nakresli graf libovolné funkce

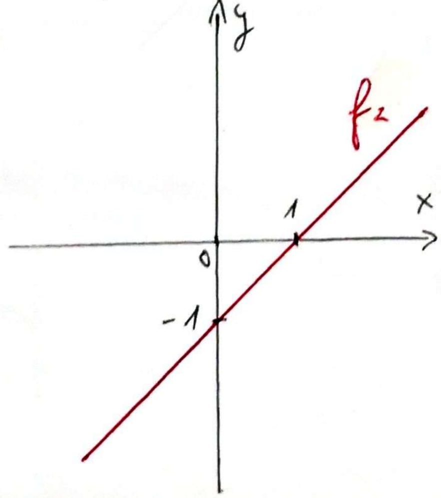
a) $y = ax + 1\ ;\ a > 0$

$\Rightarrow f_1: y = x + 1$



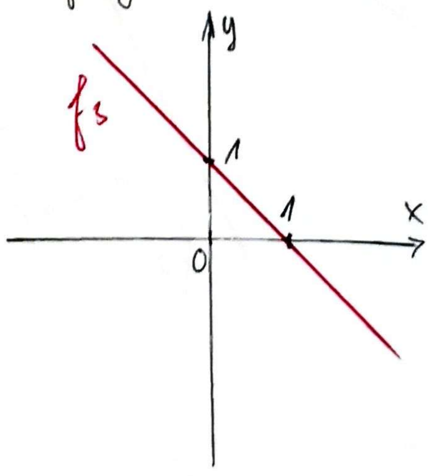
b) $y = x + b\ ;\ b < 0$

$\Rightarrow f_2: y = x - 1$

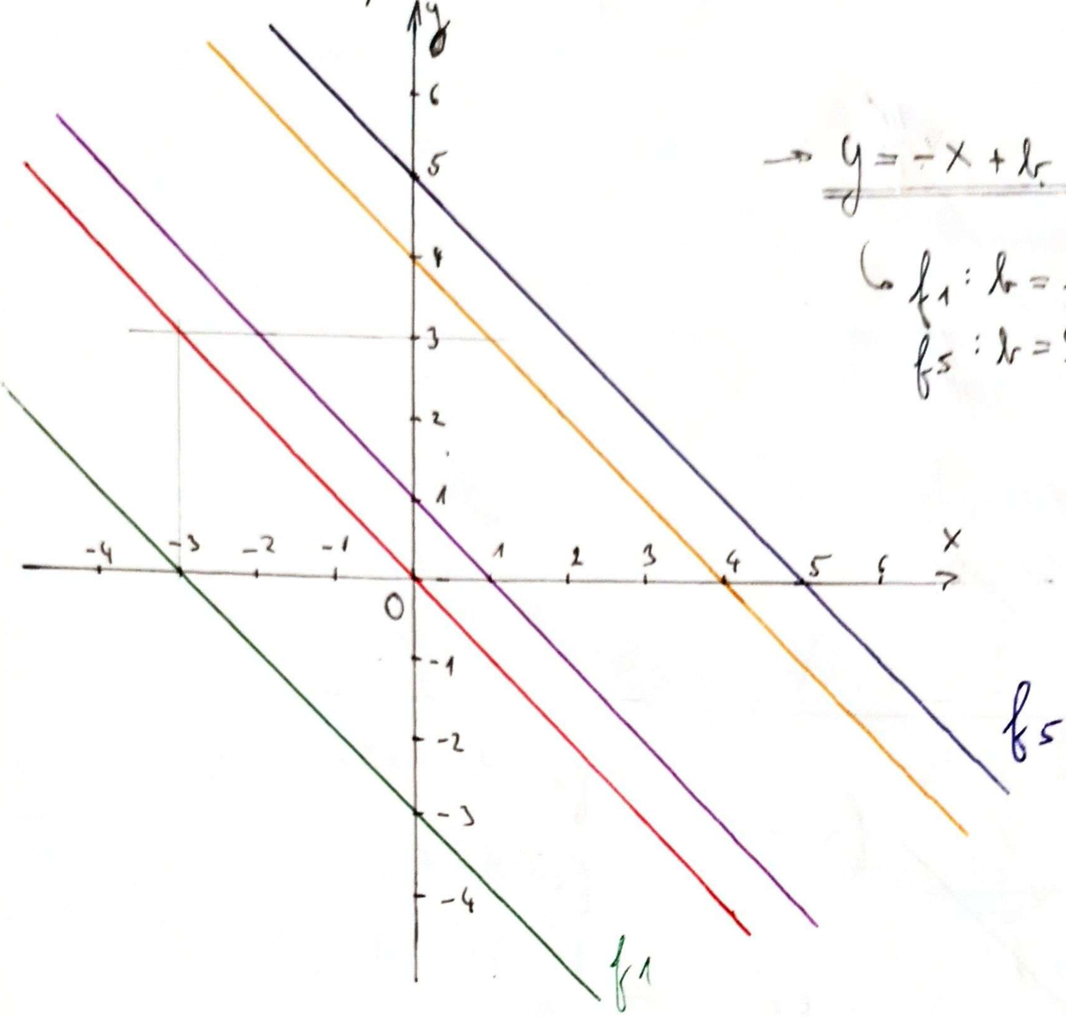


c) $y = ax + b\ ;\ a < 0\ ;\ b > 0$

$\Rightarrow f_3: y = -x + 1$



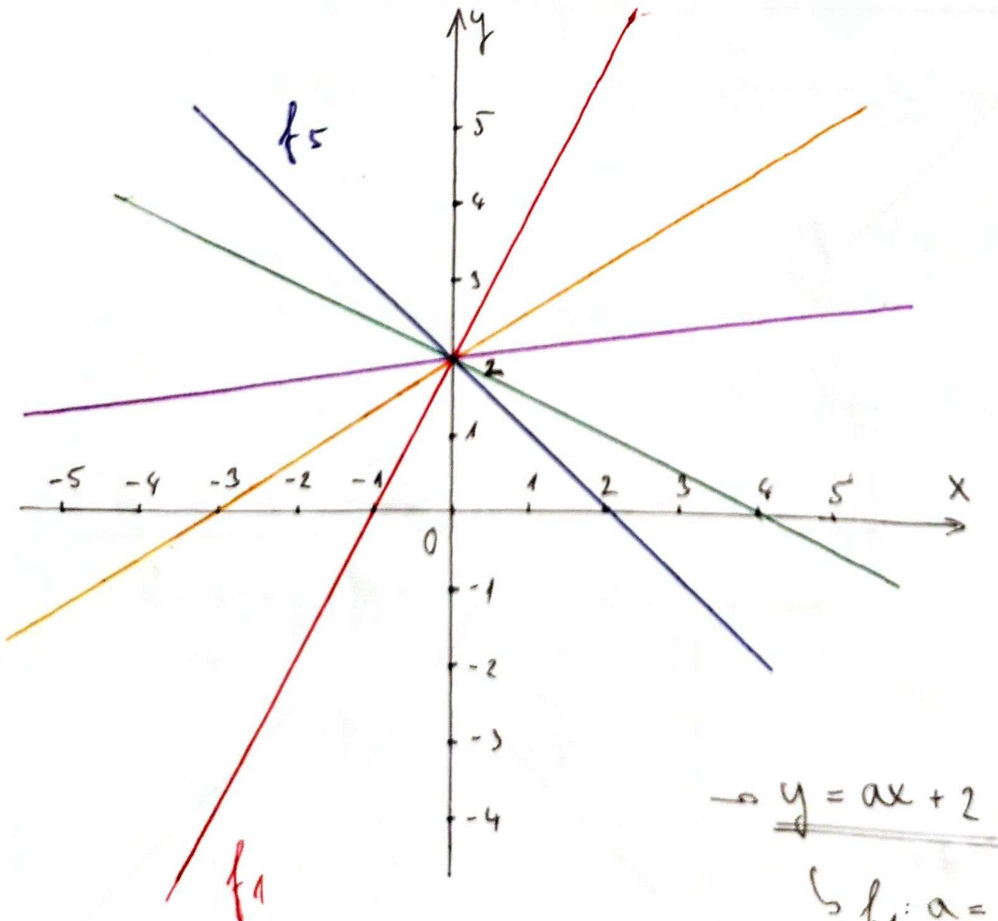
8) zapiš předpis těchto parametrických systémů



→ $y = -x + b \; ; \; b \in \langle -3;5 \rangle$

↳ $f_1 : b = -3$

$f_5 : b = 5$



→ $y = ax + 2 \; ; \; a \in \langle -1;2 \rangle$

↳ $f_1 : a = 2$

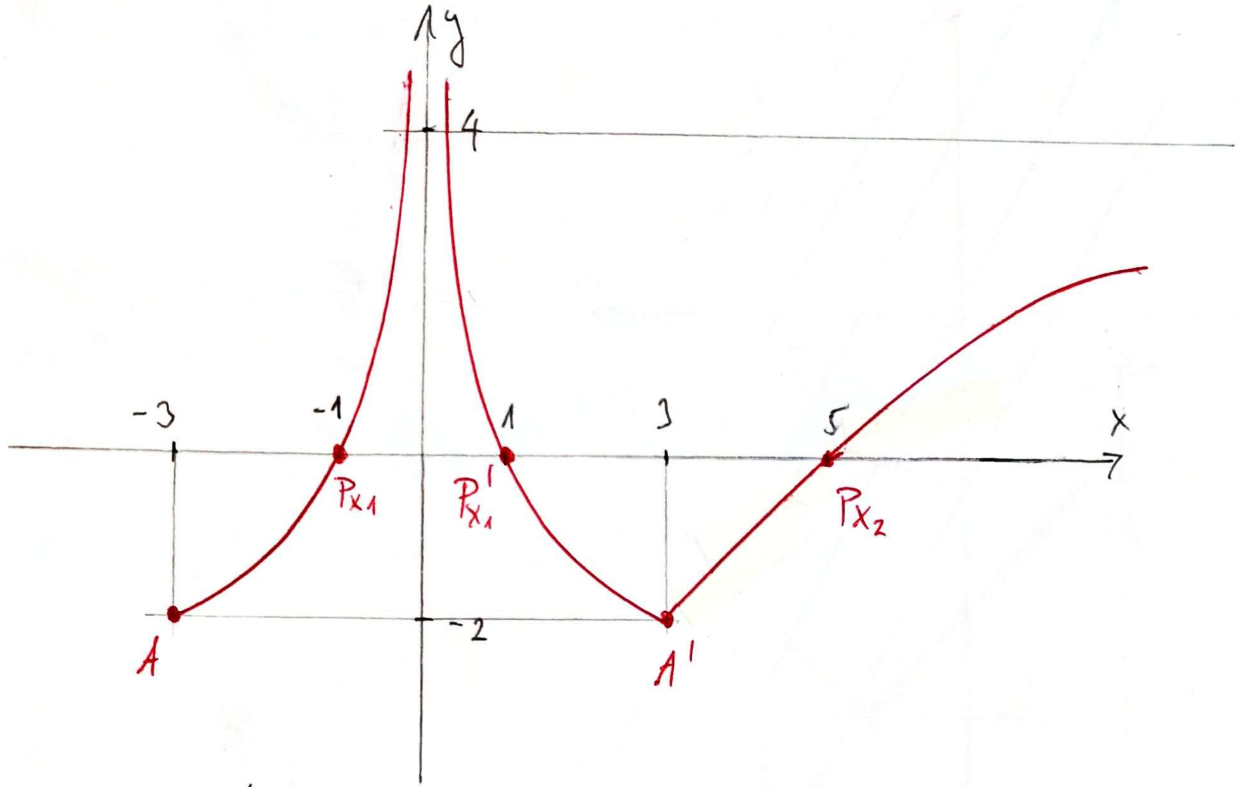
$f_5 : a = -1$

26/28) načrtněte graf funkce f, jestliže víte:

- $D(f) = \langle -3; \infty) \setminus \{0\}$
- $f(-3) = -2 \Rightarrow A[-3; -2]$
- $P_{X_1}[-1; 0]$; $P_{X_2}[5; 0]$
- $x \in \langle -3; 0)$ – rostoucí, není omezená shora
- $x \in \langle -3; 3\rangle \setminus \{0\}$ – sudá $\Rightarrow P_{X_1}'[1; 0]$; $A'[3; -2]$

souměrnost podle osy y

- $x \in \langle 3; \infty)$ – rostoucí, omezená shora číslem $h = 4$



a) $H(f) = \langle -2; \infty)$

b) nemá průsečíky s osou y

c) ano je omezená zdola $\Rightarrow \forall x \in D(f): f(x) \geq -2$

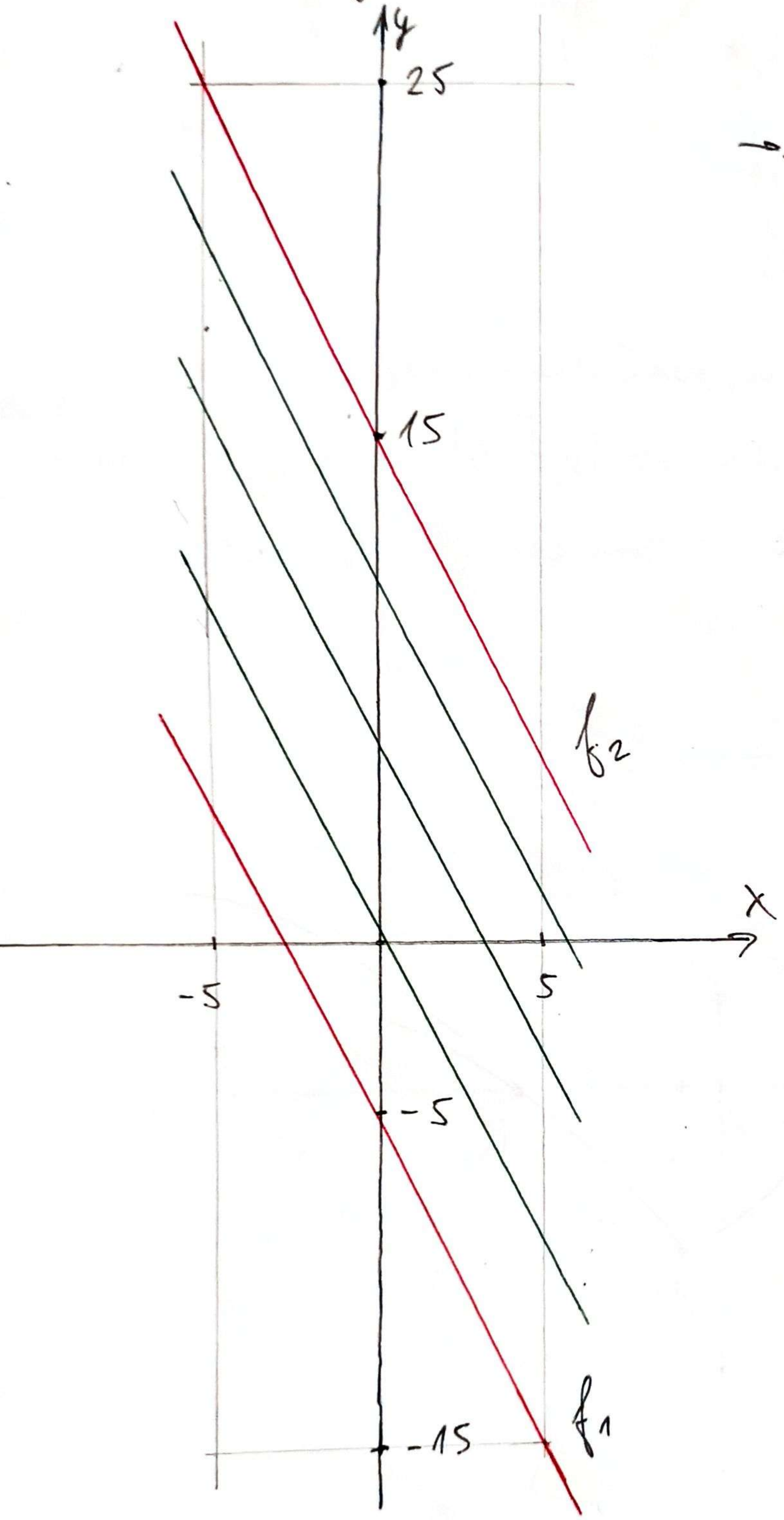
d) funkce f nemá maximum

e) minimum v $-3, 3$ o hodnotě -2

f) není prostá

g) je prostá v intervalech: $\langle -3; 0)$; $(0; 3\rangle$; $\langle 3; \infty)$

28/39, $h: y = -2x + b \wedge \forall x \in \langle -5; 5 \rangle ; f(x) \in \langle -15; 25 \rangle \Rightarrow b = ?$



→ krajní případy

$f_1: y = -2x + b \wedge [5; -15] \in f_1$

$\Rightarrow -15 = -10 + b$

$b = -5$

$f_2: y = -2x + b \wedge [-5; 25] \in f_2$

$\Rightarrow 25 = 10 + b$

$b = 15$

$\Rightarrow b \in \langle -5; 15 \rangle$

FUNKCE S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

$y = |x| \rightarrow f(x) = x \iff x \geq 0$

$f(x) - x \iff x < 0$

→ příklady

28/40/g.s.m2

- $g: y = |||x-1|-2|-3|$

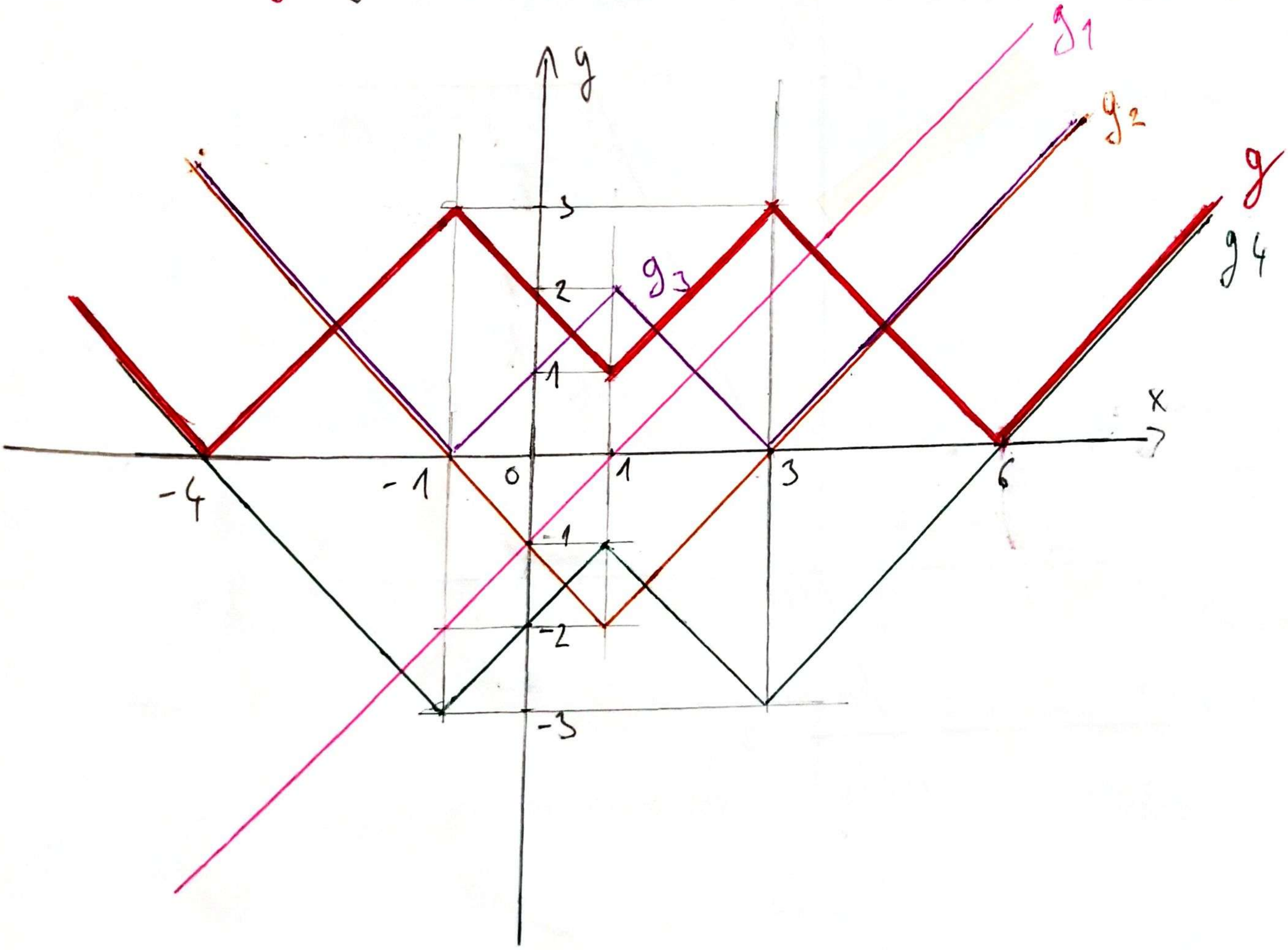
$g_1: y = x - 1$

$g_2: y = |x-1| - 2$

$g_3: y = ||x-1|-2|$

$g_4: y = ||x-1|-2|-3$

$g: y = |||x-1|-2|-3|$



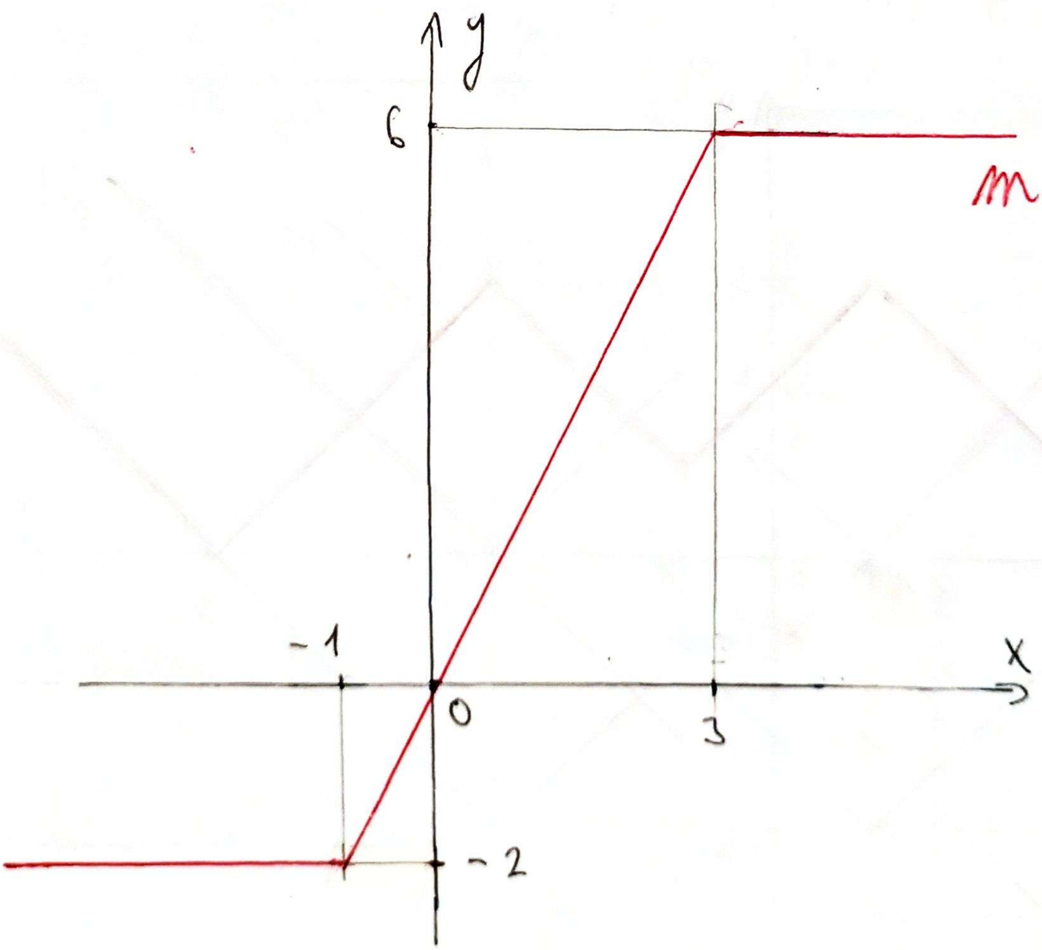
- $m: y = |x+1| - |3-x| + 2$
  - $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
    - $3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \quad \rightarrow x \in \langle -1; 3 \rangle; \ f(x) = 2x$

      $m_1: y = x+1-3+x+2 = 2x$
    - $3-x < 0 \Rightarrow x > 3 \quad \rightarrow x \in (3; \infty); \ f(x) = 6$

      $m_2: y = x+1+3-x+2 = 6$
  - $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$
    - $3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \quad \rightarrow x \in (-\infty; -1); \ f(x) = -2$

      $m_3: y = -x-1-3+x+2 = -2$
    - $3-x < 0 \Rightarrow x > 3 \quad \rightarrow x \in \emptyset; \ f(x) = -2x+4$

      $m_4: y = -x-1+3-x+2 = -2x+4$



SLOŽENÉ FUNKCE

$\to f: y = ax+b$
$\to g: y = |x|$
$\Big\}\ f \circ g = f(g)$ – f je vnější funkce a g vnitřní

$\Rightarrow f \circ g: a|x|+b$

$\Rightarrow g \circ f: |ax+b|$

$f(g(h(x))) = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$

→ příklady

- $f: y = -2x+3$

  $g: y = \sqrt{x}$

  $f(g): y = -2\sqrt{x}+3$

  $g(f): y = \sqrt{-2x+3}$

  $f(f \circ g): y = -2(-2\sqrt{x}+3)+3 = 4\sqrt{x}-6+3 = 4\sqrt{x}-3$

  $g(f \circ g): y = \sqrt{-2\sqrt{x}+3}$

25/15)

$f(x) = x-1$

$g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = x+3$

- $h_1(x) = g(h(f(x))) = \sqrt{h(f(x))} = \sqrt{f(x)+3} = \sqrt{x-1+3} = \underline{\underline{\sqrt{x+2}}}$

  $\to \sqrt{x+2} \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow \underline{D(h_1) = \langle -2; \infty)}$

- $h_2(x) = f(h(g(x))) = h(g(x))-1 = g(x)+3-1 = \underline{\underline{\sqrt{x}+2}}$

  $\to \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \underline{D(h_2) = \langle 0; \infty)}$

- $h_3(x) = f(g(h(x))) = g(h(x))-1 = \sqrt{h(x)}-1 = \underline{\underline{\sqrt{x+3}-1}}$

  $\to \sqrt{x+3} \Rightarrow x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow \underline{D(h_3) = \langle -3; \infty)}$

- $h_4(x) = h(g(f(x))) = g(f(x))+3 = \sqrt{f(x)}+3 = \underline{\underline{\sqrt{x-1}+3}}$

  $\to \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow \underline{D(h_4) = \langle 1; \infty)}$

→ INVERZNÍ FUNKCE

→ funkce f musí být prostá, jinak f^{-1} není fce ale zobrazení

→ $\left.\begin{array}{l} D(f^{-1}) = H(f) \\ H(f^{-1}) = D(f) \end{array}\right\} \forall y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno $x \in D(f) \wedge f(x) = y$

→ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$

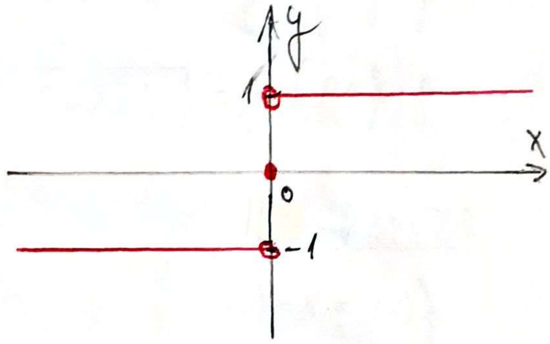
→ f, f^{-1} jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu

→ zachovává se monotónnost

- $f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – rostoucí
- $f^{-1}: f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ – rostoucí

→ FUNKCE SIGNUM

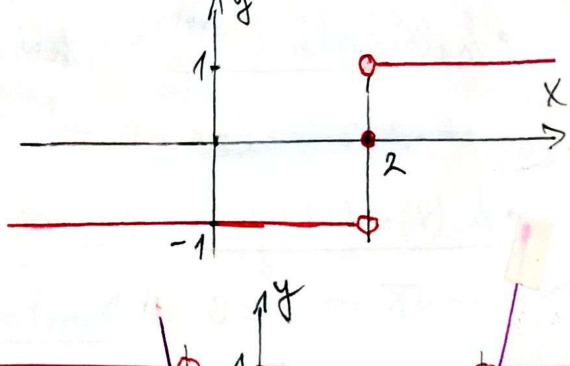
$$y = sgn(x) \begin{cases} x > 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x < 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$



- $sgn(a) \pm sgn(b) \neq sgn(a \pm b)$
- $sgn(a) \cdot sgn(b) = sgn(a \cdot b)$
- $sgn(a) : sgn(b) = sgn(a : b)$

→ příklady

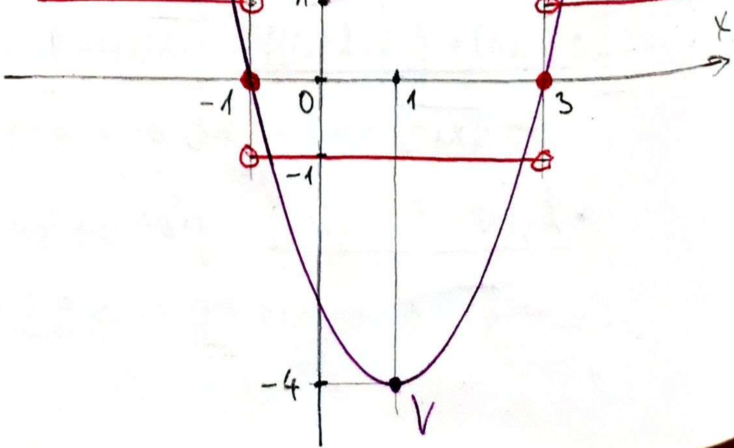
- $h_3: y = sgn(x-2)$



- $h_4: y = sgn(x^2 - 2x - 3)$

→ $y = x^2 - 2x - 3$

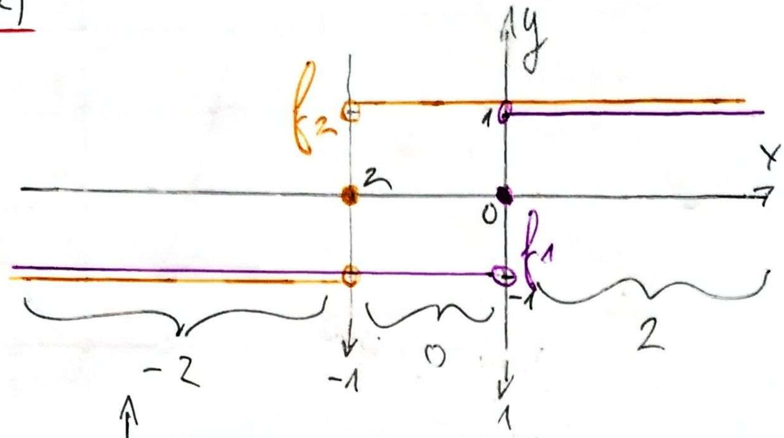
$\left.\begin{array}{l} m = 1 \\ n = -4 \end{array}\right\} V[1; -4]$

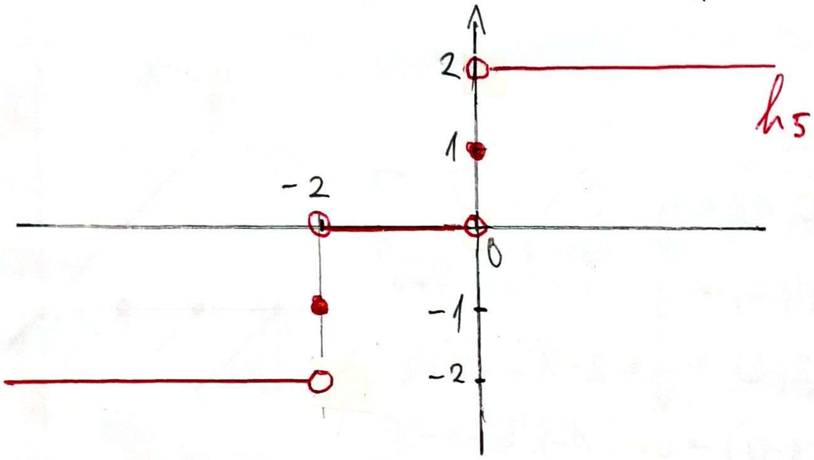


• $h_5: y = sgn(x) + sgn(x+2)$

$f_1: y = sgn(x)$

$f_2: y = sgn(x+2)$



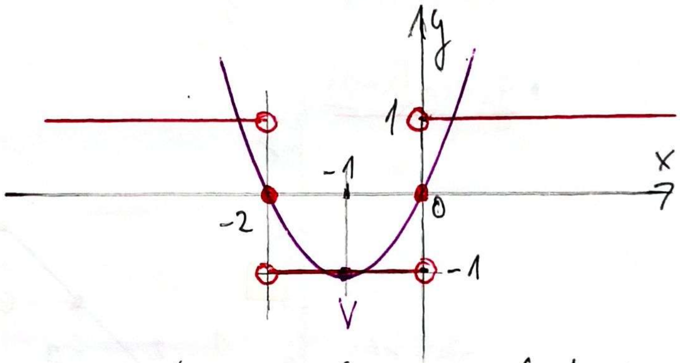


jde to stejným principem

• $h_6: y = sgn(x)\cdot sgn(x+2)$

$y = sgn(x^2+2x)$

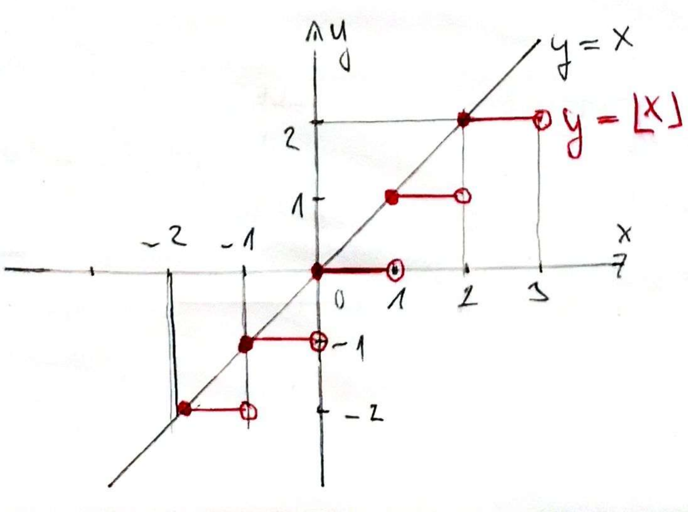
$\left.\begin{array}{l} n = -1 \\ m = -1 \end{array}\right\} V[-1;-1]$



⇒ FUNKCE CELÁ ČÁST DESETINNÉHO ČÍSLA

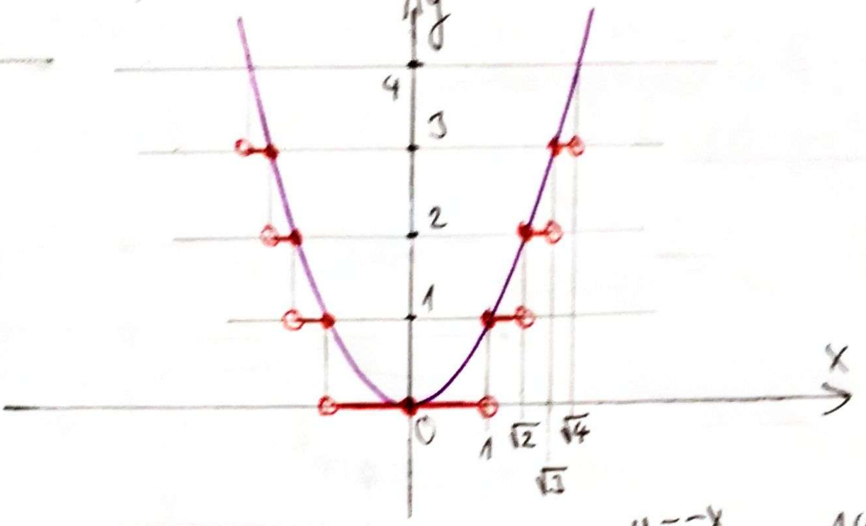
(nebo rovné)

- celá spodní část desetinného čísla je nejbližší menší celé číslo
- zápis: $y = \lfloor x \rfloor$ nebo $[x]$ – $\lceil x \rceil$ by pak byla horní část
- příklady: $3 = \lfloor \pi \rfloor$, $-2 = \lfloor -1{,}53 \rfloor$, $1 = \lfloor 1 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor$
- definice: $\lfloor x \rfloor = n \wedge n \le x < n+1 \wedge n \in \mathbb{Z}$



→ příklady

• $y = [x^2]$



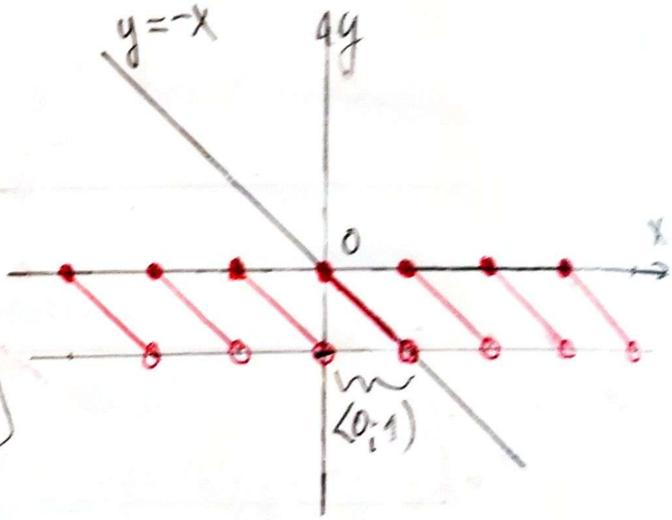
• $y = [x] - x$

→ $x \in \langle 0;1) \Rightarrow y = 0 - x = -x$

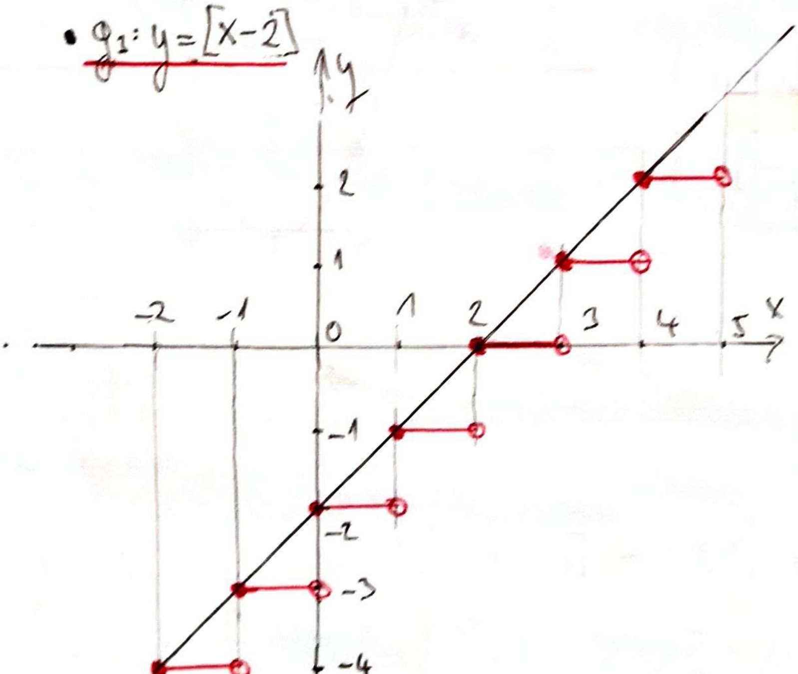
$x \in \langle 1;2) \Rightarrow y = 1 - x = -x + 1$

$x \in \langle 2;3) \Rightarrow y = 2 - x = -x + 2$

$x \in \langle -1;0) \Rightarrow y = -1 - x = -x - 1$



• $g_3: y = [x-2]$



• $g_4: y = [x] - 2$

→ $x \in \langle -1;0): y = -3$

$x \in \langle 0;1): y = -2$

$x \in \langle 1;2): y = -1$

$x \in \langle 2;3): y = 0$

$x \in \langle a; a+1);\ a \in \mathbb{Z}:\ g_3: y = [a-2] = a-2$

$g_4: y = [a] - 2 = a - 2$

$\Rightarrow$ $g_3 = g_4$ cbd

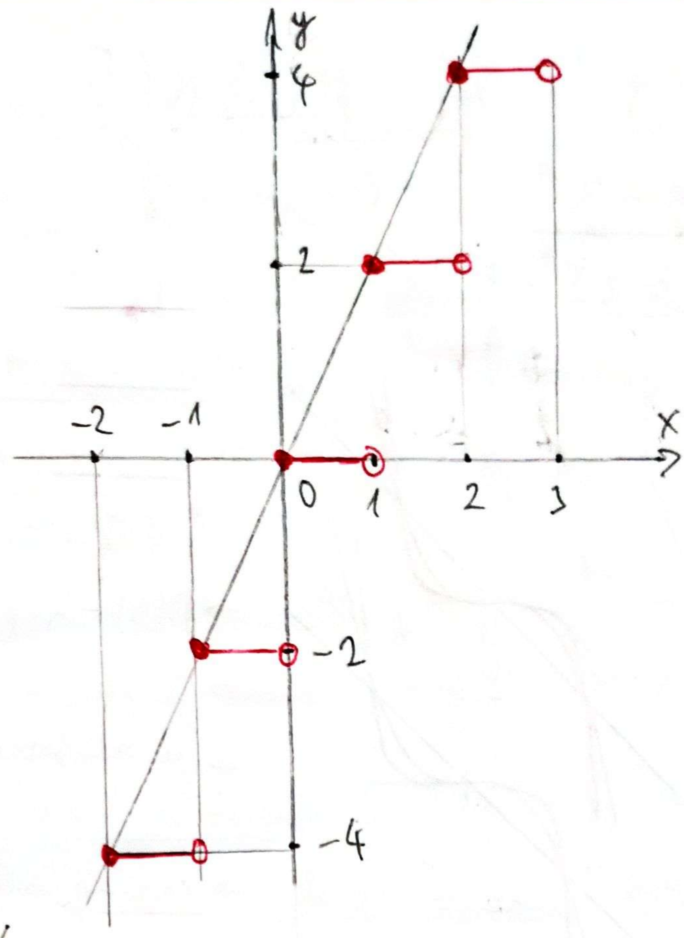
• $g_5: y = 2\cdot[x]$

$\rightarrow x \in \langle -1; 0) : y = -2$

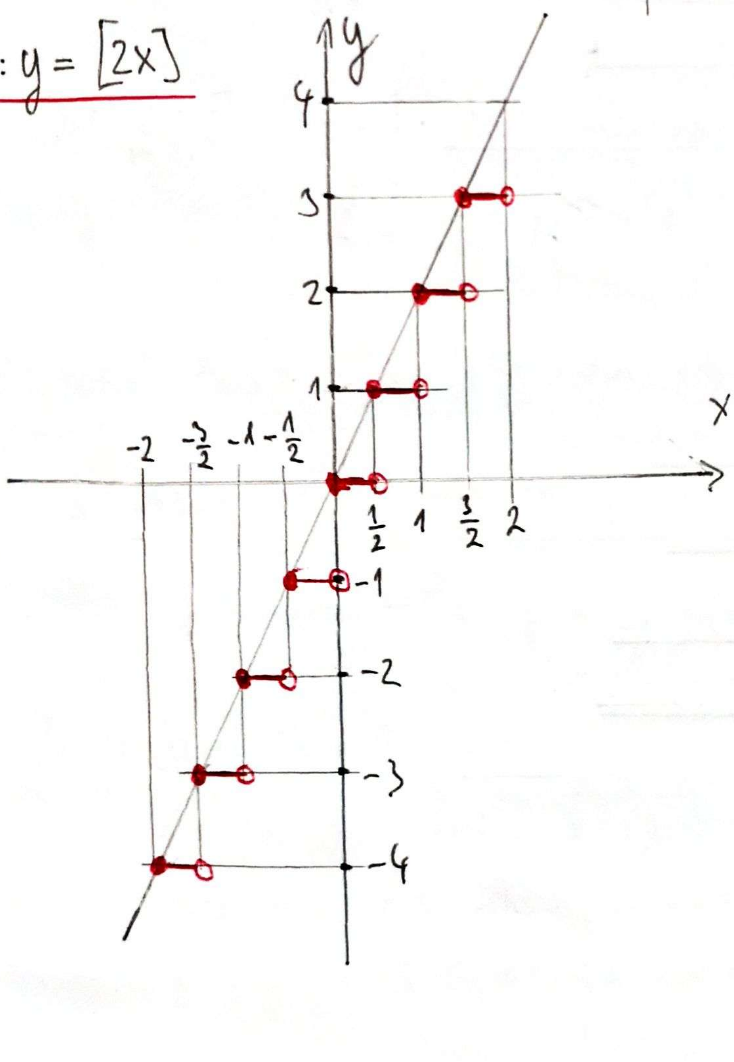
$x \in \langle 0; 1) : y = 0$

$x \in \langle 1; 2) : y = 2$

$x \in \langle 2; 3) : y = 4$



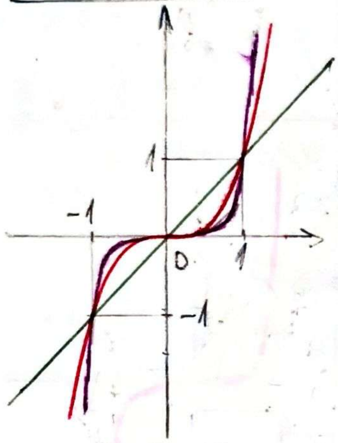
• $g_6: y = [2x]$



→ MOCNINÁ FUNKCE

$y = x^n$

→ $n \in Z^+$ - liché



→ $n = 1$ → $y = x$ → přímá úměra

→ $n = 3$ → $y = x^3$ → kubická parabola

→ $n > 3$

→ společné body: $[-1;-1]$; $[0;0]$; $[1;1]$

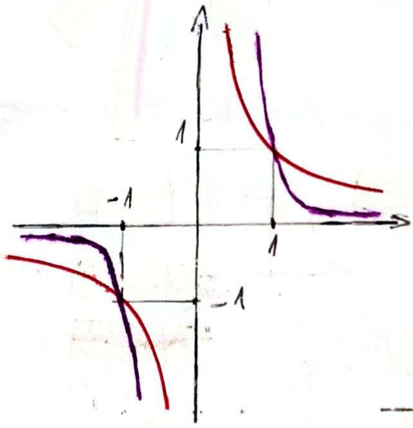
→ $D(f) = H(f) = R$

→ je prostá, neomezená

→ je rostoucí

→ je lichá

→ $n \in Z^-$ - liché



→ $n = -1$ → $y = \frac{1}{x}$ – hyperbola

→ $n < -1$

→ společné body: $[-1;-1]$; $[0;0]$; $[1;1]$

→ $D(f) = H(f) = R \setminus \{0\}$

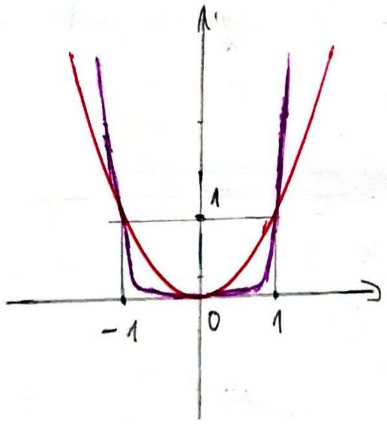
→ je prostá, neomezená

→ na $x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$ je klesající

→ je lichá

→ asymptoty jsou souřadnicové osy

→ $n \in Z^+$ - sudé



→ $n = 2$ → $y = x^2$ → parabola

→ $n > 2$

→ společné body: $[-1;1]$; $[0;0]$; $[1;1]$

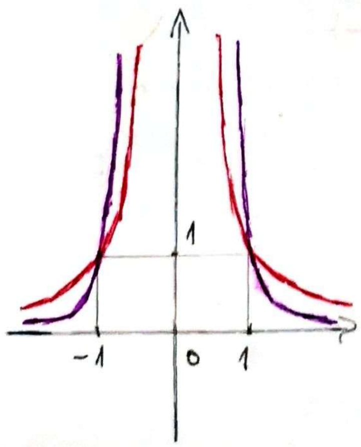
→ $D(f) = R$, $H(f) = \langle 0;\infty)$

→ není prostá, je omezená zdola.

→ na $x \in (-\infty;0)$ klesající, $x \in \langle 0;\infty)$ rostoucí

→ je sudá

→ $n \in Z^-$ - sudé



→ $n = -2$

→ $n < -2$

→ společné body: $[-1;1]$; $[0;0]$; $[1;1]$

→ $D(f) = R \setminus \{0\}$, $H(f) = (0;\infty)$

→ není prostá, je omezená zdola

→ na $x \in (-\infty;0)$ je rostoucí, $x \in (0;\infty)$ klesající

→ je sudá

→ asymptoty jsou souřadnicové osy

→ KVADRATICKÁ FUNKCE

- $y = ax^2 + bx + c \wedge a,b,c \in R \wedge a \neq 0$
- graf = parabola = kuželosečka

→ $y = a(x-m)^2 + n$

$m = -\frac{b}{2a}$ ⎫ z m dopočítám n

$n = -\frac{D}{4a}$

↳ $V[m;n]$

$a > 0$ → 

$a < 0$ → 

C je průsečík s osou y

→ vlastnosti

- $D(f) = R$
- $H(f)$ → $a > 0$ → $H(f) = \langle n; \infty)$
  ↳ $a < 0$ → $H(f) = (-\infty; n\rangle$
- monotonnost → $a > 0$ → rostoucí → $x \in \langle m; \infty)$
  → klesající → $x \in (-\infty; m\rangle$
  → $a < 0$ → rostoucí → $x \in (-\infty; m\rangle$
  → klesající → $x \in \langle m; \infty)$
- extrémy → $a > 0$ → minimum v bodě $x = m$
  → $a < 0$ → maximum v bodě $x = m$
- $P_y[0;c]$
- $P_x[x_{1,2};0]$ → $x_{1,2}$ = kořeny rovnice

SHRNUTÍ ÚPRAV GRAFŮ FUNKCÍ

→ základní fce $y = f(x)$

- $\underline{y = k \cdot f(x)}$

  → k-násobné funkční hodnoty

- $\underline{y = f(x) + n}$

  → translace grafu ve směru osy y o n

- $\underline{y = f(x - m)}$

  → translace grafu ve směru osy x o m

- $\underline{y = -f(x)}$

  → osová souměrnost podle osy x

- $\underline{y = f(-x)}$

  → osová souměrnost podle osy y

- $\underline{y = |f(x)|}$

  → body nad osou x zůstanou → když $y \geq 0$

  → body pod osou x osová souměrnost podle osy x → když $y < 0$

  ↳ $f(x) = -f(x)$

- $\underline{y = f(|x|)}$

  → body napravo od osy y zůstanou → když $x \geq 0$

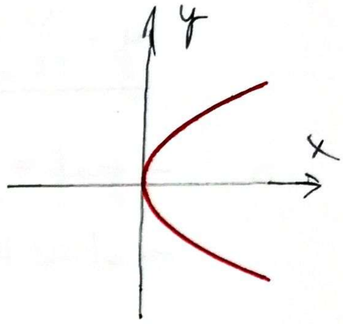
  → body nalevo od osy y osová souměrnost podle osy y → když $x < 0$

  ↳ $f(x) = f(-x)$

→ sestrojení inverzní funkce k funkci kvadratické

$f: y = x^2 - 1$ ⇒ $D(f) = \mathbb{R} \wedge H(f) = \langle -1; \infty)$

→ kvadratická fce není prostá, musím vybrat nějakou její část, která prostá je, jinak by f^{-1} nebyla funkce ale relace



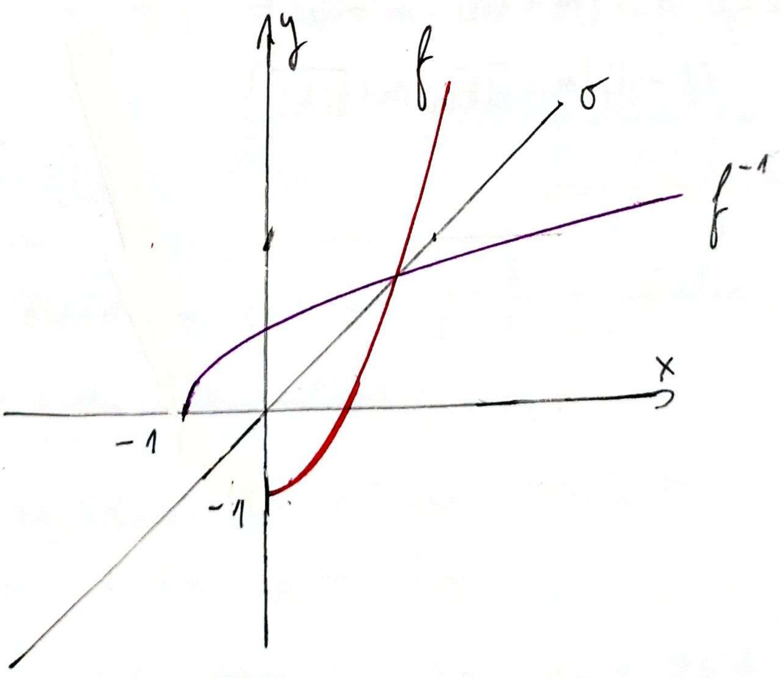
⇒ vybra si pro $x \in \langle 0; \infty)$

⇒ $f_1: y = x^2 - 1 \wedge x \in \langle 0; \infty)$ → $D(f) = \langle 0; \infty) \wedge H(f) = \langle -1; \infty)$

→ $f_1^{-1}: x = y^2 - 1 \wedge y \in \langle 0; \infty) \Leftrightarrow D(f) = H(f^{-1}) \Rightarrow y > 0 \Rightarrow y = +\sqrt{x-1}$

$y = \pm\sqrt{x-1}$ $\quad x \in \langle -1; \infty) \Leftrightarrow H(f) = D(f^{-1})$

nedostanu nic nelegálního

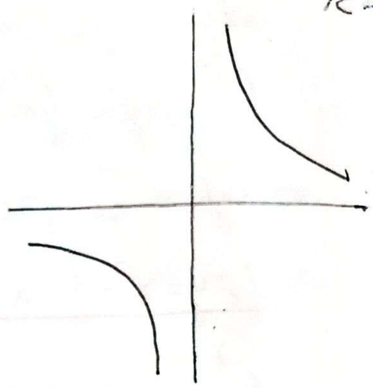


→ LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \wedge a,b,c,d \in R \wedge c\neq 0 \wedge ad-bc\neq 0$$

→ graf = rovnoosá hyperbola = H

$k>0$



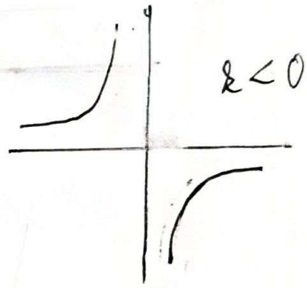
→ střed H → $S[m; n]$

→ asymptoty H → $as_1: y=n$
→ $as_2: x=m$

→ osa H → $k>0$ → $o: y=(x-m)+n$
→ $k<0$ → $o: y=-(x-m)+n$

→ vrcholy H → $k>0$ → $A[m+\sqrt{k}; n+\sqrt{k}]$
→ $B[m-\sqrt{k}; n-\sqrt{k}]$
→ $k<0$ → $A[m+\sqrt{|k|}; n-\sqrt{|k|}]$
$B[m-\sqrt{|k|}; n+\sqrt{|k|}]$

$k<0$



→ $P_x[-\frac{b}{a}; 0]$

→ $P_y[0; \frac{b}{d}]$

→ $D(f)=R-\{m\}$

→ $H(f)=R-\{n\}$

→ je prostá

→ monotonnost → $k>0$ → na $x\in(-\infty;m)\cup(m;\infty)$ klesající
→ $k<0$ → na $x\in(-\infty;m)\cup(m;\infty)$ rostoucí

→ není omezená

→ pokud $a, d=0$ tak je lichá → základní funkce $y=\frac{b}{cx}=\frac{b}{c}\cdot\frac{1}{x}$

→ H je osově souměrná podle své osy a středově souměrná podle středu

→ asymptota křivky je její tečna s bodem dotyku v nekonečnu

→ s rostoucím k jsou vrcholy dál od středu

→ s klesajícím k jsou vrcholi blíž středu

- Konstrukce hyperboly

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ převedu na $y=\frac{k}{x-m}+n$

$$\boxed{\begin{aligned} m &= -\frac{d}{c} \\ n &= \frac{a}{c} \\ k &= m\cdot n+\frac{b}{c} \end{aligned}}$$

→ převod dělením

$$y=\frac{4x-3}{3x+1}$$

$$y=(4x-3):(3x+1)=\frac{4}{3}$$

$$-\frac{4}{3}(3x+1)$$

$$=-4x-\frac{4}{3}$$

$$4x-4x-3-\frac{4}{3}=$$

$$=\frac{-9-4}{3}=\frac{-13}{3}$$

$$y=\frac{-\frac{13}{3}}{3x+1}+\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{-\frac{13}{3}}{3(x+\frac{1}{3})}+\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{-\frac{13}{9}}{x+\frac{1}{3}}+\frac{4}{3} \rightarrow$$

same result

$$k=-\frac{13}{9}$$

$$m=-\frac{1}{3}$$

$$n=\frac{4}{3}$$

→ teď sestrojím graf fce $y=\frac{k}{x}$ se středem $S[m;n]$

→ z 1 bodu můžu udělat 4 body

→ nejdřív $O(o)$ → 2 body

→ a pak oba $S(S)$ → 4 body

$[1;2] \rightarrow [2;1]$

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

$[-1;-2]$ $\quad$ $[-2;-1]$

$(S[0;0])$

→ při počítání průsečíků dosazuju do

$\frac{ax+b}{cx+d}$ ne do $\frac{k}{x-m}+n$

↳ jednodušší vyjádření

→ příklady

1) urči $D(f)$: $f: y = \sqrt{(3x^2 - x^3)^{-1}}$

$\to (3x^2-x^3)^{-1} \geq 0 \to 3x^2 - x^3 \neq 0$ $\to x^{-1} = \frac{1}{x}$

$3x^2 - x^3 > 0$

$x^3 - 3x^2 < 0$

$x^2(x-3) < 0$

NB: $x^2 = 0$ $\quad x-3=0$

$x = 3$

$+ \; - \; + \; - \; + \; +$

$- \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

$\Rightarrow D(f) = (-\infty; 3) \setminus \{0\}$

2) sestrojte $f: y = 3 + \sqrt[4]{(1-x)}$ pomocí fce inverzní

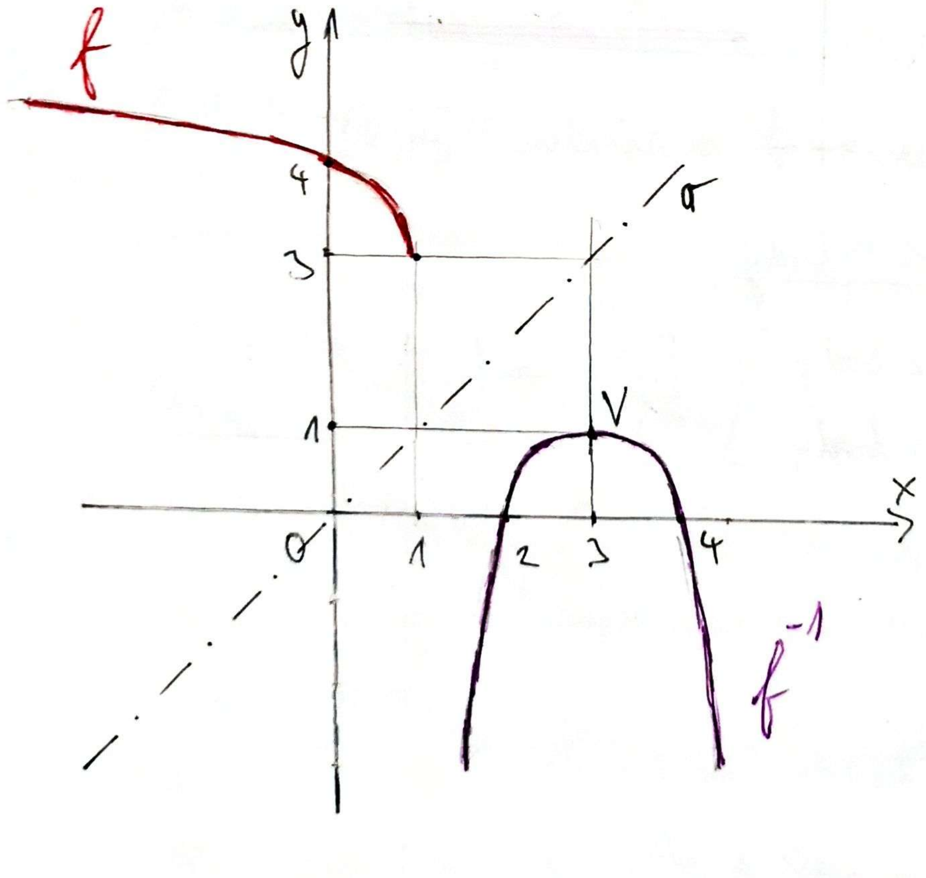
$\to f^{-1}: x = 3 + \sqrt[4]{1-y}$

$(x-3)^4 = 1-y$

$y = -(x-3)^4 + 1 \to V[3;1]$

$\to D(f) = (-\infty; 1\rangle$

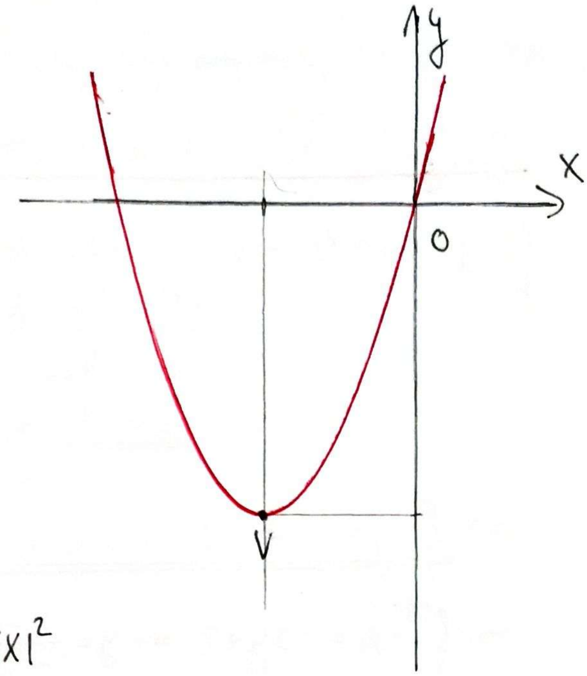
$H(f) = \langle 3; \infty) \to 3 + \; +$



3) sestrojte grafy fcí:

• $y = x^2 + 4x$

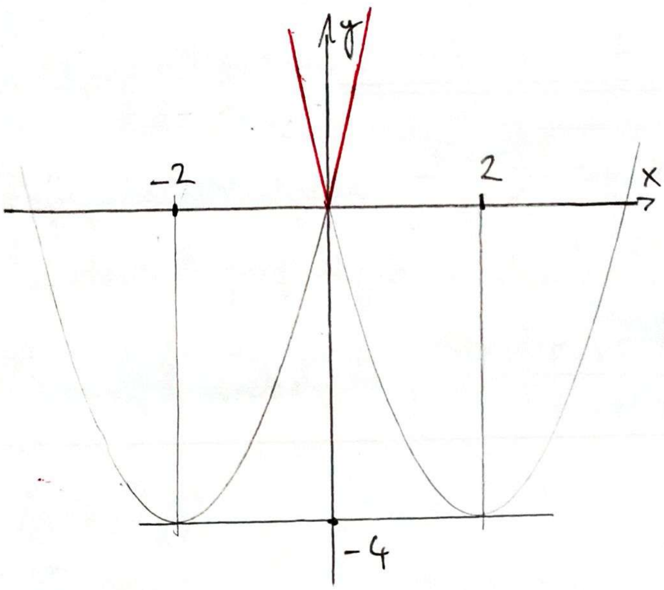
$\left.\begin{matrix} m = -2 \\ n = -4 \end{matrix}\right\} V[-2; -4]$



• $y = x^2 + 4|x|$

→ stejné jako

$y = |x|^2 + 4|x| \Leftrightarrow x^2 = |x|^2$

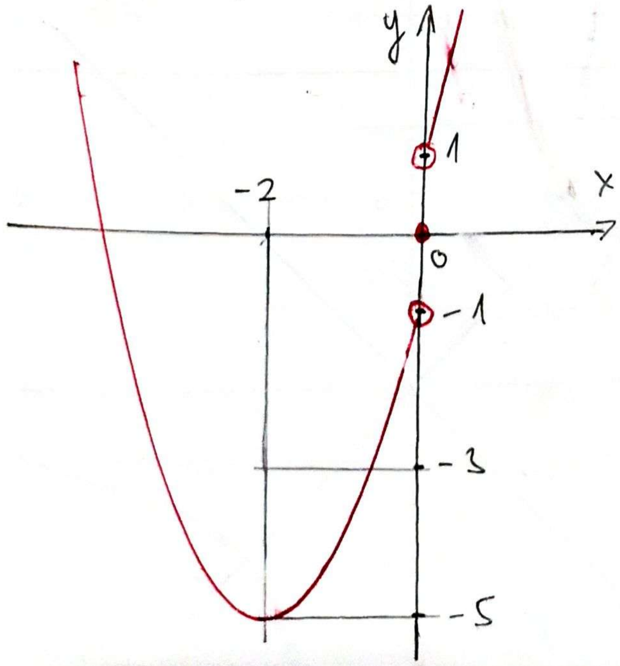


• $y = x^2 + 4x + sgn(x)$

$x \in (-\infty; 0) \rightarrow y = x^2 + 4x - 1 \rightarrow V[-2; -5]$

$x = 0 \longrightarrow y = 0$

$x \in (0; \infty) \rightarrow y = x^2 + 4x + 1 \rightarrow V[-2; -3]$



5) urči fční předpis fce, jejíž graf je úsečka AB, kde $A[-1;5]$, $B[3;-7]$ a najdi fci inverzní

$f: y = ax + b \Rightarrow \quad 5 = -a + b$
$\qquad\qquad\qquad\quad -7 = 3a + b$
$\qquad\qquad\qquad\quad 12 = -4a$
$\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a = -3} \Rightarrow \underline{b = 2}$

$\Rightarrow \underline{f: y = -3x + 2 \wedge x \in \langle -1;3 \rangle} \Rightarrow D(f) = \langle -1,3 \rangle \wedge H(f) = \langle -7;5 \rangle$

$\rightarrow f^{-1}: x = -3y + 2 \Rightarrow y = \frac{x-2}{-3}$

$\underline{f^{-1}: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \wedge x \in \langle -7;5 \rangle} \Leftrightarrow D(f^{-1}) = \langle -7;5 \rangle \wedge H(f^{-1}) = \langle -1;3 \rangle$

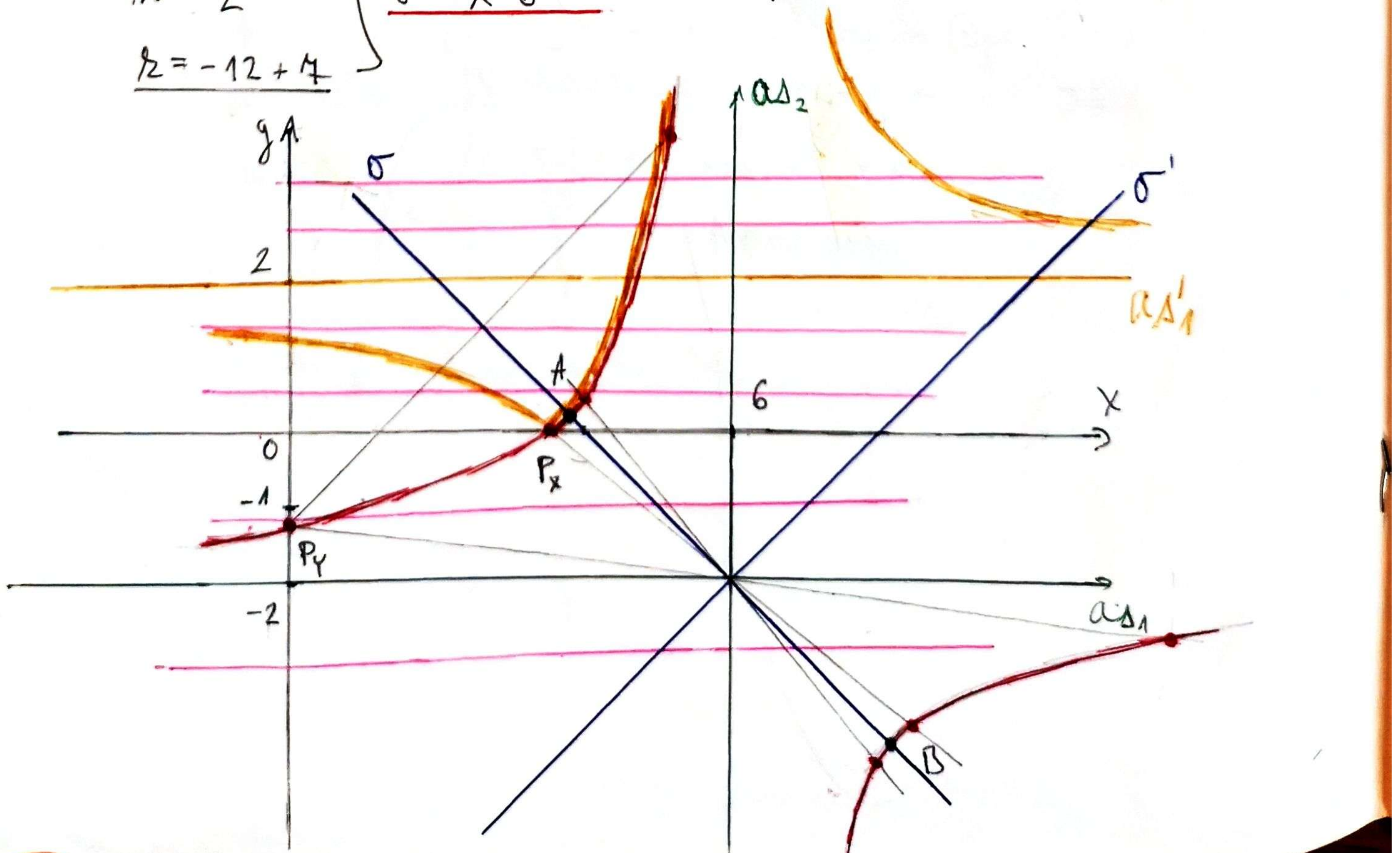
4) sestrojte graf fce $y = \frac{-2x+7}{x-6}$. Udejte všechny prvky, které graf určují. Určete vlastnosti a užijte graf k diskusi o počtu kořenů rovnice $\left|\frac{-2x+7}{|x-6|}\right| = m$, vzhledem k parametru $m \in \mathbb{R}$

$y = \frac{-2x+7}{x-6}$

$P_x[3{,}5;0]$

$P_y[0;-\frac{7}{6}]$

$\left.\begin{array}{l} m = 6 \\ n = -2 \\ \underline{k = -12 + 7} \end{array}\right\} y = \frac{-5}{x-6} - 2 \rightarrow V[6;-2]$



→ polosy: $o: y = -x + 4$

$o': y = x - 8$

→ vrcholy: $A[6-\sqrt{5}; -2+\sqrt{5}]$

$B[6+\sqrt{5}; -2-\sqrt{5}]$

→ asymptoty: $as_1: y = -2$

$as_2: x = 6$

→ vlastnosti

- $D(f) = R \setminus \{6\}$
- $H(f) = R \setminus \{-2\}$
- je prostá
- na $x \in (-\infty; 6)$, $x \in (6; \infty)$ je rastúcí
- není omezená
- nemá paritu

→ diskuse o počtu kořenů rovnice $\left|\frac{-2x+7}{|x-6|}\right| = m$

$y = |f(x)|$

→ $||x-6|| = |x-6| \Rightarrow \left|\frac{-2x+7}{x-6}\right| = m$

$\left.\begin{array}{l} l: y = \left|\frac{-2x+7}{x-6}\right| \\ p: y = m \end{array}\right\}$ průsečíky = kořeny

→ $m \in (-\infty; 0)$ → počet kořenů $= k = 0$

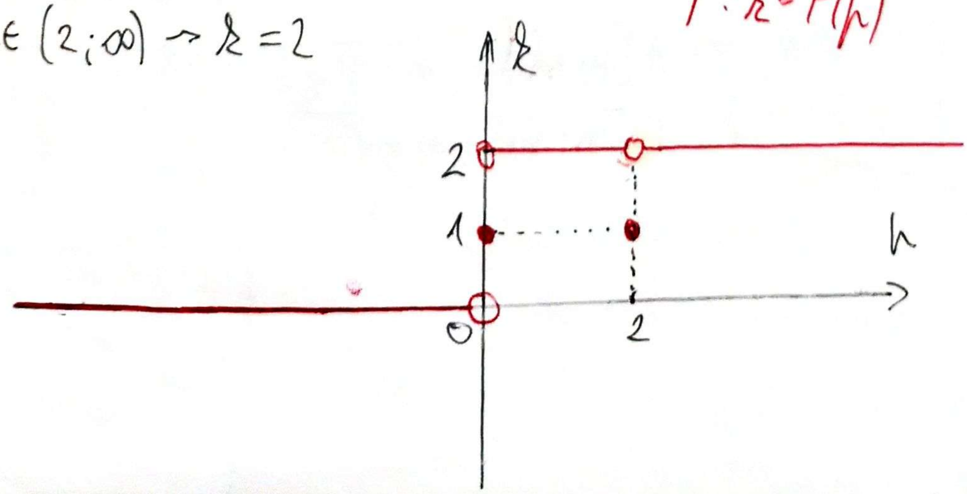
→ $m = 0$ → $k = 1$

→ $m \in (0; 2)$ → $k = 2$

→ $m = 2$ → $k = 1$

→ $m \in (2; \infty)$ → $k = 2$

$F: k = F(p)$



→ Souřadnice vrcholů hyperboly

→ vrcholy = místo, kde osa protíná hyperbolu

→ střed hyperboly posunu do $S[m;n]$

⇒ průsečík osy taky posunu do $[m;n]$

→ $k > 0 \Rightarrow y = x \Rightarrow y = (x-m)+n$

→ $k < 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow y = -(x-m)+n$

$$y = \frac{k}{x-m} + n$$

• $k > 0$ → $y = (x-m)+n$

$$\frac{k}{x-m} + n = (x-m)+n$$

$$k = (x-m)^2$$

$$x-m = \pm\sqrt{k}$$

$$x = m \pm \sqrt{k}$$

$$y = m \pm \sqrt{k} - m + n$$

$$y = n \pm \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow A[m+\sqrt{k}; n+\sqrt{k}]$$

$$B[m-\sqrt{k}; n-\sqrt{k}]$$

• $k < 0$ → $y = -(x-m)+n$

$$\frac{k}{x-m} + n = -(x-m)+n$$

$$k = -(x-m)^2$$

$$-k = (x-m)^2 \quad \wedge \quad k < 0 \Rightarrow -k > 0 \Rightarrow \sqrt{-k} = \sqrt{|k|}$$

$$x-m = \pm\sqrt{-k}$$

$$x = m \pm \sqrt{|k|}$$

$$y = -(m \pm \sqrt{|k|} - m) + n$$

$$y = n \mp \sqrt{|k|}$$

$$\Rightarrow A[m+\sqrt{|k|}; n-\sqrt{|k|}]$$

$$B[m-\sqrt{|k|}; n+\sqrt{|k|}]$$

1, graf, priesečníky a vlastnosti: $f: y = \dfrac{4x+2}{-2x+1}$

predpis, vlastnosti a graf f^{-1}

pomocou grafu rieš nerovnicu $\dfrac{4x+2}{|-2x+1|} \geq 2$ + vlastnosti

---

$f: y = \dfrac{4x+2}{-2x+1}$

$P_x\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ $P_y[0; 2]$

$A\left[\frac{1}{2}+\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}\right]$

$B\left[\frac{1}{2}-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}\right]$

$\left.\begin{array}{l} m = \frac{1}{2} \\ n = -2 \\ k = -2 \end{array}\right\} y = \dfrac{-2}{x-\frac{1}{2}} - 2 \Rightarrow V\left[\frac{1}{2}; -2\right]$

$f^{-1}: x = \dfrac{4y+2}{-2y+1} \Rightarrow -2y\cdot x + x = 4y+2$

$4y + 2y\cdot x = x - 2$

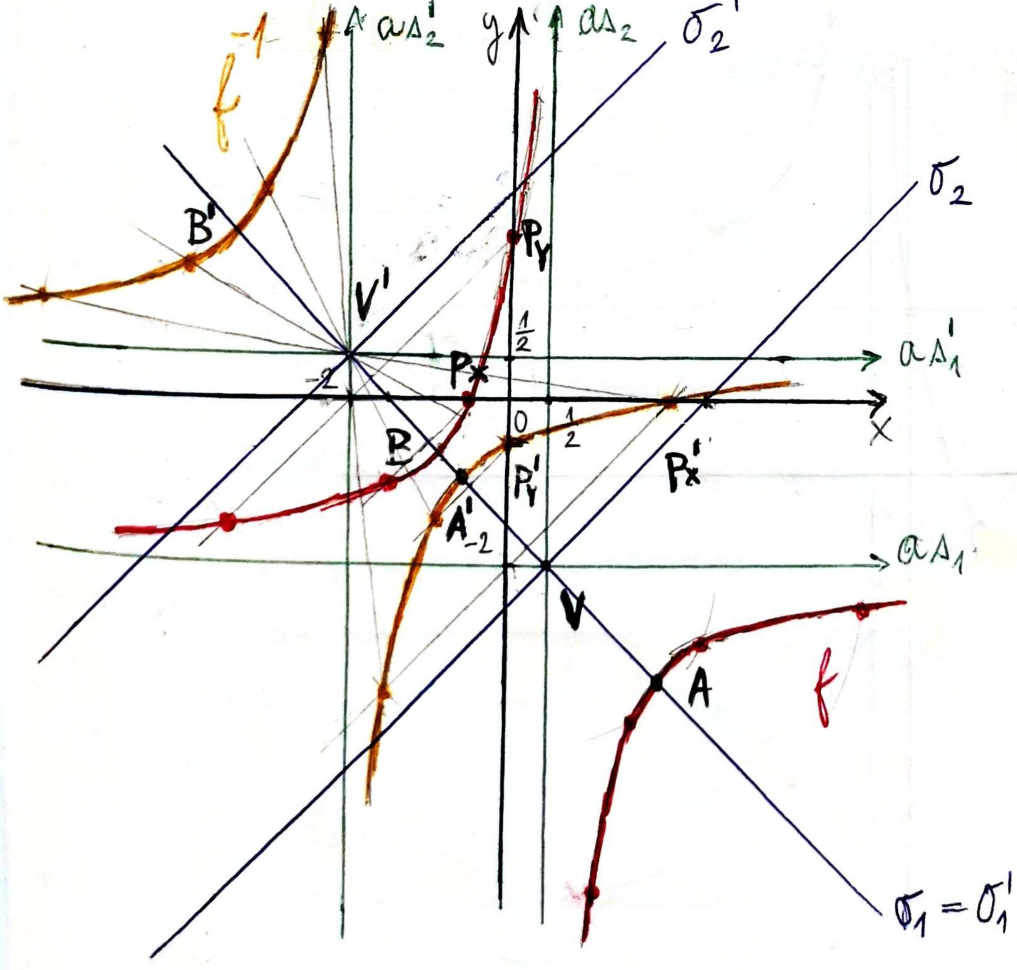
$y = \dfrac{x-2}{2x+4} \leftarrow y(4+2x) = x-2$

$P'_x[2; 0]$ $P'_y\left[0; -\frac{1}{2}\right]$

$A'\left[-2+\sqrt{2}; \frac{1}{2}-\sqrt{2}\right]$

$B'\left[-2-\sqrt{2}; \frac{1}{2}+\sqrt{2}\right]$

$\left.\begin{array}{l} m = -2 \\ n = \frac{1}{2} \\ k = -2 \end{array}\right\} y = \dfrac{-2}{x+2} + \frac{1}{2} \Rightarrow V'\left[-2; \frac{1}{2}\right]$



polosy

$f \to o_1: y = -x - \frac{3}{2}$

$o_2: y = x - \frac{5}{2}$

$f^{-1} \to o'_1: y = -x - \frac{1}{2}$

$o'_2: y = x + \frac{5}{2}$

asymptoty

$f \to as_1: y = -2$

$as_2: x = \frac{1}{2}$

$f^{-1} \to as'_1: y = \frac{1}{2}$

$as'_2: x = -2$

→ vlastnosti

$f \to D f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$	$f^{-1} \to D(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$H f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$	$H(f^{-1}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$
je prostá	je prostá
na $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$ / na $x \in (\frac{1}{2}; \infty)$ je rostoucí	ná $x \in (-\infty; -2)$ / na $x \in (-2; \infty)$ je rostoucí
není omezená	není omezená
nemá paritu	nemá paritu

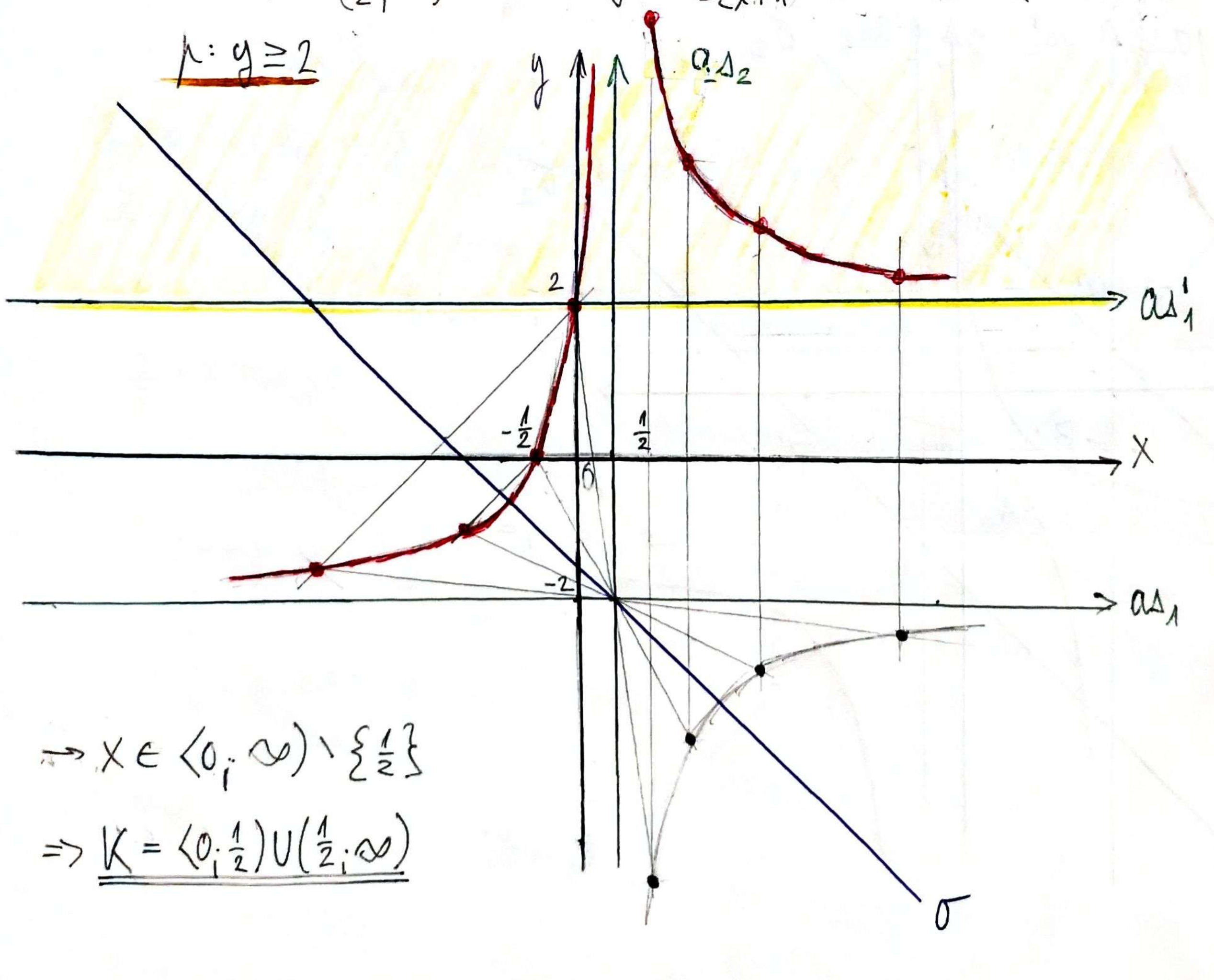
→ $\dfrac{4x+2}{|-2x+1|} \geq 2$

$l: y = \dfrac{4x+2}{|-2x+1|} \Rightarrow \begin{array}{c} -2x+1=0 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}$ $\quad + \;\; \frac{1}{2} \;\; -$

→ $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \to l_1: y = \dfrac{4x+2}{-2x+1}$

→ $x \in (\frac{1}{2}; \infty) \to l_2: y = -\dfrac{4x+2}{-2x+1}$

$p: y \geq 2$



→ $x \in \langle 0; \infty) \setminus \{\frac{1}{2}\}$

⇒ $K = \langle 0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$

→ <u>vlastnosti l</u>

$D(l) = R \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$H(l) = (-2; \infty)$

není prostá

na $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$ je rostoucí

na $x \in (\frac{1}{2}; \infty)$ je klesající

je omezená zdola

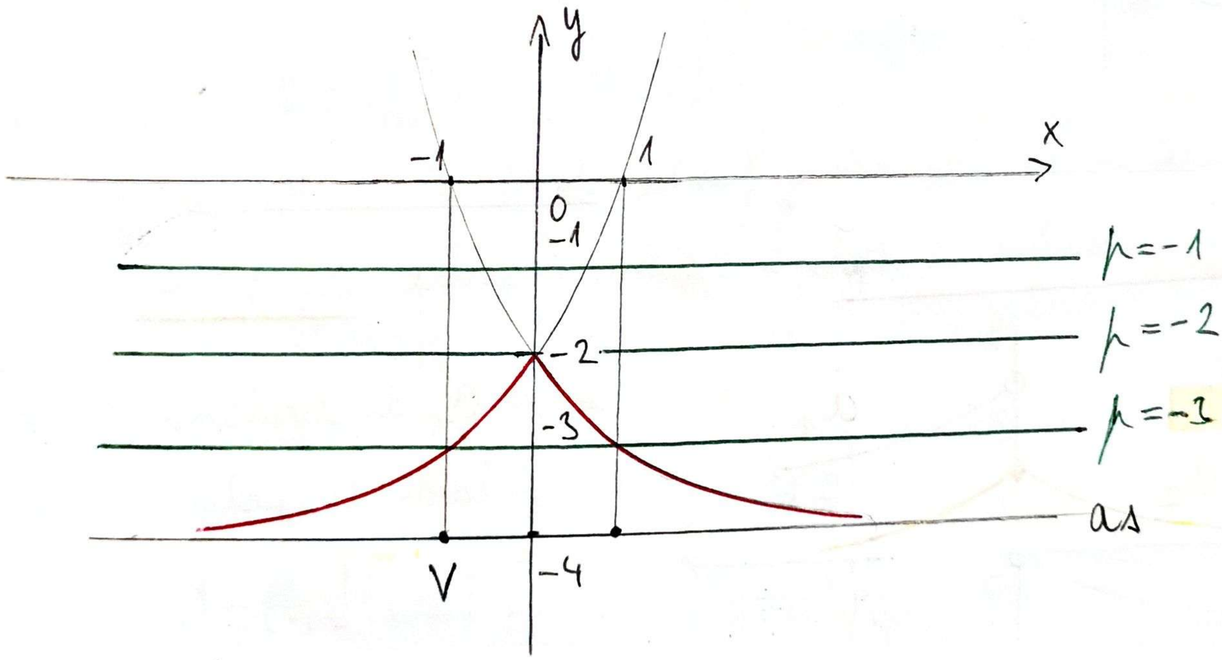
nemá paritu

2) sestroj graf fce $f: y = 2^{1-|x|} - 4$

urči a sestroj graf fce g, která parametru p přiřazuje počet kořenů rovnice $2^{1-|x|} - 4 = p$

$x \leq 0: y = 2^{x+1} - 4 \quad V[-1; -4]$

$x > 0: O(\vec{y})$



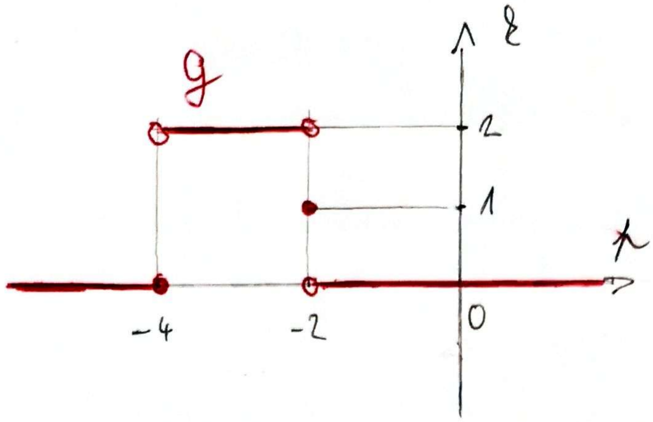
→ $p \in (-\infty; -4) \rightarrow k = 0$

→ $p \in (-4; -2) \rightarrow k = 2$

→ $p = -2 \rightarrow k = 1$

→ $p \in (-2; \infty) \rightarrow k = 0$

k = počet kořenů

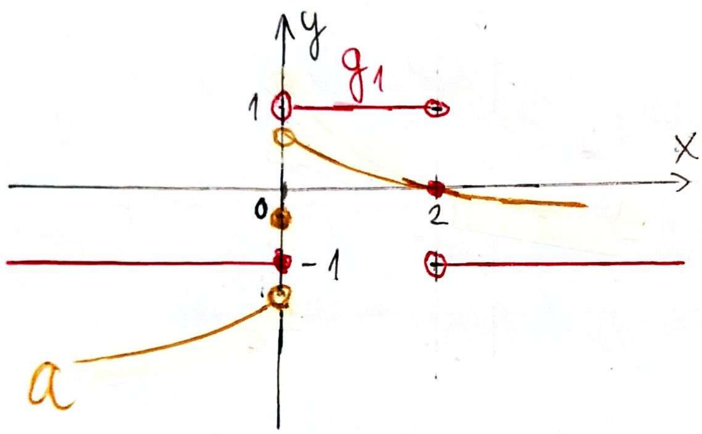


$g(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; -4\rangle \cup (-2;\infty)$

$g(x) = 1$ pro $x = -2$

$g(x) = 2$ pro $x \in (-4;-2)$

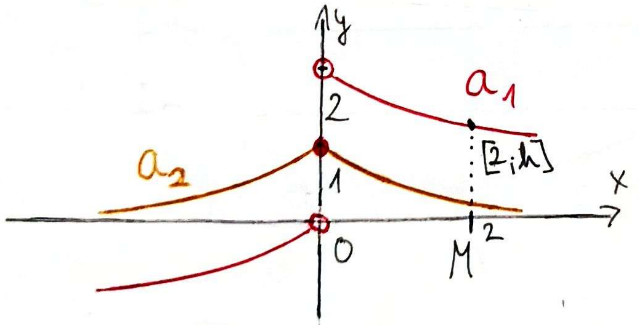
⇒ graf funkce g může vzniknout jako translace grafu funkce g_1 ⇒ $g: y = g_1(x+4)+1$



⇒ funkce g_1 vznikne jako signum funkčních hodnot nějaké funkce a

⇒ $g_1 = sgn(a(x))$

⇒ funkce a je translací funkce $a_1: y = 2^{-|x|} + sgn(x)$, která vznikne z exponenciální funkce $a_2: y = 2^{-|x|}$



⇒ z a_1 se dostanu do a takovou translací, aby $\exists$ bod $M[2;0]$; $M \in a_1$

⇒ $a = a_1 - h$

⇒ $h = 2^{-|2|} + sgn(2) = 2^{-2} + 1 = \underline{\underline{1,25}}$ ⇒ $a = a_1(x) - 1,25$

$$\Rightarrow a_2: y = 2^{-|x|}$$

$$a_1: y = a_2(x) + sgn(x) = 2^{-|x|} + sgn(x)$$

$$a: y = a_1(x) - 1,25 = 2^{-|x|} + sgn(x) - 1,25$$

$$g_1: y = sgn(a(x)) = sgn(2^{-|x|} + sgn(x) - 1,25)$$

$$g: y = g_1(x+4) + 1 \Rightarrow \underline{\underline{g: k = sgn\left(2^{-|x+4|} + sgn(x+4) - 1,25\right) + 1}}$$

8.)

a) $f: y = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow f^{-1}: x = -\frac{1}{2}y + 4$

$\frac{1}{2}y = -x + 4$ $\quad$ $y = -2x + 8$

b) $f: y = -x + 3 \Rightarrow f^{-1}: x = -y + 3 \Rightarrow y = -x + 3$

c) $f: y = \frac{1}{2}x^2 \wedge x \in \langle 0; \infty) \Rightarrow f^{-1}: x = \frac{1}{2}y^2$

$y = \pm\sqrt{2x} \wedge y \in \langle 0; \infty)$ $\quad$ $y = \sqrt{2x}$

d) $f: y = x^2 - 6x + 5 \wedge x \in \langle 3; \infty)$

$\Rightarrow f^{-1}: x = y^2 - 6y + 5$

$y^2 - 6y + (5 - x) = 0$

$D = 36 - 4(5 - x)$

$D = 36 - 20 + x$

$D = 16 + x$

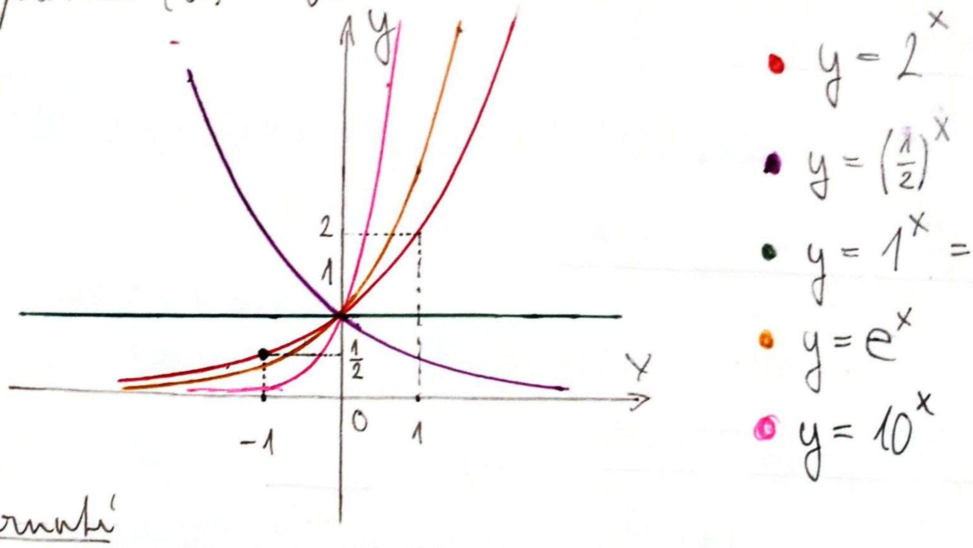
$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{x + 16}}{2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x + 16} + 3$

$y \in \langle 3; \infty) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 16} + 3$

EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$y = a^x \wedge a \in R^+$

→ grafy $y = a^x$ a $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ jsou osově souměrné podle osy y, protože $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$



→ shrnutí

- $y = a^x \wedge a \in R^+$
- graf – exponenciála → $y = 10^x$ – dekadická exponenciála
- prochází body $[1; a]$, $[0; 1]$, $[-1; \frac{1}{a}]$
- je prostá pro $a \neq 1$
- je omezená zdola
- $D(f) = R$
- $H(f) = (0; \infty)$ – pro $a \neq 1$
- monotonnost → $a > 1$ – rostoucí
  → $a = 1$ – konstantní
  → $0 < a < 1$ – klesající

→ $y = a^{x-m} + n$ → $O(y) \wedge y = a^{-x-m} + n$ → $f(-x)$

→ počátek exponenciály v bodě $[m; n]$, $H(f) = (n; \infty)$

→ zadáno jako: $y = a^{kx-m} + n$ → chci osamostatnit x

$$y = a^{k(x-\frac{m}{k})} + n$$

$$y = (a^k)^{x-\frac{m}{k}} + n$$

→ mocniny s racionálním exponentem

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

→ exponenciální rovnice

- základní typ

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^x = a^y & a^x \cdot b^x = (ab)^x \\ x = y & \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \end{array}}$$

- $2 \cdot 0{,}5^{x^2 + \frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$

$$2 \cdot 2^{-1(x^2 + \frac{8}{3}x)} = \frac{2^3}{2^{\frac{2}{3}}}$$

$$2 \cdot 2^{-x^2 - \frac{8}{3}x} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$2^{-x^2 - \frac{8}{3}x + 1} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$-x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = \frac{7}{3}$$

$$3x^2 + 8x + 4$$

$$D = 64 - 16 \cdot 3 = 16 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{6} \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = -2 \quad K = \left\{-2; -\frac{2}{3}\right\}$$

- druhý typ

$$a \cdot k^x + b \cdot k^x = k^x(a+b)$$

- $3^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 3^{x+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \frac{5}{3}$$

$$1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$x = -1$$

$$\Rightarrow K = \{-1\}$$

- <u>třetí typ</u>
  - rovnost mocnin o různém základu
  - → převedu si všechny mocniny na stejný exponent a osamostatním mocniny o stejném základu

- $\underline{3^x + 4^{x+1} = 7\cdot 4^x - 3^{x+1}}$

$$3^x + 4\cdot 4^x = 7\cdot 4^x - 3\cdot 3^x$$
$$4\cdot 3^x = 3\cdot 4^x$$
$$\frac{3^x}{4^x} = \frac{3}{4}$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \Rightarrow \underline{x=1} \Rightarrow K\{1\}$$

→ <u>iracionální exponenciální rovnice</u>

- ZKOUŠKA !

- $\underline{\sqrt{5^{3x}+1} - \sqrt{5^{3x}-4} = 1}$

→ $\underline{S: 5^{3x} = a}$

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a+1} &= 1 + \sqrt{a-4} \\ a+1 &= 1 + 2\sqrt{a-4} + a - 4 \end{aligned}\right\} \text{umocňuju}$$
$$2 = \sqrt{a-4}$$
$$4 = a-4$$
$$\underline{a = 8}$$

→ <u>zkouška</u>

$$\sqrt{a+1} = 1 + \sqrt{a-4}$$
$$3 = 1 + 2 \rightarrow V$$

→ $\underline{S: a = 5^{3x}}$

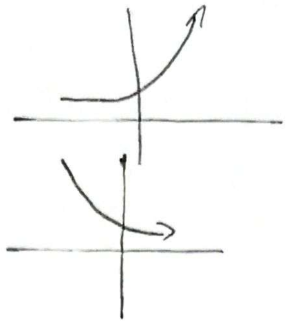
$$5^{3x} = 8$$
$$3x\cdot \ln(5) = \ln(8)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{\ln(8)}{3\ln(5)}}}$$

Exponenciální nerovnice

$a^x > a^y$

1) $\underline{a \in (1;\infty)} \rightarrow x > y$ $\qquad \uparrow x - \uparrow f(x)$

2) $\underline{a \in (0;1)} \rightarrow x < y$ $\qquad \uparrow x - \downarrow f(x)$



- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \le 3$

$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \le 3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \le \frac{3}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$

$\underline{\underline{x \ge 1}} \Rightarrow K = \langle 1;\infty)$

- $4^x - 3\cdot 2^x - 4 < 0$

$(2^x)^2 - 3\cdot(2^x) - 4 < 0$

$\left.\begin{array}{l} 2^x_1 = 4 \\ 2^x_2 = -1 \end{array}\right\} 2^x \in (-1;4) \Rightarrow 2^x > -1 \wedge 2^x < 4 = 2^2$

$\underline{x \in R}$ $\qquad \underline{x < 2}$

$K_1 = R$ $\qquad K_2 = (-\infty;2)$

$\Rightarrow K = K_1 \cap K_2 = (-\infty;2)$

- $25^x - 9\cdot 5^x + 20 > 0$

$(5^x)^2 - 9\cdot(5^x) + 20 > 0$

$\left.\begin{array}{l} 5^x_1 = 4 \\ 5^x_2 = 5 \end{array}\right\} 5^x \in (-\infty;4) \cup (5;\infty) \Rightarrow 5^x < 4 \vee 5^x > 5$

$x \cdot \log_5(5) < \log_5(4)$ $\qquad \underline{x > 1}$

$\underline{\underline{x < \log_5(4)}}$ $\qquad K_2 = (1;\infty)$

$K_1 = \left(-\infty; \frac{\ln 4}{\ln 5}\right)$

$\Rightarrow K = K_1 \cup K_2 = \left(-\infty; \frac{\ln 4}{\ln 5}\right) \cup (1;\infty)$

LOGARITMICKÁ FUNKCE

→ inverzní funkce k funkci exponenciální

$\Rightarrow f: y = a^x \Rightarrow f^{-1}: x = a^y \Rightarrow y \cdot \log_a a = \log_a x$

$y = \log_a x$

$y = \log_a(x) \wedge a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$

y = logaritmus
a = základ
x = číslo logaritmované

$y = \log_a x \iff a^y = x$

→ dekadický logaritmus

$y = \log_{10} x = \log x$

→ přirozený logaritmus

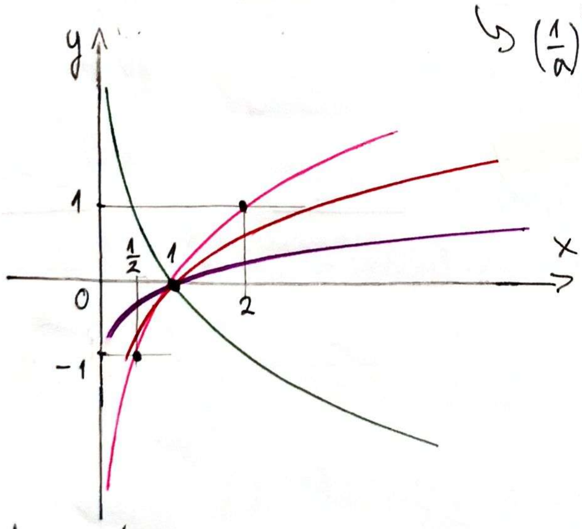
$y = \log_e x = \ln x \quad \rightarrow e \doteq 2{,}718 \rightarrow$ Eulerovo číslo

→ graf

→ grafy $y = \log_a x$ a $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ jsou osově souměrné podle osy x

↳ $\left(\frac{1}{a}\right)^y = x \Rightarrow a^{-y} = x \Rightarrow a^y = x^{-1} \Rightarrow y = \log_a x^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\log_a x$



- $y = \log_2 x$
- $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
- $y = \ln x$
- $y = \log x$

→ shrnutí

→ prochází body: $[a;1]$, $[1;0]$, $[\frac{1}{a};-1]$

→ je prostá

→ není omezená

→ $D(f) = (0;\infty)$

→ $H(f) = \mathbb{R}$

→ monotonnost → $a > 1$ – rostoucí
→ $0 < a < 1$ – klesající

$y \geq 0 \iff x \geq 1$
$y < 0 \iff x \in (0;1)$

$y \geq 0 \iff x \in (0;1\rangle$
$y < 0 \iff x > 1$

→ logaritmické rovnice → VŽDY PODMÍNKY!

→ vzorečky a pravidla pro počítání s logaritmy

- $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x \Rightarrow a^{\log_a x} = x$
- $\log_a 1 = 0 \;\wedge\; \log_a a^n = n \;\wedge\; \log_a x = \log_{a^n} x^n \Leftrightarrow x^n = a^{n\cdot y} \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a x^n = n \cdot \log_a x \;\wedge\; \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \;\wedge\; \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \;\wedge\; \log_a x = \frac{1}{\log_x a} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{\log_x a}} = x \Leftrightarrow a = x^{\log_x a}$
- $m^{\log_a n} = n^{\log_a m} \Leftrightarrow \log_a n \cdot \log_a m = \log_a m \cdot \log_a n$ ← a to vždy platí

1) zlogaritmuj a odlogaritmuj – jedno je zpětný proces toho druhého

- zlogaritmuj: $\log\left(\frac{c \cdot \sqrt{a \cdot b}}{a^2 \cdot b}\right) = \log c + \log\sqrt{a} + \log\sqrt{b} - \log a^2 - \log b =$

$$= \log c + \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{2}\log b - 2\log a - \log b =$$

$$= -\frac{3}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b + \log c$$

2) základní typ

$\log^2_{\frac{1}{2}}(x+1) + 5\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 6 = 0$ → podmínky: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -6 \quad \vee \quad \log_{\frac{1}{2}}(x+1) = 1$

$x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \qquad x+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$x = 2^6 - 1 \qquad x = -\frac{1}{2}$

$x = 63$

$\Rightarrow K = \left\{-\frac{1}{2}; 63\right\}$

→ využívám: základní vzorec + $a^y = x$

3) zlogaritmování exponenciální rovnice

$$2^{3x} \cdot 7^{2x-3} = 3^{5x+2}$$

$$\log\left(2^{3x} \cdot 7^{2x-3}\right) = \log\left(3^{5x+2}\right)$$ – nemusím určovat podmínky
⇒ vždy kladné argumenty

$$3x \cdot \log 2 + (2x-3) \cdot \log 7 = (5x+2) \cdot \log 3$$

$$3x \cdot \log 2 + 2x \cdot \log 7 - 3 \log 7 = 5x \cdot \log 3 + 2 \log 3$$

$$x\left(3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 7 - 5 \cdot \log 3\right) = 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 7$$

$$x = \frac{\log 3^2 + \log 7^3}{\log 2^3 + \log 7^2 - \log 3^5}$$

$$x = \frac{\log\left(3^2 \cdot 7^3\right)}{\log\left(2^3 \cdot 7^2 \cdot 3^{-5}\right)}$$

4) logaritmická rovnice s různými základy

⇒ využívám: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$ ⇒ podmínky: $x > 0$

$$\frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + \log_2 x = 7$$

$$\frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 7$$

$$7 \log_2 x = 28 \Rightarrow \log_2 x = 4$$

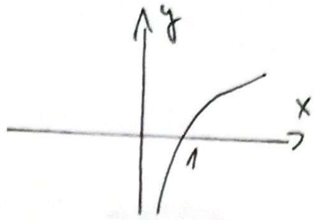
$$x = 2^4 = 16$$ ✓

logaritmické nerovnice

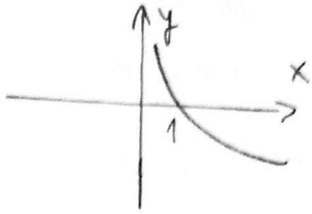
- $\log_a x > \log_a y$

$x > y \iff a > 1$

$x < y \iff a \in (0;1)$



$a > 1$



$a \in (0;1)$

- násobení nerovnice logaritmem

→ $\log_a x > 0$ → pokud $a > 1 \wedge x > 1$

→ pokud $a \in (0;1) \wedge x \in (0;1)$

→ $\log_a x = 0$ → pokud $x = 1$

→ $\log_a x < 0$ → pokud $a > 1 \wedge x \in (0;1)$

→ pokud $a \in (0;1) \wedge x > 1$

→ $K = K_1 \cap P$ – zohledňuju podmínky

$\log_3 (x-4) < 0 \rightarrow x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

$x - 4 < 3^0 \Rightarrow x < 5$

$K = (-\infty;5) \cap (4;\infty) = (4;5)$

$\log^2_{(\frac{1}{2})} x + \log_{(\frac{1}{2})} x - 2 \leq 0 \rightarrow x > 0 \Rightarrow P = (0;\infty)$

$\log_{\frac{1}{2}} x \in \langle -2;1 \rangle \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq -2 \quad \wedge \quad \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1$

$x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \qquad x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$K_1 = (-\infty;4\rangle \qquad K_2 = \langle \frac{1}{2};\infty)$

$\Rightarrow K = (K_1 \cap K_2) \cap P = \langle \frac{1}{2};4 \rangle \cap (0;\infty) = \langle \frac{1}{2};4 \rangle$

$\log^2_3 x + \log_3 x - 2 > 0 \rightarrow x > 0 \Rightarrow P = (0;\infty)$

$\log_3 x \in (-\infty;-2) \cup (1;\infty) \Rightarrow \log_3 x < -2 \quad \vee \quad \log_3 x > 1$

$x < 3^{-2} \qquad x > 3^1$

$K_1 = (-\infty; \frac{1}{9}) \qquad K_2 = (3;\infty)$

$\Rightarrow K = (K_1 \cup K_2) \cap P = (0;\frac{1}{9}) \cup (3;\infty)$

→ <u>soustava logaritmických rovnic</u>

1, určím všechny podmínky

2, z jedné rovnice vyjádřím neznámou a dosadím

⇒ 1 rovnice s 1 neznámou

3) vyřeším tuto rovnici

⇒ získám 1. neznámou → kontrola podmínek

4, tuto hodnotu dosadím do některé z rovnic

5) vyřeším tuto rovnici

⇒ získám 2. neznámou → kontrola podmínek

→ když je to složitější, substituuji

14) urči všechny hodnoty parametru q, aby daná fce byla:

a, rostoucí: $y = \left(\frac{1}{q}\right)^x$

$\Rightarrow \frac{1}{q} > 1 \Rightarrow q > 0 \Rightarrow$ můžu násobit

$q < 1$

$\left.\right\} \underline{\underline{q \in (0;1)}}$

b, klesající: $y = \left(\frac{q+1}{q^2-1}\right)^x \Rightarrow q^2 \neq 1 \Rightarrow \underline{\underline{q \neq \pm 1}}$

$\frac{q+1}{q^2-1} > 0 \quad \wedge \quad \frac{q+1}{q^2-1} < 1$

$\frac{q+1}{q^2-1} - \frac{q^2-1}{q^2-1} < 0$

NB: $q = -1$ / $q = \pm 1$

$\frac{q+1-q^2+1}{q^2-1} < 0$

$q^2 - q - 2 = 0$

$q_{1,2} = 2, -1$

$-$ (− −) $+$ (+ −) $+$ (+ +)

⊖ -1 ⊖ 1 ⊕

$\Rightarrow K_1 = (1;\infty)$

$\frac{q^2-q-2}{q^2-1} > 0$

$\frac{(q-2)(q+1)}{q^2-1} > 0$

NB: $q = 2$, $q = -1$ | $q = \pm 1$

(− −) (− −) (− +) (+ −) (− +) (+ +) (+ +) (+ +)

⊕ -1 ⊕ 1 ⊖ 2 ⊕

$\Rightarrow K_2 = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (2;\infty)$

$\Rightarrow \underline{\underline{q \in K_1 \cap K_2 = (2;\infty)}}$

urči Df

a, $y = \log_3(x+6)$

$x+6 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{D(f) = (-6;\infty)}}$

b, $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x+5}{x}\right)}$

$\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x+5}{x}\right) \geq 0$

$\frac{x+5}{x} > 0 \quad \wedge \quad \frac{x+5}{x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x+5}{x} - \frac{x}{x} \leq 0$

NB: $x = -5$, $x = 0$

$\frac{5}{x} \leq 0 \Rightarrow K_2 = (-\infty;0)$

$- -$ $+ -$ $+ +$

⊕ -5 ⊖ 0 ⊕

$\Rightarrow \underline{\underline{D(f) = K_1 \cap K_2 = (-\infty;-5)}}$

$\Rightarrow K_1 = (-\infty;-5) \cup (0;\infty)$

⇒ porovnejte hodnoty

• $a = 9^{\log_{3\sqrt{3}} \sqrt{8}} = 9^{\log_{3^{\frac{3}{2}}} (2^{\frac{3}{2}})} \Rightarrow 2^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2} \cdot y}$

$2 = 3^{y} \Rightarrow y = \log_3 2$

$a = 9^{\log_3 2} = 3^{2 \cdot \log_3 2} = 3^{\log_3 4}$

$a = 4$

• $b = 2^{\log_4 \frac{1}{3}} \Rightarrow 2^{2y} = 3^{-1} \Rightarrow 2^{y} = 3^{-\frac{1}{2}}$

$b = 2^{\log_2 (3^{-\frac{1}{2}})} = 3^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \log_2 (3^{-\frac{1}{2}})$

$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

• $c = (\sqrt{27})^{-\frac{1}{3}} = (3^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}} = 3^{-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

• $d = \log\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \log \sqrt{2} - \log 4 = \frac{1}{2} \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 2 = -\frac{3}{2} \cdot \log 2$

$\log_{10} 2 > 0 \Rightarrow d < 0$

• $e = \log_2^2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \log_2^2 (2^{-\frac{3}{2}}) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$e = 2{,}25$

• $f = 3^{\log_9 5} = 3^{\log_3 \sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$f = \sqrt{5} \doteq 2{,}23$

$\Rightarrow d < b = c < f < e < a$

$\Rightarrow$ pre ktorá m, má daná rovnica 2 rôzne reálne korene?

$$(2m-1)\cdot 4^{|x|} - (5m-2)\cdot 2^{|x|} + 2m = 0$$

$$D = (2-5m)^2 - 8m\cdot(2m-1) = 4 - 20m + 25m^2 - 16m^2 + 8m$$

$$D = 9m^2 - 12m + 4 = (3m-2)^2$$

$$2^{|x|}_{1,2} = \frac{5m-2 \pm (3m-2)}{4m-2} \rightarrow m \neq 0{,}5$$

$$\Rightarrow 2^{|x|}_1 = \frac{8m-4}{4m-2} = 2 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ pre } m \in R \setminus \{0{,}5\}$$

$$\Rightarrow 2^{|x|}_2 = \frac{2m}{4m-2} = \frac{m}{2m-1}$$

$$|x|\cdot \log_2 2 = \log_2\left(\frac{m}{2m-1}\right)$$

$$|x| = \log_2\left(\frac{m}{2m-1}\right) \rightarrow \frac{m}{2m-1} > 0$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{m}{2m-1}\right) \geq 0$$

$$\frac{m}{2m-1} \geq 1$$

$$\frac{m}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m-1} \geq 0$$

$$\frac{-m+1}{2m-1} \geq 0 \rightarrow NB: m = 1,\ m = 0{,}5$$

+ −	+ +	− +
⊖	⊕	⊖

0,5 ; 1

$$\Rightarrow x = \pm \log_2\left(\frac{m}{2m-1}\right) \text{ pre } m \in (0{,}5; 1\rangle$$

$$\log_2\left(\frac{m}{2m-1}\right) = 1$$

$$\frac{m}{2m-1} = 2 \Rightarrow m = 4m - 2$$

$$2 = 3m$$

$$m = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ daná rovnica má 2 rôzne reálne korene pre

$$m \in (-\infty; 0{,}5) \cup (1; \infty) \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$\Rightarrow f: y = 2x^2 + 6x + c \quad ; \quad g: y = -x^2 + bx - 25 \quad ; \; b, c \in \mathbb{R}$

a) $c = ?$ → fce f má pouze 1 nulový bod

$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow 36 - 8c = 0$

$8c = 36$

$\underline{\underline{c = 4{,}5}}$

b) $b = ?$ → g má maximum pro $x = 5$

$m = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -2a \cdot m$

$b = -2 \cdot (-1) \cdot 5$

$\underline{\underline{b = 10}}$

c) $x = ?$ → $f(-x) + 4 \cdot g(x) \geq 0$

$2 \cdot x^2 - 6x + 4{,}5 - 4x^2 + 40x - 100 \geq 0$

$-2x^2 + 34x - 95{,}5 \geq 0$

$2x^2 - 34x + 95{,}5 \leq 0$

$D = 34^2 - 8 \cdot 95{,}5 = 392 = 14\sqrt{2}$

$x_{1,2} = \frac{34 \pm 14\sqrt{2}}{4} = 8{,}5 \pm 3{,}5 \cdot \sqrt{2}$

$\underline{\underline{x \in \langle 8{,}5 - 3{,}5\sqrt{2}; 8{,}5 + 3{,}5\sqrt{2} \rangle}}$

$\rightarrow f: y = 4 \cdot \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$

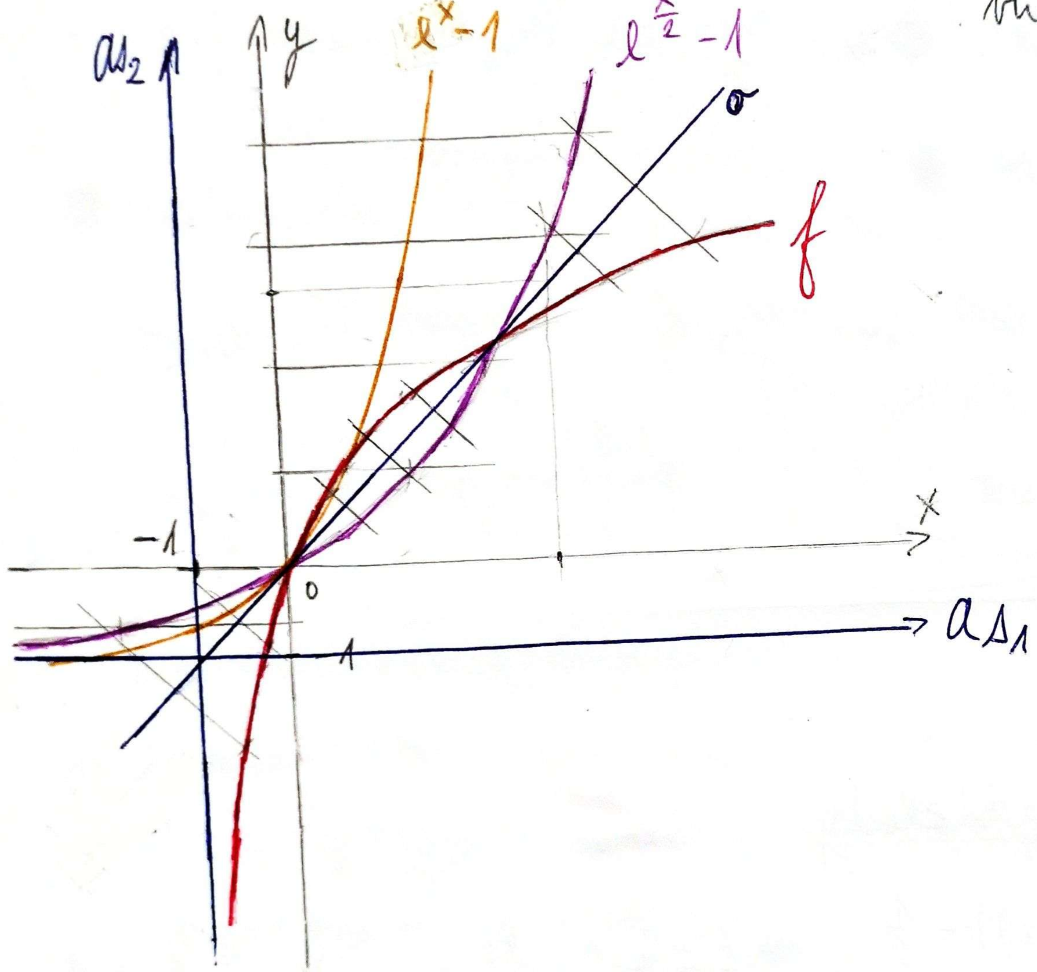
$f^{-1}: x = 4 \cdot \ln\left(\sqrt{y+1}\right)$

$\frac{x}{4} = \ln\sqrt{y+1}$

$\sqrt{y+1} = e^{\frac{x}{4}}$

$y = e^{\frac{x}{2}} - 1 \rightarrow V[0; -1] \wedge$ dvojnásobné x pro stejné y vůči $y = e^{x} - 1$

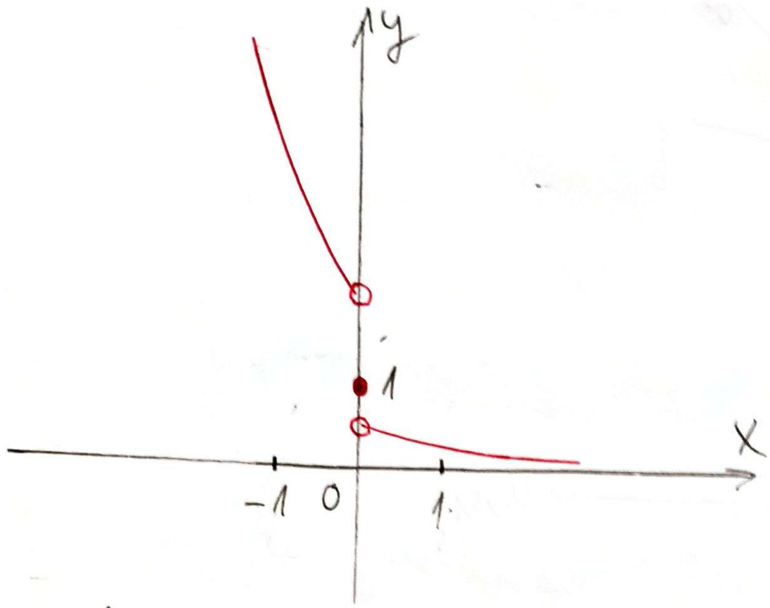
mělo se to řešit jako $y = 2\ln(x+1)$



$\rightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(x + sgn(x))}$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x + sgn(x)}$

- $x \in (-\infty; 0) : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \Rightarrow V_1[1;0]$
- $x = 0 : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 1$
- $x \in (0; \infty) : y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \Rightarrow V_2[-1;0]$



→ Logaritmy - příklady

- $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = \frac{1}{2}$ → $\underline{\underline{x > 0}} \wedge \log_2 x > 0 \rightarrow \underline{\underline{x > 1}}$

$\log_3(\log_2 x) = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad \wedge \log_3(\log_2 x) > 0$

$\log_2 x = 3^2 = 9$ $\quad \log_2 x > 1$

$\underline{\underline{x = 2^9 = 512}}$ $\quad \underline{\underline{x > 2}}$

$\rightarrow K = \{512\}$

- $\log_4 2^{4x} = 2^{\log_2 4}$

$2x \cdot \log_4 4 = 4$

$2x = 4$

$\underline{\underline{x = 2}} \rightarrow K = \{2\}$

$\cdot \log_{\frac{1}{16}}(2-x)^2 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{x+1}\right) \rightarrow (2-x)^2 > 0 \wedge \frac{2}{x+1} > 0$

$x \neq 2 \qquad x > -1$

$\log_{\frac{1}{4}}(2-x) = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{x+1}\right)$

$2-x = \frac{2}{x+1}$

$(x+1)(2-x) = 2$

$2x - x^2 + 2 - x = 2$

$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0$

$x = 0 \vee x = 1$

$\rightarrow K = \{0; 1\}$

$\cdot (\sqrt{x})^{\log_5(x)-1} = 5 \rightarrow x \geq 0 \wedge x > 0$

$(\log_5(x) - 1)\log_5(\sqrt{x}) = \log_5 5$

$\log_5(x) \cdot \frac{1}{2}\log_5(x) - \frac{1}{2}\log_5(x) - 1 = 0$

$\log_5^2(x) - \log_5(x) - 2 = 0$

$\log_5(x) = -1 \vee \log_5(x) = 2$

$x = \frac{1}{5} \qquad x = 25 \rightarrow K = \{\frac{1}{5}, 25\}$

$\cdot 2 \cdot \log\sqrt{x+y} = 1 \longrightarrow x+y > 0$

$\log(y) - \log|x| = \log 2 \rightarrow y > 0$

$\} \; x > -y \wedge y > 0$

$\log(x+y) = 1 \Rightarrow x+y = 10 \Rightarrow x = 10-y$

$\rightarrow \log(y) - \log|10-y| = \log 2$

$\log\left(\frac{y}{|10-y|}\right) = \log 2$

$y = 2|10-y|$

1) $y - 10 \geq 0: \; y = 20 - 2y$

$y_1 = \frac{20}{3}$

2) $y - 10 < 0: \; y = -20 + 2y$

$y_2 = 20$

$x_1 = 10 - \frac{20}{3}$

$x_1 = \frac{30-20}{3} = \frac{10}{3}$ ✓

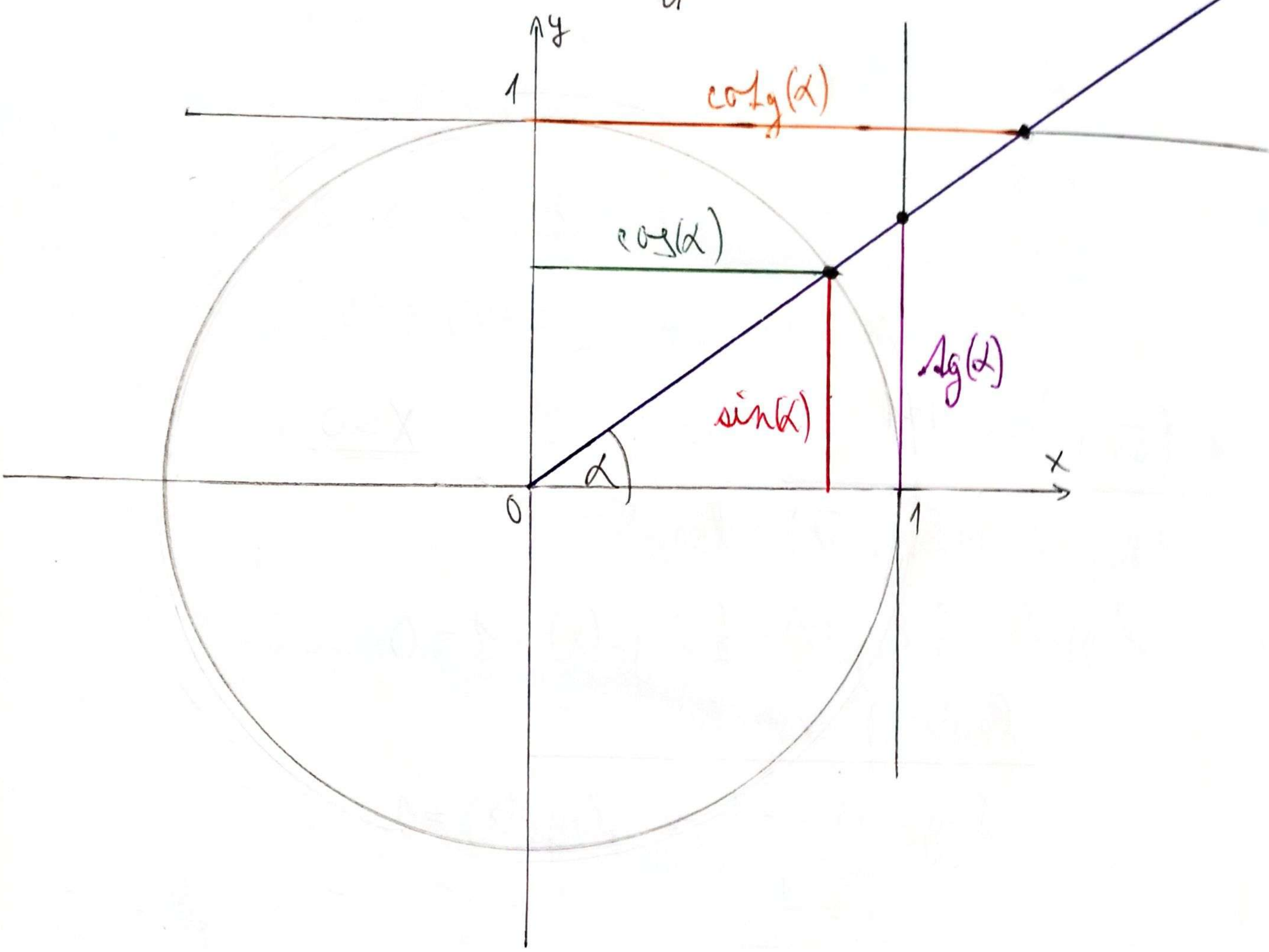
$x_2 = 10 - 20$

$x_2 = -10$

$\rightarrow K = \{[\frac{10}{3}; \frac{20}{3}]; [-10; 20]\}$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ rad $\qquad \alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$ rad



$\sin(-x) = -\sin(x) \wedge tg(-x) = -tg(x) \wedge cotg(-x) = -cotg(x)$ - liché fce
$\cos(-x) = \cos(x)$ - sudá fce

⇒ převody

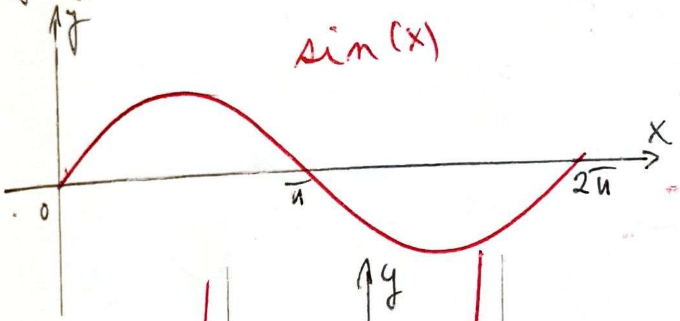
kvadrant	sin	cos	tg	cotg
I → x	+	+	+	+
II → $\pi - x$	+	−	−	−
III → $\pi + x$	−	−	+	+
IV → $2\pi - x$	−	+	−	−

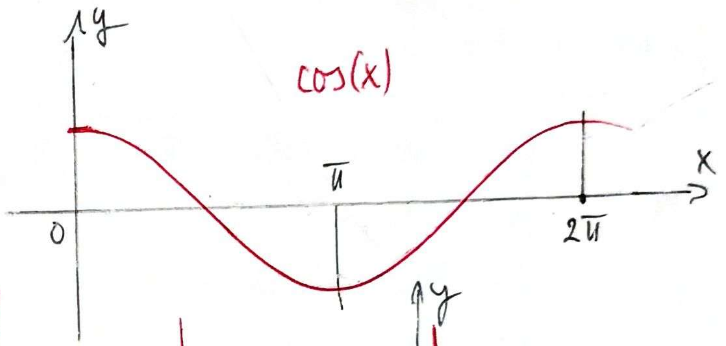
- $\sin\left(-\frac{23}{6}\pi\right) = -\sin\left(2\pi + \frac{11}{6}\pi\right) = -\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ - IV kvadrant ⇒ ⊖ ↗ změna znaménka
  $= \ominus \cdot -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - IV kvadrant ⇒ ⊕ ⇒ nezměnění znaménka
- $tg\left(\frac{11}{3}\pi\right) = tg\left(\frac{2}{3}\pi\right) = tg\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{3}}}$ - II kvadrant ⇒ ⊖

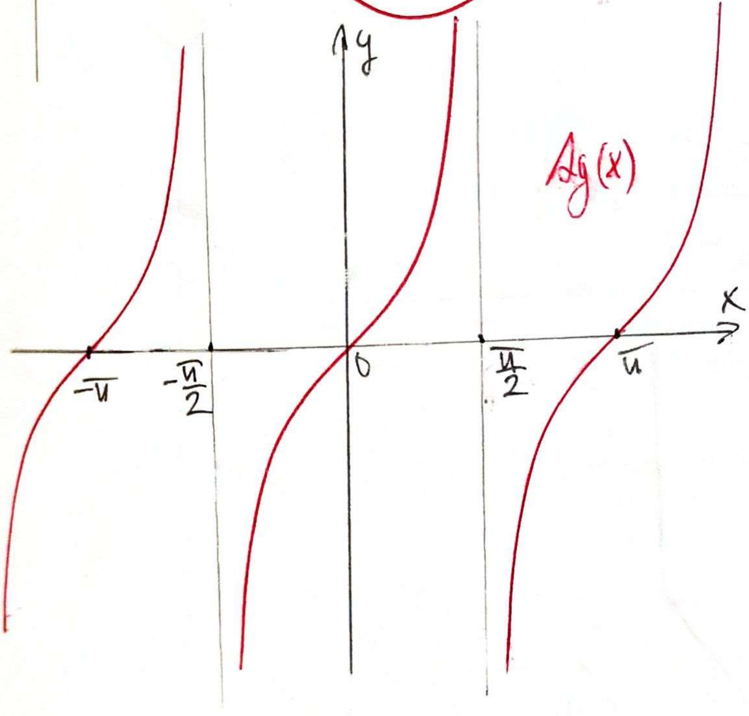
→ tabulka hodnot

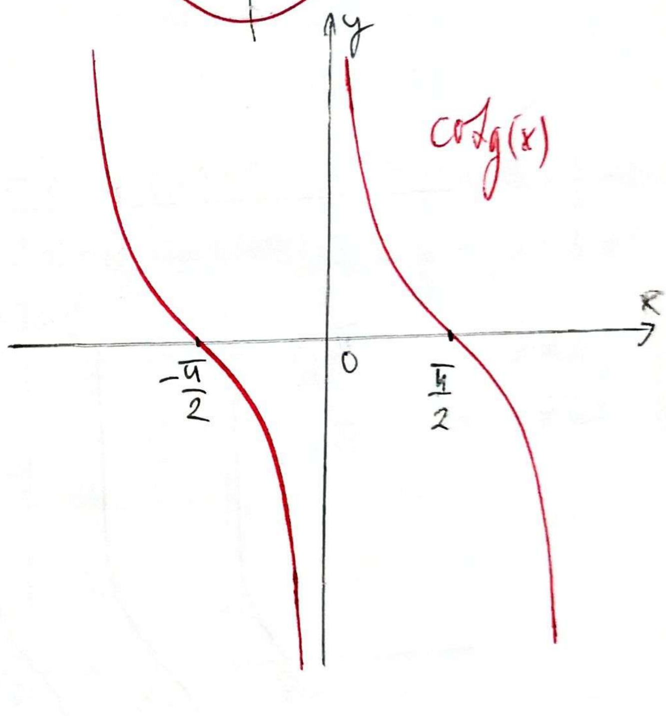
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

→ grafy









• $y = a \cdot \sin(k \cdot x - m) + n$

$y = a \cdot \sin\left[k \cdot \left(x - \frac{m}{k}\right)\right] + n$

→ počátek $P\left[\frac{m}{k}; n\right]$ → sestrojím v něm fci z: $y = a \cdot \sin(k \cdot x)$

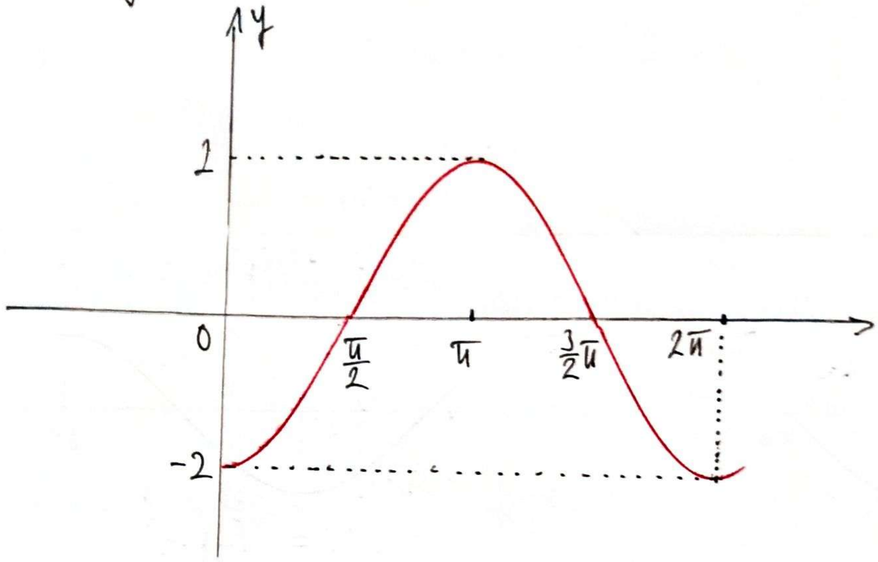
→ perioda $p = \frac{2\pi}{k}$

→ a-násobné funkční hodnoty

→ sestroj grafy

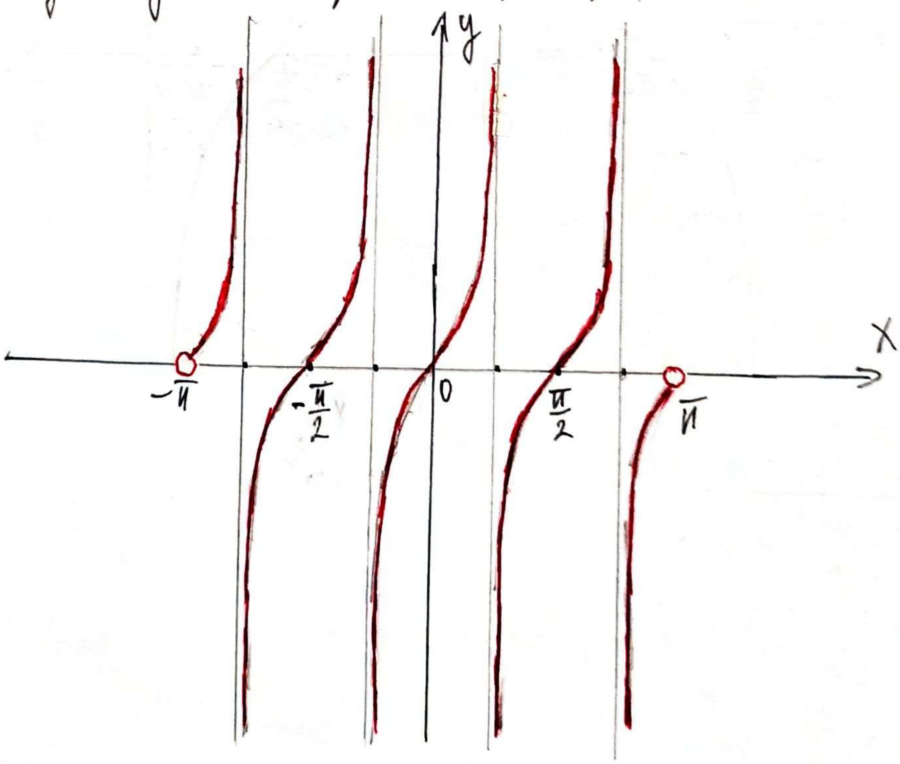
a) $y = 2\cos(\pi - x)$ pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$y = 2\cos(x - \pi)$ ⇒ $P[\pi; 0]$ + 2-násobné fční hodnoty



b) $y = tg(\pi + 2x)$ pro $x \in (-\pi; \pi)$

$y = tg(2x)$ ⇒ perioda $p = \frac{\pi}{2}$



→ rozhodni zda je fce $f: y = \frac{1}{2} \cdot \sin(x - \frac{\pi}{2})$ lichá či sudá a urči $H(f)$

1) $D(f) = R$ ⇒ $\forall x \in D(f);\ -x \in D(f)$

2) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2} - x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$

$f(-x) = -\frac{1}{2}\cos(-x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$

$\Big\}$ $f(x) = f(-x)$

f je SUDÁ

$H(f) = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$

Goniometrické vzorce

Thursday, April 30, 2020 11:07 AM

Vzorce pro funkce o argumentu $2\cdot x$ a $\frac{1}{2}\cdot x$

- $\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$
- $\cos(2\cdot x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $= 2\cdot\cos^2(x) - 1$ $= 1 - 2\cdot\sin^2(x)$
- $\mathrm{tg}(2\cdot x) = \frac{2\cdot \mathrm{tg}(x)}{1-\mathrm{tg}^2(x)}$

- $\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$
- $\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$
- $\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$

Součtové vzorce

- $\sin(x + y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y)$
- $\sin(x - y) = \sin(x)\cdot\cos(y) - \cos(x)\cdot\sin(y)$

- $\cos(x + y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$
- $\cos(x - y) = \cos(x)\cdot\cos(y) + \sin(x)\cdot\sin(y)$

- $\mathrm{tg}(x + y) = \frac{\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y)}{1 - \mathrm{tg}(x)\cdot\mathrm{tg}(y)}$
- $\mathrm{tg}(x - y) = \frac{\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(y)}{1 + \mathrm{tg}(x)\cdot\mathrm{tg}(y)}$

Vzorce na převod součtu na součin

- $\sin(x) + \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

- $\mathrm{tg}(x) + \mathrm{tg}(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}$
- $\mathrm{tg}(x) - \mathrm{tg}(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cdot\cos(y)}$

Základní vzorce

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\mathrm{tg}(x)\cdot\mathrm{cotg}(x) = 1 \quad \wedge \quad x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$

- $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\mathrm{tg}(x) = \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $\mathrm{cotg}(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

- $\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \wedge \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$
- $\mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad \wedge \quad x \neq k\cdot\pi$

- $\mathrm{tg}(x) = \frac{1}{\mathrm{cotg}(x)} \quad \wedge \quad x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$
- $\mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)} \quad \wedge \quad x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$

4. Goniometrie a trigonometrie

1. Vypočtěte $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ pro $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$.

2. Vyjádřete velikost úhlu α v radiánech:
   a) $\alpha = 22{,}5^\circ$; b) $\alpha = 300^\circ$;
   c) $\alpha = 720^\circ$; d) $\alpha = 1^\circ$.

3. Vyjádřete velikost úhlu α ve stupních:
   a) $\alpha = \frac{7}{6}\pi$; b) $\alpha = 1$;
   d) $\alpha = \frac{\pi}{18}$; d) $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

4. Uspořádejte podle velikosti čísla: $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\sin 4$.

5. Určete hodnoty $\sin x$, $\cos x$, je-li $\operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$ a $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

6. Určete hodnoty $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, je-li $\cos x = -\frac{1}{8}$ a $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

7. Zjednodušte následující výrazy:
   a) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$;

   b) $\sqrt{\sin^2\alpha\,(1 + \operatorname{cotg}\alpha) + \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha)}$;

   c) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$;

   d) $\dfrac{\sin^2(\frac{3\pi}{2} + x)}{\operatorname{cotg}^2(x - 2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-x)}{\operatorname{cotg}^2(x - \frac{3\pi}{2})}$.

8. Vypočtěte $\cos\alpha$, je-li $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

9. Vypočtěte hodnotu výrazu $\dfrac{3\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$, je-li $\operatorname{tg} x = -7$.

10. Dokažte, že pro všechna $x \in R$, pro něž jsou následující výrazy definovány, platí:
    a) $(1 - \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \operatorname{cotg} x)^2 = \left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos x}\right)^2$;

1) $\sin(30) = \frac{1}{2}$ $\quad \sin(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin(60) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(30) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos(60) = \frac{1}{2}$

$tg(30) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad tg(45) = 1$ $\quad tg(60) = \sqrt{3}$

$cotg(30) = \sqrt{3}$ $\quad cotg(45) = 1$ $\quad cotg(60) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) a) $\alpha = 22{,}5^\circ \Rightarrow x = \frac{\pi}{180} \cdot 22{,}5$ rad $\Rightarrow x = \frac{\pi}{8}$

b) $\alpha = 300^\circ \Rightarrow x = \frac{\pi}{180} \cdot 300$ rad $\Rightarrow x = \frac{5}{3}\pi$

c) $\alpha = 720^\circ \Rightarrow x = 4\pi$

d) $\alpha = 1^\circ \Rightarrow x = \frac{\pi}{180}$

3) a) $x = \frac{7}{6}\pi \Rightarrow \alpha = 180 + 30 = 210^\circ$

b) $x = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{180}{\pi}^\circ$

c) $x = \frac{\pi}{18} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = 10^\circ$

d) $x = \frac{\pi}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 15^\circ$

4) <u>ve stupních</u>: $\sin(1) < \sin(2) < \sin(3) < \sin(4)$

<u>v radiánech</u>: $1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi}^\circ < 60^\circ$ → míň než $\sin(60)$

$2 \text{ rad} = \frac{360}{\pi}^\circ < 120^\circ$ → víc než $\sin(60)$

$3 \text{ rad} = \frac{540}{\pi}^\circ < 180^\circ$ → kolem 0

$4 \text{ rad} = \frac{720}{\pi}^\circ < 240^\circ$ → $\ominus$

$\Rightarrow \sin(4) < \sin(3) < \sin(1) < \sin(2)$

5) $tg(x) = -\frac{5}{2} \wedge x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) \Rightarrow \sin(x), \cos(x) = ?$

$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{5}{2} \wedge \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(x) = -\frac{5}{2} \cdot \cos(x) \Rightarrow \frac{25}{4}\cos^2(x) + \cos^2(x) = 1 = \frac{29}{4}\cos^2(x)$

$\cos^2(x) = \frac{4}{29}$

$\cos(x) = \pm \frac{2}{\sqrt{29}} \wedge x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right) \Rightarrow \cos(x) > 0$

$\underline{\underline{\cos(x) = \frac{2\sqrt{29}}{29}}}$

$\Rightarrow \sin(x) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{29}$

$\underline{\underline{\sin(x) = -\frac{5\sqrt{29}}{29}}}$

6) $\cos(x) = -\frac{1}{8} \wedge x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi) \Rightarrow \sin(x), tg(x), cotg(x) = ?$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) = 1 - \frac{1}{64}$

$\sin(x) = \pm\frac{\sqrt{63}}{8} \wedge x \in (\pi; \frac{3}{2}\pi) \Rightarrow \sin(x) < 0$

$\sin(x) = -\frac{\sqrt{63}}{8} \Rightarrow tg(x) = \frac{\frac{\sqrt{63}}{8}}{\frac{1}{8}} = \sqrt{63} \Rightarrow cotg(x) = \frac{\sqrt{63}}{63}$

7) a) $\frac{(\sin(x)+\cos(x))^2}{1+\sin(2x)} = \frac{\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)}{1+\sin(2x)} = \frac{1+\sin(2x)}{1+\sin(2x)} = 1$

b) $\sqrt{\sin^2(x)\cdot[1+cotg(x)] + \cos^2(x)\cdot[1+tg(x)]} = \sqrt{a}$

$\Rightarrow a = \sin^2(x) + \sin^2(x)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \cos^2(x) + \cos^2(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)} =$

$= \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = (\sin(x)+\cos(x))^2$

$\Rightarrow \sqrt{a} = \sin(x) + \cos(x)$

c) $\frac{1-\cos(2x)+\sin(2x)}{1+\cos(2x)+\sin(2x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)-\cos^2(x)+\sin^2(x)+\sin(2x)}{\sin^2(x)+\cos^2(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)+\sin(2x)} =$

$= \frac{2\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)}{2\cos^2(x)+2\sin(x)\cos(x)} = \frac{2\sin(x)(\sin(x)+\cos(x))}{2\cos(x)(\cos(x)+\sin(x))} = tg(x)$

d) $\frac{\sin^2(x+\frac{3}{2}\pi)}{cotg^2(x-2\pi)} + \frac{\sin^2(-x)}{cotg^2(x-\frac{3}{2}\pi)} = \frac{\sin^2(x-\frac{\pi}{2})}{cotg^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{cotg^2(x-\frac{\pi}{2})} =$

$= \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2}-x)}{cotg^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{cotg^2(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\cos^2(x)}{cotg^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{tg^2(x)} =$

$= \cos^2(x)\cdot\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \sin^2(x)\cdot\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

8) $\cos(x) = ? \wedge \sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \sin(\frac{x}{2}) > 0$

$\sin(\frac{x}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$

$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(x))}$

$\frac{1}{4}(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1-\cos(x))$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos(x)$

$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

měl jsem tam uvčovat podmínky

9) $\operatorname{tg}(x) = -7 \rightarrow \dfrac{3\sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) - 3\sin(x)} = ?$

$\operatorname{tg}(x) < 0 \Rightarrow$ 2. nebo 4. kvadrant

$\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -7 \quad \wedge \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(x) = -7\cdot\cos(x) \Rightarrow 49\cos^2(x) + \cos^2(x) = 1$ nepomůžu si

$\cos^2(x) = \dfrac{1}{50}$

$\underline{\underline{\cos(x) = \pm\dfrac{1}{50}}}$

$\Rightarrow \sin(x) = -7\cdot\left(\pm\dfrac{1}{50}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\sin(x) = \mp\dfrac{7}{50}}}$

$\Rightarrow \dfrac{3\sin(x)+\cos(x)}{\cos(x)-3\sin(x)} = \dfrac{\mp\frac{21}{50} \pm \frac{1}{50}}{\pm\frac{1}{50} \pm \frac{21}{50}} = \dfrac{\frac{\mp 21 \pm 1}{50}}{\frac{\pm 21 \pm 1}{50}} = \dfrac{\mp 20}{\pm 22} = \underline{\underline{-\dfrac{10}{11}}}$

10) a) $(1-\operatorname{tg}(x))^2 + (1-\operatorname{cotg}(x))^2 = \left(\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\right)^2$

$(1-\operatorname{tg}(x))^2 + (1-\operatorname{cotg}(x))^2 = 1 - 2\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}^2(x) + 1 - 2\operatorname{cotg}(x) + \operatorname{cotg}^2(x) =$

$= \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \dfrac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} - 2\cdot\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} - 2\cdot\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} + 2 =$

$= \dfrac{\sin^4(x) + \cos^4(x) - 2\cdot\sin^3(x)\cdot\cos(x) - 2\cdot\sin(x)\cdot\cos^3(x) + 2\sin^2(x)\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)} =$

$= \dfrac{\sin^4(x) + 2\cdot\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x) - 2\cdot\sin(x)\cos(x)[\sin^2(x)+\cos^2(x)]}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)} =$

$= \dfrac{[\sin^2(x)+\cos^2(x)]^2 - 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)} = \dfrac{1-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)} =$

$= \dfrac{\sin^2(x) - 2\cdot\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)\cdot\cos^2(x)} = \underline{\underline{\left[\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{\sin(x)\cdot\cos(x)}\right]^2}}$

b) $\left(\dfrac{1+\sin^2(x)}{\sin(x)}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x) + 7$

$\left(\dfrac{1+\sin^2(x)}{\sin(x)}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\cos^2(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \dfrac{1+2\cdot\sin^2(x)+\sin^4(x)}{\sin^2(x)} + \dfrac{1+2\cos^2(x)+\cos^4(x)}{\cos^2(x)} =$

$= \dfrac{\cos^2(x) + 3\sin^2(x) + \sin^4(x)}{\sin^2(x)} + \dfrac{\sin^2(x) + 3\cos^2(x) + \cos^4(x)}{\cos^2(x)} =$

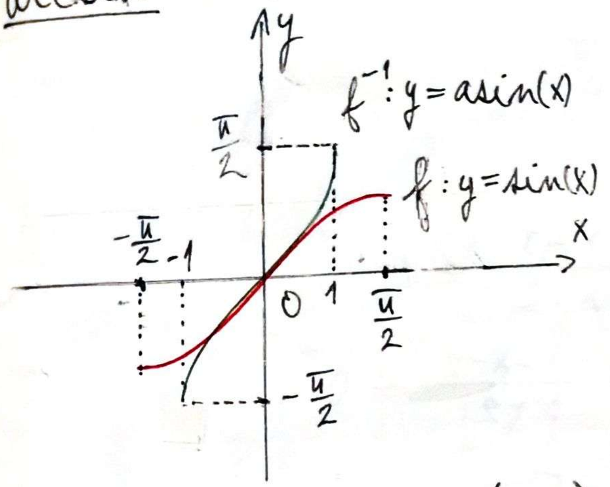
$= \operatorname{cotg}^2(x) + 3 + \sin^2(x) + \operatorname{tg}^2(x) + 3 + \cos^2(x) =$

$= \underline{\underline{\operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x) + 7}}$

CYKLOMETRICKÉ FUNKCE – arcus fce

- fce inverzní k fcím goniometrickým
- původní fce musí být prostá => vezmu si vždy jen kousek grafu

• **arcsin** → vezmu z $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

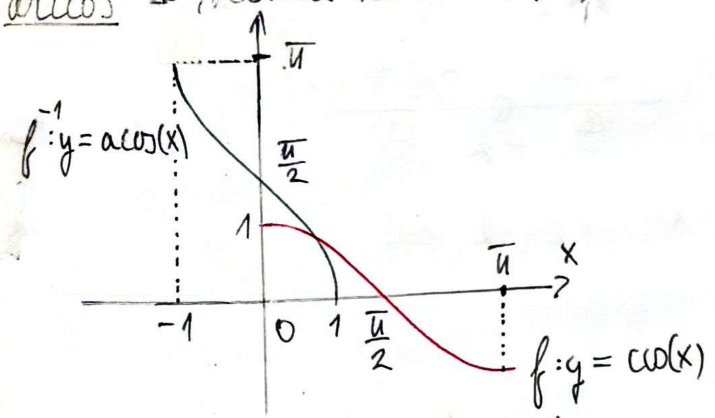


$D(f^{-1}) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

rostoucí + lichá

• **arccos** → vezmu z $x \in \langle 0; \pi \rangle$

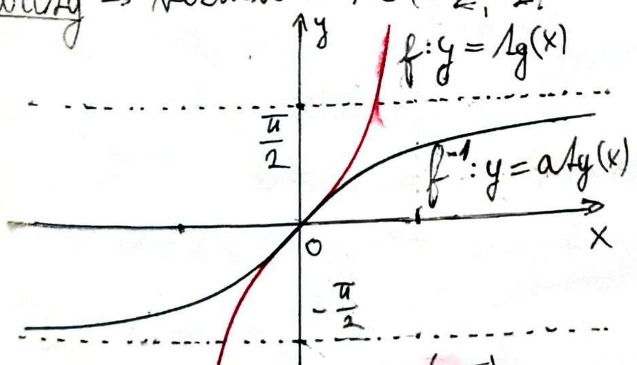


$D(f^{-1}) = \langle -1; 1 \rangle$

$H(f^{-1}) = \langle 0; \pi \rangle$

klesající

• **arctg** → vezmu z $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

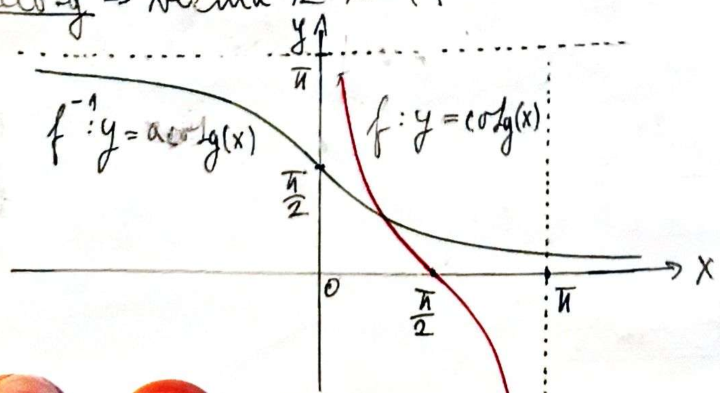


$D(f^{-1}) = R$

$H(f^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

rostoucí + lichá

• **arccotg** → vezmu z $x \in (0; \pi)$



$D(f^{-1}) = R$

$H(f^{-1}) = (0; \pi)$

klesající

→ do cyklometrických fcí zadáváme hodnoty těch goniometrických a ony nám vracejí jako fční hodnoty odpovídající úhly

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

→ příklady

• urči D(f) fce: $f: y = \arcsin\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

$D(\arcsin(x)) = \langle -1; 1 \rangle$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{x-3}{x+2} \leq 1$

$\frac{x-3}{x+2} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{x-3}{x+2} \leq 1$

$\frac{x-3+x+2}{x+2} \geq 0 \qquad \frac{x-3-x-2}{x+2} \leq 0$

$\frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \qquad \frac{-5}{x+2} \leq 0$

NB:

$-- \quad -+ \quad ++$; $\oplus \; -2 \; 0{,}5 \; \oplus$ $\qquad$ $-- \quad -+$; $\oplus \; -2 \; \ominus$

$x \in (-\infty; -2) \cup \langle 0{,}5; \infty) \quad \wedge \quad x \in (-2; \infty)$

$\Rightarrow D(f) = \langle 0{,}5; \infty)$

• urči D(f) daných funkcí

a) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^3+x}{x^2-7x}}$

$\frac{x^3+x}{x^2-7x} \geq 0 \quad \Rightarrow$ NB: $x(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0$

$x(x-7) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 7$

$D(f) = (7; \infty) \Leftarrow$

$-+ \quad + \quad - \quad ++$; $\ominus \; 0 \; \ominus \; 7 \; \oplus$

b) $y = \arcsin(e^{2x})$

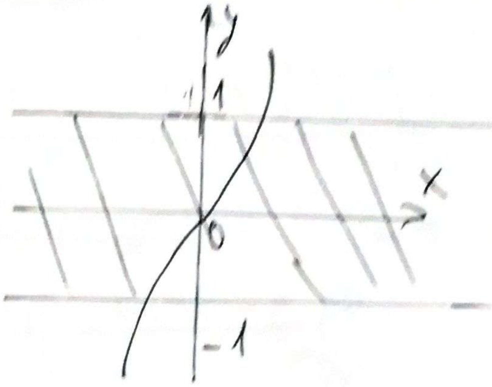
$D(\arcsin) = \langle -1; 1 \rangle \Rightarrow -1 \leq e^{2x} \leq 1$

$e^{2x} \geq -1 \quad \wedge \quad e^{2x} \leq 1$

$x \in R \quad \wedge \quad x \in (-\infty; 0\rangle$

$\Rightarrow D(f) = (-\infty; 0\rangle$

c) $y = \arcsin(tg(x))$ $\rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



$-1 \leq tg(x) \leq 1$

$tg(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

$tg(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\Rightarrow D(f) = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$

• sestroj graf

a) $f: y = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$ → sestrojím graf rovnou nebo sestrojím graf funkce inverzní a pak $O(y=x): f^{-1} \rightarrow f$

$f^{-1}: x = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$2x = \arcsin\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$\sin(2x) = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y = 2\sin(2x) + 1$

→ řešení přímo

$D(f): \ -1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1$

$-2 \leq x-1 \leq 2$

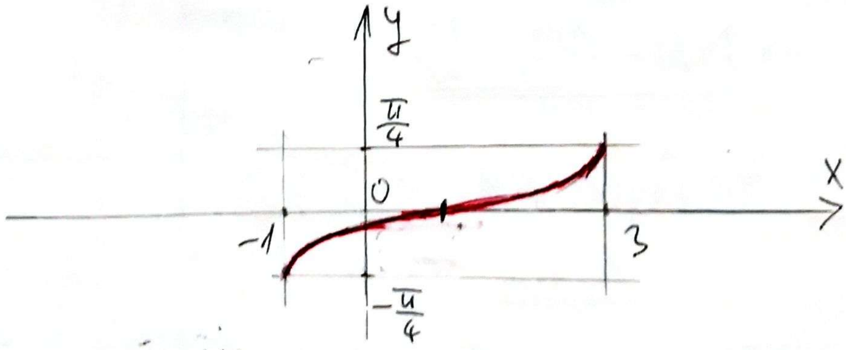
$-1 \leq x \leq 3$

$\Rightarrow D(f) = \langle -1; 3 \rangle$

$H(f) = \frac{1}{2} \cdot \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$\Rightarrow H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$

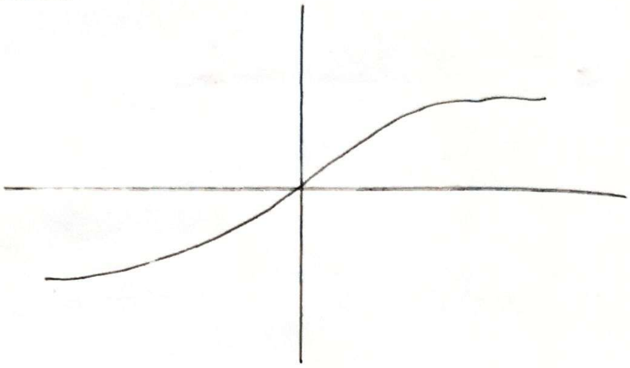
$P[1;0]$



FUNKCE - OPAKOVÁNÍ

→ určí definiční obor

a) $y = \ln(\operatorname{arctg}(1-2x))$



$\Rightarrow \operatorname{arctg}(1-2x) > 0$

$\Rightarrow 1-2x > 0$

$1 > 2x$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow D(f) = (-\infty; \frac{1}{2})$

b) $y = \sqrt{\frac{x}{x^2-4x-5}} \Rightarrow \frac{x}{x^2-4x-5} = \frac{x}{(x+1)(x-5)} \geq 0$

$\Rightarrow$ NB: $x=0 \quad x=-1 \quad x=5$

$- - - \quad - + - \quad + + - \quad + + +$

$\ominus \quad -1 \quad \oplus \quad 0 \quad \ominus \quad 5 \quad \oplus$

$\Rightarrow D(f) = (-1; 0\rangle \cup (5; \infty)$

c) $y = \arccos\sqrt{\frac{4+2x}{3}}$

• $-1 \leq \sqrt{\frac{4+2x}{3}} \leq 1 \Rightarrow \frac{4+2x}{3} \leq 1$

$4+2x \leq 3 \Rightarrow 2x \leq -1 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

• $4+2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2$

$\Rightarrow D(f) = \langle -2; -\frac{1}{2}\rangle$

d) $y = \frac{x^2-1}{1-\log(x)} \Rightarrow \log(x) \neq 1 \ \wedge \ x > 0$

$10 \neq x$

$\Rightarrow D(f) = (0; \infty) \setminus \{10\}$

- sestroj graf a urči vlastnosti

a) $f: y = \arcsin\sqrt{x+1}$ $\Rightarrow D(f): -1 \leq \sqrt{x+1} \leq 1 \wedge x+1 \geq 0$

$x+1 \leq 1$ $\quad x \geq -1$

$x \leq 0$

$\Rightarrow D(f) = \langle -1; 0 \rangle$

$f^{-1}: x = \arcsin\sqrt{y+1}$

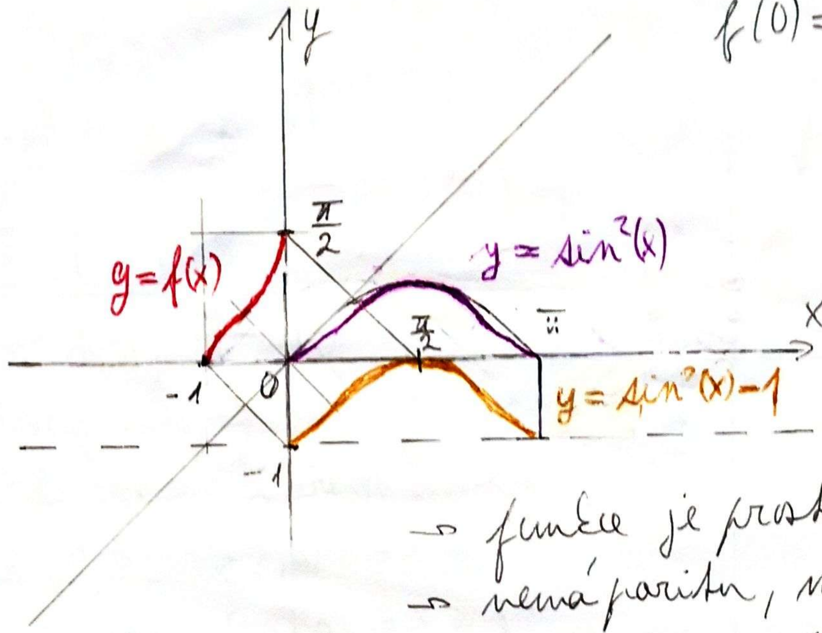
$\sin(x) = \sqrt{y+1}$

$y = \sin^2(x) - 1$

$H(f): f(-1) = \arcsin(0) = 0$

$f(0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow H(f) = \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$



- funkce je prostá, omezená, rostoucí
- nemá paritu, maximum v $x = 0$
minimum v $x = -1$

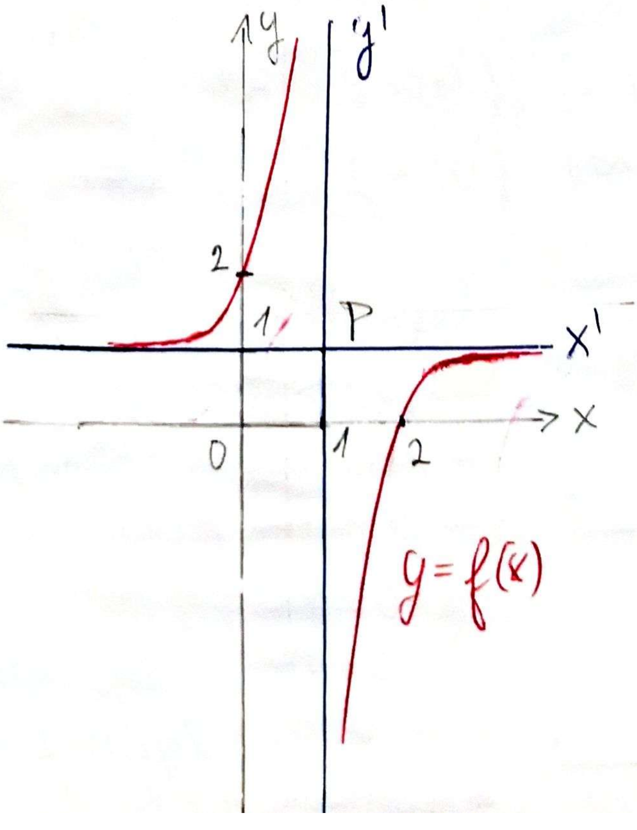
b) $f: y = -\frac{1}{(x-1)^3} + 1$

$\Rightarrow P[1; 1]$ $\quad \ominus \Rightarrow \sigma(x)$

$D(f) = R \setminus \{1\}$

$H(f) = R \setminus \{1\}$

- je prostá
- není omezená
- pro $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ je rostoucí
- nemá paritu
- nemá extrémy



c) $f: y = \frac{x-1}{2x+3} \cdot sgn(x)$

$x \in (-\infty; 0): f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$ $\Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ $n = -\frac{1}{2}$ $k = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$x = 0: f(x) = 0$

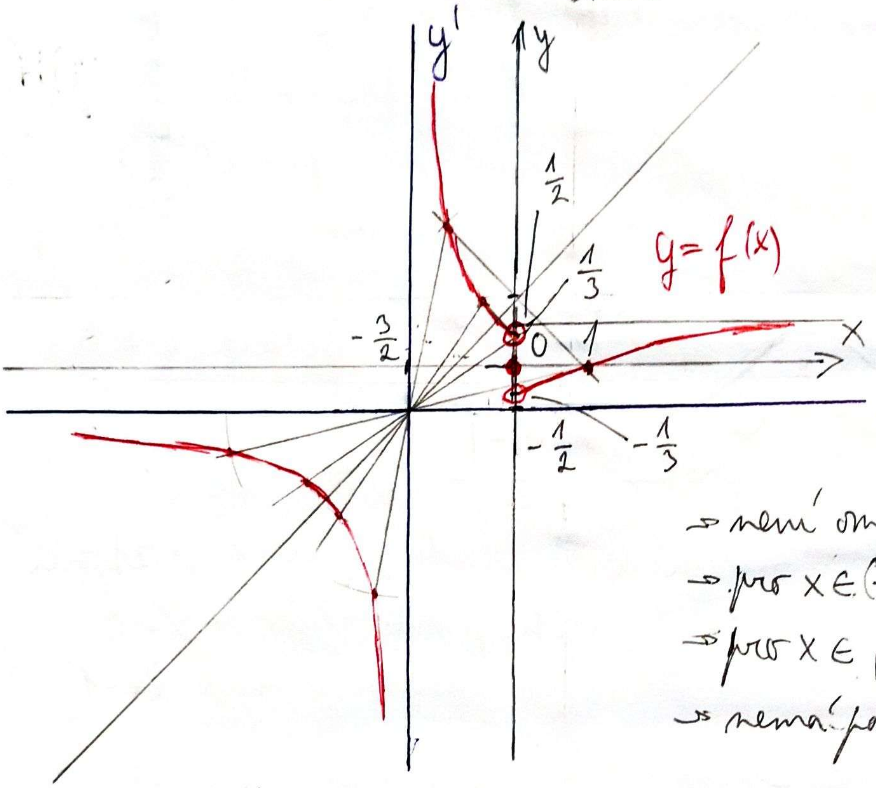
$\Rightarrow f(x) = \frac{1{,}25}{x+1{,}5} - \frac{1}{2} \Rightarrow P\left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$

$x \in (0; \infty): f(x) = -\frac{-x+1}{2x+3}$

$P_x: -x+1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$P_x = [1; 0]$

$P_y: y = \frac{1}{3} \Rightarrow P_y = \left[0; \frac{1}{3}\right]$



$D(f) = R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

$H(f) = R \setminus \left\langle -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right)$

$\Rightarrow$ není prostá

$\Rightarrow$ není omezená, nemá extrémy

$\Rightarrow$ pro $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; 0\right\rangle$ klesající

$\Rightarrow$ pro $x \in (0; \infty)$ rostoucí

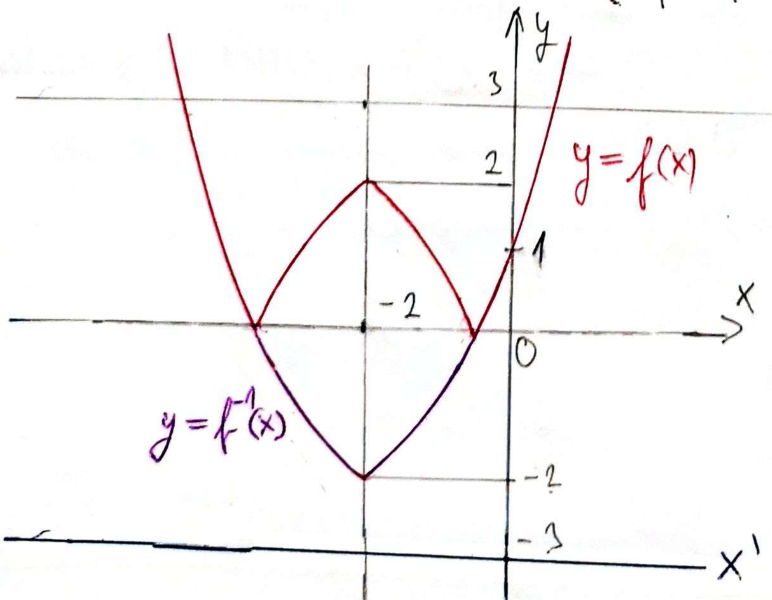
$\Rightarrow$ nemá paritu

$P[-2; -3]$

d) $f: y = \left|2^{|x+2|} - 3\right|$

$f': y = 2^{|x+2|} - 3$ $\Rightarrow x \in (-\infty; -2): f'(x) = 2^{-(x+2)} - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3$

$x \in \langle -2; \infty): f'(x) = 2^{x+2} - 3$ $\Rightarrow P[-2; -3]$



$D(f) = R$

$H(f) = \langle 0; \infty)$

$\Rightarrow$ není prostá + nemá paritu

$\Rightarrow$ je omezená ~~z~~dola

$y = 0 = 2^{|x+2|} - 3$

$3 = 2^{|x+2|} \Rightarrow \log_2(3) = |x+2|$

$\Rightarrow x = \pm \log_2(3) - 2$

$\Rightarrow$ minimum v $\pm \log_2(3) - 2$

$\Rightarrow$ pro $x \in (-\infty; -\log_2(3) - 2) \cup (-2; \log_2(3) - 2)$ klesající

$\Rightarrow$ pro $x \in \langle -\log_2(3) - 2; -2 \rangle \cup \langle \log_2(3) - 2; \infty)$ rostoucí

→ najdi inverzní fci k daným fcím

a) $f: y = -\frac{1}{2}x^4 \wedge x \in (-\infty; 0\rangle \Rightarrow H(f^{-1}) = (-\infty; 0\rangle$

$f^{-1}: x = -\frac{1}{2}y^4 \Rightarrow y^4 = -2x$

$y = \pm\sqrt[4]{-2x} \Rightarrow D(f^{-1}) = (-\infty; 0\rangle$

$f^{-1}: y = -\sqrt[4]{-2x}$

b) $f: y = \frac{x+2}{4x-1}$

$f^{-1}: x = \frac{y+2}{4y-1} \Rightarrow 4xy - x = y + 2$

$y(4x-1) = 2 + x \Rightarrow f^{-1}: y = \frac{x+2}{4x-1}$

c) $f: y = 2^{-2x} + 2$

$f^{-1}: x = 2^{-2y} + 2 = \left(\frac{1}{4}\right)^y + 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y = x - 2$

$f^{-1}: y = \log_{\frac{1}{4}}(x-2)$

d) $f: y = \cos\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$f^{-1}: x = \cos\left[\frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\arccos(x) = \frac{1}{2}y - \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}y = \arccos(x) + \frac{\pi}{8}$

$f^{-1}: y = 2\arccos(x) + \frac{\pi}{4}$