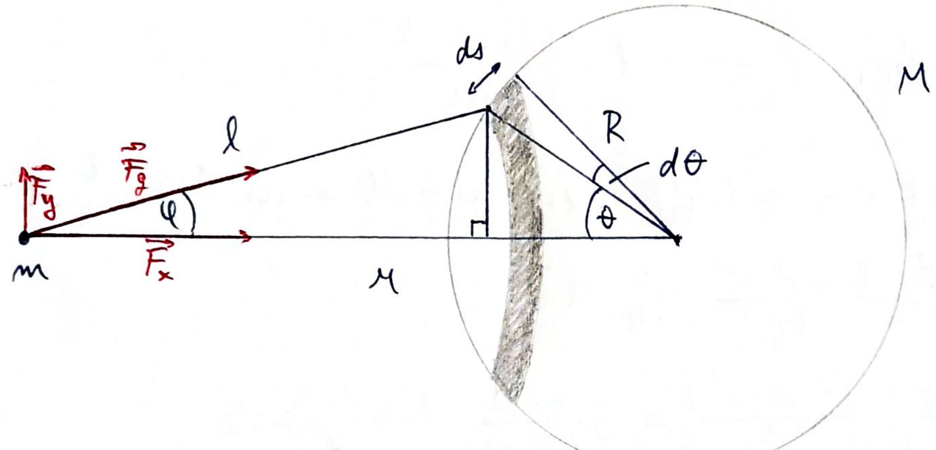
- Newtonova věta o skořápce

1) Sféricky symetrické těleso působí na vnější objekty gravitačně, jako by veškerá jeho hmota byla soustředěna v jeho středu

2) Pokud je těleso sféricky symetrická skořápka (tj. dutá koule), potom je výsledná gravitační síla působící na objekty uvnitř této skořápky nulová, bez ohledu na umístění objektu ve skořápce.

- Důkaz první části

→ Větu nám stačí DŮNO dokázat pro kulovou plochu.



- poloměr kulové plochy $= R$
- hmotnost kulové plochy $= M$
- hmotnost bodu $= m$
- vzdálenost bodu od $S = r$
- plošná hustota kulové plochy $= \sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$

→ díky vektorové povaze $\vec{F_g}$ se složky $\vec{F_y}$ vzájemně vyruší

$$dF_x = dF_g \cdot \cos\varphi = G \cdot \frac{m\,dM}{l^2}\cos\varphi \quad ; \quad dM = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot 2\pi(R\sin\theta)\,ds = \sigma \cdot 2\pi R\sin\theta \cdot R\,d\theta$$

$$dF_x = \frac{Gm}{l^2}\sigma \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta \cos\varphi$$

- $R^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{l^2+r^2-R^2}{2lr}$

- $l^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta \Rightarrow 2l\,dl = -2rR(-\sin\theta)d\theta \Rightarrow \sin\theta\, d\theta = \frac{l}{rR}dl$

$$dF_x = \frac{Gm\sigma 2\pi R^2}{l^2} \cdot \frac{l^2+r^2-R^2}{2lr} \cdot \frac{l}{rR}dl = \sigma \cdot \frac{Gm\pi R(l^2+r^2-R^2)}{l^2r^2}dl$$

$$dF_x = \frac{M}{4\pi R^2} \cdot \frac{Gm\pi R(l^2+r^2-R^2)}{l^2r^2}dl = \frac{G\,mM}{4Rr^2} \cdot \frac{l^2+r^2-R^2}{l^2}dl$$

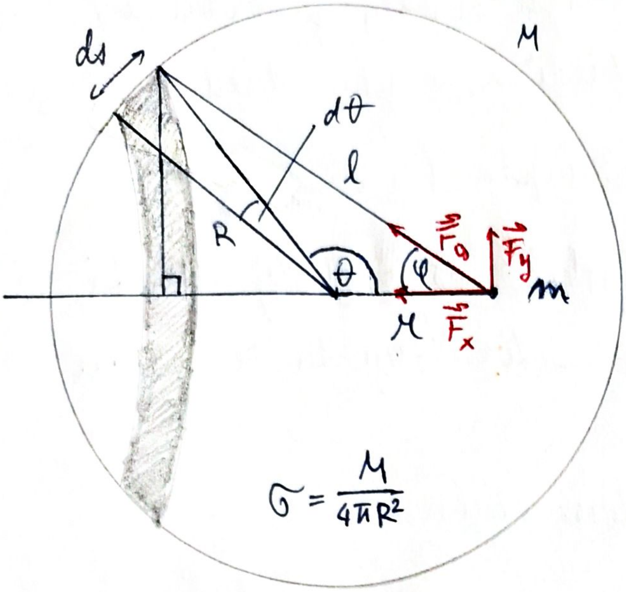
$$\Rightarrow F_x = G \cdot \frac{mM}{4Rr^2}\int_{r-R}^{r+R}\frac{l^2+r^2-R^2}{l^2}dl = G\frac{mM}{4Rr^2}\left[l - \frac{r^2}{l} + \frac{R^2}{l}\right]_{r-R}^{r+R} = G\frac{mM}{4Rr^2}\overbrace{\left[\frac{l^2-r^2+R^2}{l}\right]_{r-R}^{r+R}}^{k}$$

- $k = \frac{r^2+2rR+R^2-r^2+R^2}{r+R} - \frac{r^2-2rR+R^2-r^2+R^2}{r-R} = \frac{2rR+2R^2}{r+R} + \frac{2rR-2R^2}{r-R} = 2R\left(\frac{r+R}{r+R} + \frac{r-R}{r-R}\right)$

$$\Rightarrow F_x = G\frac{mM}{4Rr^2} \cdot 4R = \boxed{G \cdot \frac{mM}{r^2}}$$

▨

→ Důkaz druhé části



$$\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$$

→ díky vektorové povaze $\vec{F}_g$ se složky $\vec{F}_y$ vzájemně vyruší

$$dF_x = dF\cdot\cos\varphi = G\frac{m\,dM}{l^2}\cos\varphi$$

$$dM = \sigma\, dS = \sigma\cdot 2\pi\left(R\sin(\pi-\theta)\right)\cdot ds$$

$$= \sigma\cdot 2\pi R\sin\theta\, R\, d\theta$$

$$dF_x = \frac{Gm}{l^2}\cdot\sigma\, 2\pi R^2\sin\theta\, d\theta\cos\varphi$$

- $R^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{l^2+r^2-R^2}{2lr}$

- $l^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta \Rightarrow 2l\,dl = 2rR\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \sin\theta\, d\theta = \dfrac{l}{rR}dl$

$$\Rightarrow dF_x = \sigma\cdot\frac{Gm\,2\pi R^2}{l^2}\cdot\frac{l^2+r^2-R^2}{2lr}\cdot\frac{l}{rR}dl$$

$$dF_x = \frac{M}{4\pi R^2}\cdot\frac{Gm\pi R(l^2+r^2-R^2)}{l^2r^2} = G\frac{mM}{4Rr^2}\cdot\frac{l^2+r^2-R^2}{l^2}dl$$

$$\Rightarrow F_x = G\frac{mM}{4Rr^2}\int_{R-r}^{R+r}\frac{l^2+r^2-R^2}{l^2}dl = G\frac{mM}{4Rr^2}\underbrace{\left[l - \frac{r^2}{l} + \frac{R^2}{l}\right]_{R-r}^{R+r}}_{k}$$

- $k = \dfrac{R^2+2rR+r^2-r^2+R^2}{R+r} - \dfrac{R^2-2rR+r^2-r^2+R^2}{R-r} =$

$$= \frac{2R^2+2rR}{R+r} - \frac{2R^2-2rR}{R-r} = 2R\left(\frac{R+r}{R+r} - \frac{R-r}{R-r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x = 0}$$

▨