KYVADLOVÝ OSCILÁTOR

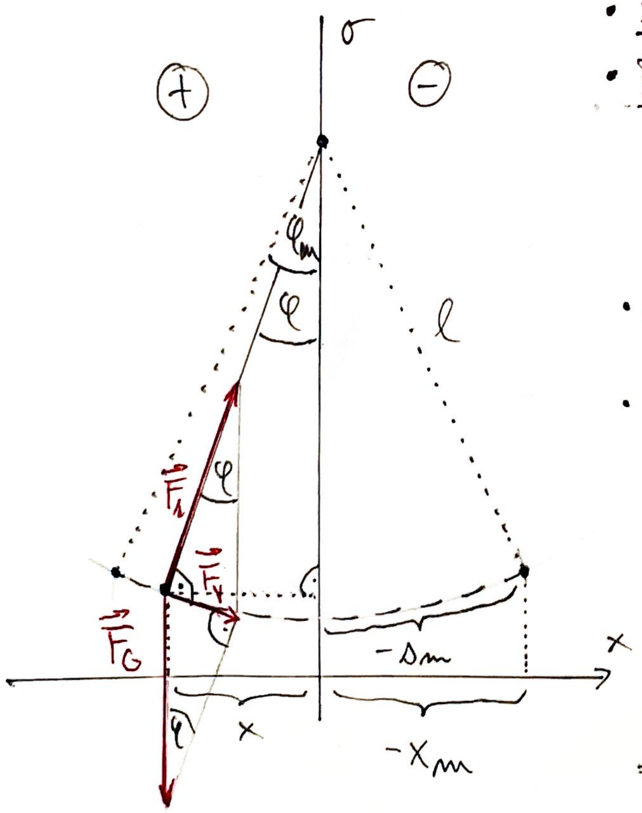
→ těleso je zavěšené na vlákně o délce l, v klidu v rovnovážné poloze
→ vychýlím ho o úhel φ_m ⇒ těleso začne kmitat (ne harmonicky)
→ vlákno je dokonale nepružné, zanedbáváme veškeré ztráty energie

- <u>Okamžitá výchylka</u> – φ
- <u>Amplituda výchylky</u> – φ_m → pokud jsme kyvadlo vychýlili o φ_m, tak kmitá s touto amplitudou okamžité výchylky
- <u>Okamžitá vzdálenost</u> – x
  → kolmá vzdálenost od osy kyvadla o
- <u>Okamžitý oblouk</u> – s → $s = \varphi \cdot l$ – (l = poloměr)
  → délka oblouku, kterou opsalo kyvadlo, se začátkem v rovnovážné poloze
- <u>Okamžitá rychlost, zrychlení, výsledná síla</u>
  → jejich vektory jsou tečné k oblouku, který opisuje kyvadlo
- <u>Perioda</u> = doba jednoho kmitu = doba dvou kyvů
- <u>Přímost kyvadla</u> – p

$p = \dfrac{F}{x}$ • F = síla, kterou musí.. působit na těleso v tečném směru, aby se vychýlilo do vzdálenosti x od osy kyvadla

$F = p x$

- <u>Výsledná síla</u>: $\vec{F}_v = \vec{F}_t + \vec{F}_G$
  → skládá se ze dvou složek: tíhové síly (F_G) a tahové síly (F_t)
  → vždy míří do rovnovážné polohy



- <u>Znaménková konvence</u>: ⊕ | o ⊖ ← →
- <u>Počátek měření času</u>
  → čas začínáme měřit v okamžiku, kdy těleso opouští r. polohu a míří doleva

- $\sin(\varphi) = \dfrac{F_v}{F_G}$
- $\sin(\varphi) = \dfrac{x}{l}$

} $\vec{F}_v$ má opačný směr než $\vec{x}, \vec{\varphi}$
↳ znaménková konvence

$$\Rightarrow \vec{F}_v = -m \cdot g \cdot \frac{\vec{x}}{l} = -\frac{m \cdot g}{l}\vec{x}$$

→ pokud bych to těleso tam chtěl udržet, tak na ně budu působit stejně, opačným směrem

$$\vec{F} = -\vec{F}_v = \frac{m \cdot g}{l}\vec{x} \Rightarrow F = \frac{m \cdot g}{l}x \Leftrightarrow p = \frac{m \cdot g}{l}$$

$$\Rightarrow p = \frac{m \cdot g}{l} \Rightarrow F_v = -p x = -m \cdot g \sin(\varphi)$$

• Diferenciální rovnice přesně popisující pohyb kyvadla

$a = \frac{dv}{dt} \wedge v = \omega \cdot l \Rightarrow a = l \cdot \frac{d\omega}{dt} \wedge \omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow a = l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = l \cdot \ddot{\varphi}$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow F_v = -m \cdot g \sin(\varphi) \\ 2.NPZ: F_v = m \cdot a = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \end{array}\right\} -g\sin(\varphi) = l \cdot \ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin(\varphi) = 0$

• Aproximace pohybu kyvadla pro malé φ_m

→ pro $\varphi_m < \frac{\pi}{6}$ je $\sin(\varphi) \doteq \varphi$ s odchylkou $0 < 5\%$ $\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi \doteq 0$

→ co vím o $\varphi(t)$: max. hodnota $= \varphi_m$
$\rightarrow t = 0, \frac{T}{2} \Rightarrow \varphi = 0$
$\rightarrow t = \frac{T}{4} \Rightarrow \varphi = \varphi_m$
$\rightarrow t = \frac{3}{4}T \Rightarrow \varphi = -\varphi_m$

odhad: $\varphi = \varphi_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
$\Rightarrow \dot{\varphi} = \varphi_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \frac{2\pi}{T}$
$\Rightarrow \ddot{\varphi} = -\varphi_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = -\varphi \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

⇒ vyzkouším: $-\varphi \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \frac{g}{l}\varphi = 0$

$\varphi\left[\frac{g}{l} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right] = 0 \rightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow$ kyvadlo je v rovn. poloze

$\Rightarrow \frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow \varphi = \varphi_m \cdot \sin(\omega t) \wedge F_v = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot x = -m \cdot \omega^2 x \Rightarrow F_v = -m \cdot \omega^2 x$

→ Kinematika

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a = l \cdot \ddot{\varphi} = -l \cdot \omega^2 \cdot \varphi = -l \cdot \frac{g}{l} \cdot \varphi = -g\varphi \\ a = \frac{1}{m} \cdot F_v = -\omega^2 x \end{array}\right\} a = -l\omega^2\varphi = -g\varphi = -\omega^2 x$

• $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow v = \int a\,dt$

$v = \int -l\omega^2\varphi_m \cdot \sin(\omega t)\,dt = -l\omega^2\varphi_m \cdot \int \sin(\omega t)\,dt =$
$= -l\omega^2\varphi_m \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + C = l\omega\varphi_m \cdot \cos(\omega t) + C$

⇒ levý extrém $(t = \frac{1}{4}T)$: $v = 0 = l\omega\varphi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{4}T\right) + C$
$0 = l\omega\varphi_m \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow v = l \cdot \omega \cdot \varphi_m \cdot \cos(\omega t)$

• $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt \Rightarrow s = \int v\,dt$

$s = l\omega\varphi_m \int \cos(\omega t) = l \cdot \omega\varphi_m \cdot \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + C = l \cdot \varphi + C$

$s = \varphi \cdot l$
$\Rightarrow s_m = \varphi_m \cdot l$

⇒ Počátek $(t=0)$: $s = 0 = l \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow s = s_m \cdot \sin(\omega t) = l \cdot \varphi \\ x = l \cdot \sin(\varphi) \doteq l \cdot \varphi \end{array}\right\} s \doteq x \Rightarrow x = x_m \cdot \sin(\omega t)$

→ Energie kyvadla

• $E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot l^2 \omega^2 \varphi_m^2 \cos^2(\omega t)$ $\wedge$ $k = \frac{m \cdot g}{l} = m \cdot \omega^2$

$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t)$ $\wedge$ $l \cdot \varphi_m = s_m = x_m$

$\Rightarrow E_{K_m} = \frac{1}{2} k x_m^2$ – v r. poloze, v extrémech nulová

• Potenciální energie

→ největší v extrémech, nulová v r. poloze

→ označme potenciální energii kyvadla ve vzdálenosti x od osy jako $E_p(x)$

⇒ těleso je v rovnovážné poloze

→ má rychlost v_m a kinetickou energii E_K

⇒ výsledná síla $F_v = -kx$ práci spotřebovává a E_K se mění na E_p, těleso se vychýlilo do vzdálenosti x od osy kyvadla.

→ urazilo dráhu $s = x$

$\Rightarrow -W = \Delta E_p = E_p(x) - E_p(0) = E_p(x)$

$$\Rightarrow E_p = -W = -\int_0^s F_v \, ds = -\int_0^x -kx \, dx = k \int_0^x x \, dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) \quad \Rightarrow E_{pm} = \frac{1}{2} k x_m^2$$

• Celková mechanická energie

$E = E_p + E_K = \frac{1}{2} k x_m^2$

- **Shrnutí vzorců pro kyvadlo pro malé φ_m**

1) $\varphi = \varphi_m \cdot \sin(\omega t)$

2) $x = x_m \cdot \sin(\omega t) = \varphi \cdot l \Rightarrow x_m = \varphi_m \cdot l$; $x = s$

3) $v = \omega l \cdot \varphi_m \cdot \cos(\omega t) = \omega x_m \cdot \cos(\omega t)$

4) $a = -l\omega^2\varphi = -\omega^2 x = -g\varphi$

5) $F_v = -k x = -m\omega^2 x = -mg\varphi$

6) $E_k = \frac{1}{2} \cdot k x_m^2 \cos^2(\omega t)$

7) $E_p = \frac{1}{2} k x_m^2 \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} k x^2$

8) $E = \frac{1}{2} k x_m^2$

9) $k = \frac{m \cdot g}{l} = m\omega^2 \wedge \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

k = přímost kyvadla

l = délka závěsu

- **Porovnání s vzorci pro pružinový oscilátor**

2) $y = y_m \cdot \sin(\omega t)$

3) $v = \omega \cdot y_m \cdot \cos(\omega t)$

4) $a = -\omega^2 y$

5) $F_v = -ky = -m\omega^2 y$

6) $E_k = \frac{1}{2} k y_m^2 \cos^2(\omega t)$

7) $E_p = \frac{1}{2} k \cdot y_m^2 \cdot \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} k y^2$

8) $E = \frac{1}{2} k y_m^2$

9) $k = \frac{m \cdot g}{\Delta l} = m \cdot \omega^2 \wedge \omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

k = tuhost pružiny

Δl = prodloužení pružiny z klidového stavu, po zavěšení tělesa, do rovnovážné polohy