• **Skalární součin**

Def: Skalární součin na v.p. V nad $\mathbb{C}$ je zobrazení $V\times V \to \mathbb{C}$ splňující:
$u, v \mapsto \langle u|v\rangle$

- $\forall u\in V: \langle u|u\rangle \in \mathbb{R}^+_0$
- $\forall u\in V: \langle u|u\rangle = 0 \iff u = 0$
- $\forall u,v\in V: \langle v|u\rangle = \overline{\langle u|v\rangle}$
- $\forall u,v,w\in V: \langle u+v|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$
- $\forall u\in V, \forall a\in \mathbb{C}: \langle au|v\rangle = a\langle u|v\rangle$

→ skalární součin na V nad $\mathbb{R}$ je zobrazení do $\mathbb{R}$
- $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle$ ve 3. axiomu
- $a\in\mathbb{R}$ v posledním axiomu

Příklady

- standardní s.s. na $\mathbb{R}^n$: $\langle u|v\rangle = \sum u_i v_i = v^T u$
- standardní s.s. na $\mathbb{C}^n$: $\langle u|v\rangle = \sum u_i \overline{v_i} = v^H u$
- s.s. na $\mathbb{R}^n$ určený regulární A: $\langle u|v\rangle = v^T A^T A u$
- s.s. na v.p. reálných polynomů na $[a,b]$: $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

* Hermitovská trans.

$A^H_{ij} = \overline{a_{ji}}$

$(AB)^H = B^H A^H$

Vlastnosti:

- $\langle u|v+w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$ ∵ $\langle u|v+w\rangle = \overline{\langle v+w|u\rangle} = \overline{\langle v|u\rangle} + \overline{\langle w|u\rangle} = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$
- $\langle u|av\rangle = \bar{a}\langle u|v\rangle$ ∵ $\langle u|av\rangle = \overline{\langle av|u\rangle} = \overline{a\langle v|u\rangle} = \bar{a}\langle u|v\rangle$
- $\langle au|au\rangle = a\bar{a}\langle u|u\rangle = |a|^2\langle u|u\rangle$
- $\left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{l} b_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} a_i \overline{b_j}\langle u_i|v_j\rangle$

$\|a\cdot u\| = |a|\cdot\|u\|$

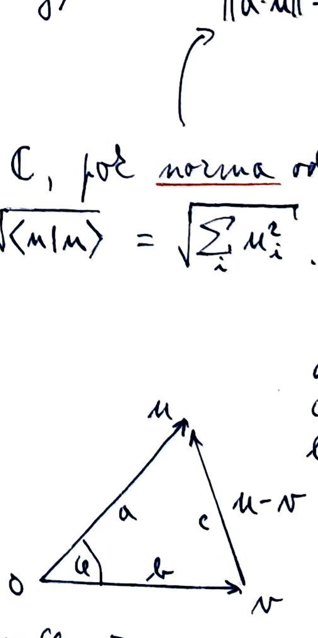
• **Norma**

Def: Je-li V prostor se skalárním součinem $V\times V\to\mathbb{C}$, pak norma od něj odvozená je zobrazení $V\to\mathbb{R}^+_0$, $u\mapsto \|u\| := \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{\sum_i u_i^2}$.

Geometrická interpretace v euklidovském $\mathbb{R}^n$

- $\|u\|$ → délka u
- $\|u-v\|$ → vzdálenost bodů u a v
- $\langle u|v\rangle = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\varphi$ → úhel mezi u a v

$a = \|u\|$
$c = \|u-v\|$
$b = \|v\|$



Dk: Cosinová věta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

1) $\langle u-v|u-v\rangle = \langle u|u\rangle + \langle v|v\rangle - 2\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\varphi$

2) $\langle u-v|u-v\rangle = \langle u|u\rangle + \langle v|v\rangle - \langle u|v\rangle - \langle v|u\rangle$

$\Rightarrow \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos\varphi = \langle u|v\rangle$

- <u>Cauchy-Schwarzova nerovnost</u>

<u>Věta</u>: Sk. s. ve v.p. V nad $\mathbb{C}$ splňuje:

$$\forall u,v \in V: \ |\langle u|v\rangle| \leq \sqrt{\langle u|u\rangle\langle v|v\rangle} = \|u\|\cdot\|v\|$$

<u>Dk</u>: Búno $u,v \neq 0$ jinak $0 \leq 0$.

$$\forall a\in\mathbb{C}: \ 0 \leq \|u+av\|^2 = \langle u+av|u+av\rangle = \langle u|u\rangle + a\langle u|v\rangle + \underbrace{a\langle v|u\rangle + a\bar{a}\langle v|v\rangle}$$

↳ zvolíme $a = -\frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle}$ $\Rightarrow$ $0 \leq \langle u|u\rangle - \frac{\langle v|u\rangle}{\langle v|v\rangle}\langle u|v\rangle + 0$

$\Rightarrow$ $\langle u|v\rangle\langle v|u\rangle \leq \langle u|u\rangle\langle v|v\rangle$ ... platí $a\bar{a} = |a|^2$

$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2$ ■

<u>Důsledek</u>: <u>Nerovnost</u> mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.

Pro $\forall u \in \mathbb{R}^n$: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$.

<u>Dk</u>: Zvolíme $v = (1,1,\dots 1)^T$ a použijeme C-S nerovnost pro s.s. na $\mathbb{R}$:

$$\sum_i u_i = \langle u|v\rangle \leq |\langle u|v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\| = \sqrt{\sum_i u_i^2}\cdot\sqrt{n}$$ ■

<u>Tvrzení</u>: Každá norma splňuje <u>Δ-nerovnost</u> $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$.

<u>Dk</u>: $\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v|u+v\rangle} = \sqrt{\langle u|u\rangle + \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle + \langle v|v\rangle} \overset{*}{\leq}$

$\leq \sqrt{\langle u|u\rangle + 2|\langle u|v\rangle| + \langle v|v\rangle} \leq \sqrt{\|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2} = \|u\| + \|v\|$ ■

* $\langle u|v\rangle = a+bi$
$\langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle = 2a$
$2|\langle u|v\rangle| = 2\sqrt{a^2+b^2}$
✓

- <u>Kolmost</u>

<u>Def</u>: Vektory u,v z prostoru se s.s. jsou <u>kolmé</u> $u \perp v \equiv \langle u|v\rangle = 0$.

<u>Pozorování</u>: Množina netriviálních vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislá.

<u>Dk</u>: Sporem: $u_0,\dots u_k$ jsou kolmé a l. nz $\Rightarrow$ $\exists u_r$ (búno $r=0$) $u_0 = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$

$$0 \neq \langle u_0|u_0\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \Big| u_0\right\rangle = \sum_{i=1}^{k} a_i \langle u_i|u_0\rangle = \sum a_i \cdot 0 = 0$$ ↯ ■

<u>Def</u>: Množina vektorů $\{v_1,\dots v_n\}$ je <u>ortogonální systém</u> $\equiv$ $\forall i,j: v_i \perp v_j$.

Množina vektorů $\{v_1,\dots v_n\}$ je <u>ortonormální systém</u> $\equiv$ $\forall i\neq j: v_i \perp v_j \wedge \|v_i\| = 1$.

<u>Def</u>: Báze $Z = \{v_1,\dots v_n\}$ prostoru V se s.s. je <u>ortonormální</u> $\equiv$ tvoří ortonorm. systém.

<u>Def</u>: Matice A je <u>unitární</u> $\equiv$ $A^H A = I_n \iff A^H = A^{-1}$.

<u>Pozorování</u>: Matice, jejíž sloupce jsou vektory ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ (vzhledem ke std. s.s.) je unitární.

$$M = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \overline{v_2} \\ \overline{v_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & | & v_2 & | & v_3 \end{pmatrix}$$

$M_{ii} = \langle v_i|v_i\rangle = 1$

$M_{i\neq j} = \langle v_j|v_i\rangle = 0$

$A^H A = I_n \wedge B^H B = I_n$

$(AB)^H(AB) = B^H A^H A B = B^H B = I_n$

- <u>Fourierovy koeficienty</u>

<u>Věta</u>: Nechť $Z = \{z_1, \dots z_n\}$ je ortonormální báze prostoru V.

$\iff \forall u \in V: \; u = \langle u|z_1\rangle z_1 + \dots + \langle u|z_n\rangle z_n = \sum_i \langle u|z_i\rangle z_i.$

$\langle u|z_i\rangle$ se nazývají F. koeficienty

<u>Dk</u>: $u = \sum_i a_i z_i \;\Rightarrow$ chci aby $a_j = \langle u|z_j\rangle$

$$\langle u|z_j\rangle = \left\langle \sum_i a_i z_i \middle| z_j \right\rangle = \sum_i a_i \langle z_i|z_j\rangle = a_j \quad \because \langle z_j|z_j\rangle = 1, \; \langle z_{i\neq j}|z_j\rangle = 0 \quad \blacksquare$$

<u>Důsledek</u>: <u>vektor souřadnic</u> $[u]_Z = (\langle u|z_1\rangle, \langle u|z_2\rangle, \dots \langle u|z_n\rangle)^T$.

<u>Věta</u>: Nechť $Z = \{z_1, \dots z_n\}$ je <u>ortonormální</u> báze prostoru V

$\iff \forall u, v \in V: \; \langle u|v\rangle = v^H u = [v]_Z^H [u]_Z.$

<u>Dk</u>:

$$\langle u|v\rangle = \left\langle \sum_i \langle u|z_i\rangle z_i \middle| \sum_j \langle v|z_j\rangle z_j \right\rangle =$$

$$= \sum_i \sum_j \langle u|z_i\rangle \overline{\langle v|z_j\rangle} \underbrace{\langle z_i|z_j\rangle}_{\substack{=1 \iff j=i \\ =0 \iff j\neq i}} = \sum_i \langle u|z_i\rangle \overline{\langle v|z_i\rangle} = [v]_Z^H [u]_Z \quad \blacksquare$$

- <u>Ortogonální projekce</u>

<u>Def</u>: Nechť W je prostor se s.s. a V je jeho podprostor s ortonormální bází $Z = \{z_1, \dots z_k\}$.
<u>Ortogonální projekce</u> W na V je zobrazení $p_Z: W \to V$ definované

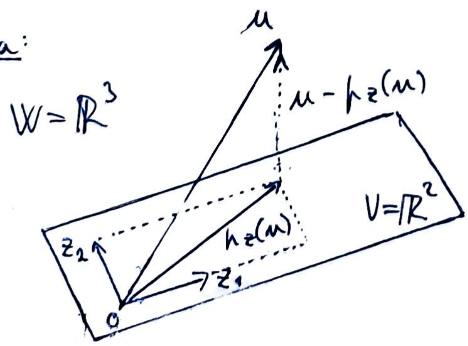
$$p_Z(u) := \sum_{i=1}^{k} \langle u|z_i\rangle z_i.$$

<u>Pozorování</u>: Nyní bázi V $\{z_1, \dots z_k\}$ rozšířím na ortn. bázi W $\{z_1, \dots z_n\}$.

$$\Rightarrow \; u = \underbrace{\langle u|z_1\rangle z_1 + \dots + \langle u|z_k\rangle z_k}_{p_Z(u)} + \underbrace{\langle u|z_{k+1}\rangle z_{k+1} + \dots + \langle u|z_n\rangle z_n}_{u - p_Z(u)}.$$

$= p_{Z^\perp}(u) \to \mathcal{L}\{z_{k+1}, \dots z_n\} = V^\perp$

<u>Ukázka</u>:



<u>Důsledek</u>: $\exists$ matice M taková, že
t. ž. $\; A u = p_Z(u)$.
Nazývá se matice projekce

<u>Pozorování</u>: Ortogonální projekce je <u>lineární zobrazení</u>.

<u>Dk</u>: $p_Z(a u) = \sum_i \langle au|z_i\rangle z_i = a \sum_i \langle u|z_i\rangle z_i = a \cdot p_Z(u)$

$p_Z(u+v) = \sum_i \langle u+v|z_i\rangle z_i = \sum_i \langle u|z_i\rangle z_i + \sum_i \langle v|z_i\rangle z_i = p_Z(u) + p_Z(v) \quad \blacksquare$

Značení: Kolmost na množinu. $u \perp Z \equiv \forall z \in Z: u \perp z$.

Lemma: Nechť p_Z je o. projekce W na V, potom $u - p_Z(u) \perp Z \Rightarrow u - p_Z(u) \perp V$.

Dk: $\langle u - p_Z(u) \mid z_j \rangle = \langle u - \sum_{i=1}^{k} \langle u \mid z_i \rangle z_i \mid z_j \rangle = \langle u \mid z_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle u \mid z_i \rangle \langle z_i \mid z_j \rangle$

$$= \langle u \mid z_j \rangle - \langle u \mid z_j \rangle \langle z_j \mid z_j \rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Pozorování: Ten vektor $v \in V = \text{span}(Z)$, který minimalizuje $\|u - v\|$ je $p_Z(u)$.

Dk: Pro $v \in V$, $v \neq p_Z(u)$ definujeme $a := u - p_Z(u)$, $b := p_Z(u) - v \neq 0$

$$\Rightarrow \|u - v\| = \|a + b\| = \sqrt{\langle a+b \mid a+b \rangle} = \sqrt{\langle a \mid a \rangle + \langle a \mid b \rangle + \langle b \mid a \rangle + \langle b \mid b \rangle} \quad \underline{\underline{a \perp b}}$$

$$= \sqrt{\langle a \mid a \rangle + \langle b \mid b \rangle} \overset{b \neq 0}{>} \sqrt{\langle a \mid a \rangle} = \|a\| = \|u - p_Z(u)\| \qquad \blacksquare$$

Důsledek: Zobrazení p_Z nezávisí na volbě báze Z.

- **Metoda nejmenších čtverců**

→ problém: $Ax = b$ nemá řešení $\iff b \notin S(A)$

⇒ neexistuje x t.ž. to l.k. A zobrazí na b

⇒ najdu $b' \in S(A)$ nejblíže b ⇒ chci minimalizovat $\|b - b'\|$

⇒ b' = projekce b do $S(A)$

→ výpočet

1, ortonormalizuji $S(A)$ ⇒ $b' = p_{S(A)}(b)$ ⇒ vyřeším $Ax = b'$

2) namísto $Ax = b'$ vyřešit ekvivalentní $A^T A x = A^T b$

Dk: $b' = p_{S(A)}(b) \iff b - b' \perp S(A)$

$S(A) = R(A^T) \Rightarrow (S(A))^\perp = (R(A^T))^\perp = \ker(A^T)$

$\Bigg\}\ b - b' \in \ker(A^T) \iff A^T(b - b') = 0$

$\iff A^T(b - Ax) = 0 \iff A^T b = A^T A x$ $\blacksquare$

- **Gram-Schmidtova ortogonalizace**

→ algoritmus pro převod báze $(x_1, x_2, \dots x_n)$ prostoru V na ortonormální bázi $(z_1, \dots z_n)$

1. Pro $k = 1, \dots n$:
2. $y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_i \mid z_i \rangle z_i$
3. $z_k = \frac{1}{\|y_k\|} y_k$

Mám $z_1, \dots z_{k-1}$ ⇒ chci z_k, mám x_k

$$x_k = \underbrace{\langle x_k \mid z_1 \rangle z_1 + \dots + \langle x_k \mid z_{k-1} \rangle z_{k-1}}_{\text{projekce } x_k \text{ do } \{z_1, \dots z_{k-1}\}} + \underbrace{\langle x_k \mid z_k \rangle z_k}_{y_k = x_k - p(x_k)}$$

Správnost:

2: $y_k \perp z_j$ pro $\forall j < k \Rightarrow z_i \perp z_j$ pro $i \neq j$

3: $\|z_k\| = \left\| \frac{1}{\|y_k\|} y_k \right\| = \frac{1}{\|y_k\|} \|y_k\| = 1$

Lemma o výměně: $\text{span}\{z_1, \dots z_{k-1}, x_k\} = \text{span}\{z_1, \dots z_{k-1}, y_k\} = \text{span}\{z_1, \dots z_{k-1}, z_k\}$

- **Lineární zobrazení zachovávající s. s.**

Def: Lineární zobrazení $f: U \to V$ je izometrie $\equiv \forall u, v \in U: \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle$

Věta: Lineární zobrazení $f: U \to V$ je izometrie $\iff \forall u \in U: \|u\| = \|f(u)\|$

$\Rightarrow$ stačí aby f zachovávalo související normu

Dk: $\Rightarrow$ triviální

$\Leftarrow$: $\|u+av\|^2 = \langle u+av | u+av \rangle = \|u\|^2 + a\langle v|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle + a\bar{a}\|v\|^2$

$$\|f(u+av)\|^2 = \langle f(u+av) | f(u+av) \rangle = \|f(u)\|^2 + a\langle f(v)|f(u)\rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v)\rangle + a\bar{a}\|f(v)\|^2$$

$$\Rightarrow \quad a\langle v|u\rangle + \bar{a}\langle u|v\rangle = a\langle f(v)|f(u)\rangle + \bar{a}\langle f(u)|f(v)\rangle$$

$$\left.\begin{array}{ll} a=1: & \langle v|u\rangle + \langle u|v\rangle = \langle f(v)|f(u)\rangle + \langle f(u)|f(v)\rangle \\ a=i: & \langle v|u\rangle - \langle u|v\rangle = \langle f(v)|f(u)\rangle - \langle f(u)|f(v)\rangle \end{array}\right\} \langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle$$

- **Maticová charakterizace bijektivních izometrií**

Věta: Nechť U a V jsou prostory se s.s. konečné dimenze a X, Y jejich ortonormální báze. Lineární zobrazení $f: U \to V$ je bijektivní izometrie $\iff {}_Y[f]_X$ je unitární.

Dk: Lineární bijekce implikuje stejné dimenze a naopak.

- X je ortonorm. $\iff \langle u|v\rangle = v^H u = [v]_X^H [u]_X$
- Y je ortonorm. $\iff \langle f(u)|f(v)\rangle = [f(v)]_Y^H [f(u)]_Y = ({}_Y[f]_X [v]_X)^H \cdot ({}_Y[f]_X [u]_X)$
$$= [v]_X^H \left({}_Y[f]_X^H \; {}_Y[f]_X\right) \cdot [u]_X$$

$\Leftarrow$: ${}_Y[f]_X^H \; {}_Y[f]_X = I_n \Rightarrow \langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle$

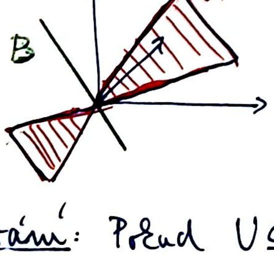
$\Rightarrow$: $\langle u|v\rangle = \langle f(u)|f(v)\rangle \Rightarrow [v_X]^H [u]_X = [v]_X^H \left({}_Y[f]_X^H \; {}_Y[f]_X\right)[u]_X \Rightarrow {}_Y[f]_X^H \; {}_Y[f]_X = I_n$ ∎

- **Ortogonální doplněk**

Def: Ortogonální doplněk podmnožiny $V \subseteq W$ vektorového prostoru se s.s. W je

$$V^\perp \equiv \{u \in W \mid \forall v \in V: u \perp v\}$$

Ukázka:



$W = \mathbb{R}^3$

$A^\perp = B$

$B^\perp = A$

Pozorování: Pokud $U \subseteq V$, pak $V^\perp \subseteq U^\perp$

Dk: $\forall x \in V^\perp: \forall v \in V: x \perp v \Rightarrow \forall u \in U: x \perp u \Rightarrow x \in U^\perp$ ∎

Pozorování: Každý ortogonální doplněk je podprostorem W.

Dk: $\forall u, w \in V^{\perp}, \forall v \in V$:

1, $u \perp v \Rightarrow \langle au | v \rangle = a \langle u | v \rangle = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow au \perp v$

2, $u, w \perp v \Rightarrow \langle u+w | v \rangle = \langle u | v \rangle + \langle w | v \rangle = 0 \Rightarrow u+w \perp v$ ■

Pozorování: Pro jakýkoli podprostor $V \subseteq W$: $V \cap V^{\perp} = \{o\}$

Dk: $\forall u \in V \cap V^{\perp}$: $u \perp u \Rightarrow \langle u | u \rangle = 0 = u = o$ ■

Věta: Pro konečně generovaný W se s.s. a podprostor V platí

1, $(V^{\perp})^{\perp} = V$

2, $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = \dim(W)$

- Ortogonální doplněk a matice

Tvrzení: Pro $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí $(R(A))^{\perp} = \ker(A)$.

Dk: Ukážeme: $\forall u \in R(A), v \in \ker(A)$: $u \perp v$. $\quad r := \operatorname{rank}(A)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, \dots x_r \text{ báze } R(A) \\ y_1, \dots y_{n-r} \text{ báze } \ker(A) \end{array}\right\} \langle u | v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n-r} b_j y_j \right\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \underbrace{\langle x_i | y_j \rangle}_{0} = 0$$

Dk: Zvolíme ortonormální bázi $V \to X$; $X = \{x_1, \dots x_k\}$
Doplníme ji na ortonorm. bázi $W \to Z$
$\to$ ukážeme $\operatorname{span}(Y) = V^{\perp} \to Y = Z \setminus X$; $Y = \{y_1, \dots y_e\}$

1, $\forall u \in \operatorname{span}(X) = V$, $v \in \operatorname{span}(Y)$: $u \perp v \Rightarrow \operatorname{span}(Y) \subseteq V^{\perp}$

2, $\forall w \in V^{\perp}$: $[w]_Z = (\langle w | z_1 \rangle, \dots \langle w | z_n \rangle)^T \wedge \forall x_i \ \langle w | x_i \rangle = 0$

$\Rightarrow w \in \operatorname{span}(Z \setminus X) = \operatorname{span}(Y) \Rightarrow V^{\perp} \subseteq \operatorname{span}(Y)$

$\Rightarrow \dim(V) + \dim(V^{\perp}) = |X| + |Y| = |Z| = \dim(W)$

$\Rightarrow (V^{\perp})^{\perp} = (\operatorname{span}(Y))^{\perp} = \operatorname{span}(Z \setminus Y) = \operatorname{span}(X) = V$ ■

• Příklady:

1) Najdi o. bázi $U = \text{span}\{\underset{x_1}{(1,1,0)^T}, \underset{x_2}{(1,1,1)^T}\}$

$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1$

$x_2 = \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 + \underbrace{\langle x_2 | z_2 \rangle z_2}_{y_2} \Rightarrow y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ báze $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$

• Doplň ji na o. bázi $\mathbb{R}^3$ – bez G-S ortogonalizace

$\rightarrow$ chci y_3 t.ž. $\langle z_1 | y_3 \rangle = 0 \wedge \langle z_2 | y_3 \rangle = 0 \Rightarrow (R(A))^\perp = \ker(A)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = (1,-1,0)^T \Rightarrow z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$

• Urči souřadnice $[(3,2,1)^T]_Z$

$[(3,2,1)^T]_Z = (\langle u | z_1 \rangle, \langle u | z_2 \rangle, \langle u | z_3 \rangle)^T = (\frac{1}{\sqrt{2}} 5, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$

• Spočti projekci $(3,2,1)^T$ do U

$p_{Z'}(u) = \langle u | z_1 \rangle z_1 + \langle u | z_2 \rangle z_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(5,5,2)^T$

2) Najdi o. bázi p. generovaného $(1,1,1,1)^T$, $(4,1,4,1)^T$, $(1,2,3,4)^T$

$\hookrightarrow$ preprocessing $\longrightarrow$

$(1,1,1,1) \rightarrow (4,1,4,1) \rightarrow (1,0,1,0)$; $(1,1,1,1) \rightarrow (1,2,3,4) \rightarrow (0,1,2,3)$

$(0,1,0,1) \leftarrow (1,0,1,0)$, $(0,1,2,3) \rightarrow (0,0,2,2) \rightarrow (0,0,1,1)$

$x_1 = (0,1,0,1)$, $x_2 = (1,0,1,0)$, $x_3 = (0,0,1,1)$

$x_1 \perp x_2$

$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)^T$

$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^T$

$z_3 = \frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^T$

$y_3 = x_3 - \langle x_3 | z_1 \rangle z_1 + \langle x_3 | z_2 \rangle z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\mathbb{C}^3$: $x_1 = (1-i) \cdot \underbrace{(1, i, 1+i)^T}_{x'}$, $x_2 = (1,1,1)^T$ $\rightarrow$ najdi ortonormální bázi

skal. násobek mě nezajímá

$\Rightarrow z_1 = \frac{x'}{\|x'\|} = \frac{1}{2} x'$; $\|x'\|^2 = \langle x' | x' \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot \bar{i} + (1+i)\overline{(1+i)} = 1 + 1 + 2 = 2^2$

$\Rightarrow x_2 = \langle x_2 | z_1 \rangle z_1 + \langle x_2 | z_2 \rangle z_2 \Rightarrow y_2 = x_2 - \langle x_2 | z_1 \rangle z_1$

$\Rightarrow y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \langle x_2 | x' \rangle \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1-i}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ ortogonální doplněk

nad $\mathbb{R}$: $(R(A))^\perp = \ker(A)$

nad $\mathbb{C}$: $\rightarrow$ a já chci w

$\begin{pmatrix} — z_1 — \\ — z_2 — \\ — z_3 — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | \\ \bar{w} \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (R(A))^\perp = \overline{\ker(A)}$

4) Najdi směrnici $p \in \mathbb{R}^3$ přímky procházející počátkem takové, že se body $u = (1,2,3)^T$, $v = (0,3,1)^T$, $w = (8,1,2)^T$ zobrazí při projekci na ni do stejného bodu.

a) najdu rovinu určenou u, v, w $\rightarrow$ p = norm. vektor $(\underbrace{a, b, c}_{\vec{n}}, d)$

b) $z = \frac{p}{\|p\|} = (a, b, c)^T \Rightarrow \langle u|z\rangle z = \langle v|z\rangle z = \langle w|z\rangle z$

$$a + 2b + 3c = 3b + c = 8a + b + 2c$$

$$\begin{aligned} a - b \; 2c &= 0 \\ 7a - b - c &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{(1, 5, 2)^T}}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \quad -5$$

5) Buď $\langle x|y\rangle$ s.s. v $\mathbb{R}^3$ a $\underset{x}{(1,0,1)^T}, \underset{y}{(1,2,0)^T}, \underset{z}{(0,1,1)^T}$ ort. báze. $\langle (3,1,1)^T | (2,1,6)^T \rangle = ?$

$$\left\langle \sum_i a_i z_i \,\middle|\, \sum_j b_j z_j \right\rangle = \sum_i \sum_j a_i b_j \langle z_i | z_j \rangle = \sum_i a_i b_j \quad \leftarrow \text{standardní s.s. !}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= (3,1,1)^T = 2x + y - z \\ v &= (2,1,6)^T = 3x - y + 3z \end{aligned}\right\} \langle u|v\rangle = 6 - 1 - 3 = 2$$

6) Urči vzdálenost $x = (6,6,4,4)^T$ od roviny procházející body $A = (1,1,1,1)^T$, $B = (9,1,1,-1)^T$ $C = (5,-1,3,0)^T$

$\rightarrow$ posunu celou situaci do počátku $\Rightarrow$ ϱ bude prostor

$\Rightarrow$ udělám projekci X do ϱ a určím vzdálenost $\|X - p(x)\|$.

$\varrho = \mathrm{span}(u, v)$

$A' = A - A = (0,0,0,0)$

$B' = B - A = (8,0,0,-2) = u \rightarrow (4,0,0,-1) \rightarrow z_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(4,0,0,-1)^T$

$C' = C - A = (4,-2,2,-1) = v \rightarrow y_2 = v - \langle v|z_1\rangle z_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{17}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,-2,2,0)^T$ $\rightarrow (0,1,-1,0)^T$

$X' = X - A = (5,5,3,3)$

$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T$

$$\Rightarrow p_z(x') = \langle x'|z_1\rangle z_1 + \langle x'|z_2\rangle z_2 = \frac{17}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (4,1,-1,-1)^T$$

$$\Rightarrow d(\varrho, x) = \|x' - p_z(x')\| = \|(1,4,4,4)\| = \sqrt{1+16+16+16} = \underline{\underline{7}}$$

• **Determinanty**

→ Značení: S_n = grupa permutací na $\{1, \dots n\}$

Def: Determinant matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je

$$\det(A) := \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p(i)}$$ → jedu po řádcích a vybírám prvky podle p

Ukázka: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \to p_1 = (1,2) \to +1 \ , \ a \cdot d \\ \to p_2 = (2,1) \to -1 \ , \ b \cdot c \end{array}\right\} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Pro 3x3 → 6 permutací

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

→ $p_1 = (1,2,3) \to a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
$p_2 = (2,3,1) \to a_{12} a_{23} a_{31}$
$p_3 = (3,1,2) \to a_{13} a_{21} a_{32}$
↪ $sgn = +1$

$p_4 = (3,2,1) \to a_{13} a_{22} a_{31}$
$p_5 = (1,3,2) \to a_{11} a_{23} a_{32}$
$p_6 = (2,1,3) \to a_{12} a_{21} a_{33}$
↪ $sgn = -1$

Pozorování: Má-li A nulový řádek, pak $\det(A) = 0$.

Dk: každý součin v definici obsahuje prvek z nulového řádku.

Pozorování: Pro trojúhelníkové matice platí $\det(A) = \pm$ součin prvků na diagonále

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_i a_{ii}$$

v 1. řádku musím a_{11}
v 2. řádku musím a_{22}
⋮
→ $\det(A) = \det(A^T)$

$$\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ a_{n-1\,2} & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_i a_{i,n+1-i}$$

$$\left\{ sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right.$$

Vlastnosti

• $\det(A) = \det(A^T)$ Dk: permutace sečtu v jiném pořadí: $p \in S_n : p(i) = j \iff i = p^{-1}(j)$

$$\Rightarrow \det(A^T) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} \underbrace{(A^T)_{i\,p(i)}}_{a_{p(i)\,i}} = \sum_{p^{-1} \in S_n} sgn(p^{-1}) \prod_{i=1}^{n} a_{j\,p^{-1}(j)} = \det(A)$$ ∎

• přehození sloupců podle $q \in S_n$: $B: b_{ij} = a_{i\,q(j)}$: $\det(B) = sgn(q) \det(A)$

$$\det(B) = \sum_{p \in S_n} sgn(p) \prod_i b_{i\,p(i)} = \sum_{p \in S_n} sgn(q)\, sgn(q)\, sgn(p) \prod_i a_{i\,q(p(i))} =$$

$$= sgn(q) \sum_{p \in S_n} sgn(q \circ p) \prod_i a_{i\,(q\circ p)(i)} = sgn(q) \sum_{r \in S_n} sgn(r) \prod_i a_{i\,r(i)} = sgn(q) \det(A)$$ ∎

$r = q \circ p$ $p \mapsto r$ je bijekce na S_n

• Důsledky

• totéž platí pro přerovnání řádků ← díky $\det(A) = \det(A^T)$

• výměna dvou řádků / sloupců změní znaménko determinantu

• pro matice nad tělesy char $\neq 2$ se dvěma stejnými řádky / sloupci platí

$$\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0, \quad \text{pro char} = 2 \text{ platí } 1 = -1$$

Lemma: Má-li A dva stejné řádky / sloupce, pak $\det(A) = 0$.

Dk: Nechť se k-tý řádek shoduje s l-tým

$\Rightarrow$ pro každou $p \in S_n$ umíme najít $q = p \circ (k, l) \in S_n$, takže

$$\prod_i a_{i p(i)} = \prod_i a_{i q(i)} \quad \& \quad \mathrm{sgn}(p) = -\mathrm{sgn}(q)$$

$\Rightarrow p \mapsto q$ je bijekce na $S_n \Rightarrow$ sčítance v $\det(A)$ spárujeme tak, že se navzájem odečtou ∎

• Linearita determinantu

Věta: Determinant matice je lineárně závislý na každém jejím řádku a sloupci.

$$\begin{vmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ t \cdot \text{~~~~} \\ \text{———} \end{vmatrix} = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \left(t \cdot \prod_i a_{i p(i)} \right) = t \cdot \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_i a_{i p(i)} = t \cdot \begin{vmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{~~~~} \\ \text{———} \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ i: \\ \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{C} \qquad a_{kj} = \begin{cases} b_{ij} + c_{ij}, & k = i \\ b_{kj} = c_{kj}, & k \neq i \end{cases}$$

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) \prod_k a_{k p(k)} = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p)\, a_{i p(i)} \prod_{k \neq i} a_{k p(k)} =$$

$$= \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p)\, b_{i p(i)} \prod_{k \neq i} b_{k p(k)} + \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p)\, c_{i p(i)} \prod_{k \neq i} c_{k p(k)} = \det(B) + \det(C)$$ ∎

Důsledek: Přičtením skalárního násobku řádku / sloupce k jinému se determinant nezmění.

Dk: $$\begin{vmatrix} - a_{i*} + t \cdot a_{j*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - a_{i*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} - a_{j*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix}}_{0} = \begin{vmatrix} - a_{i*} - \\ - a_{j*} - \end{vmatrix}$$ ∎

Důsledek: Je-li A singulární, pak $\det(A) = 0$.

Dk: Závislý řádek lze eliminovat na nulový řádek.

• Výpočet determinantu: Permutace řádků / sloupců, vytýkání konstant.

→ gaussovka podle řádků / sloupců

• Determinant součinu

Věta: Pro libovolné $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ platí $\underline{\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)}$

Dk: BÚNO A i B jsou regulární, jinak $0 = 0$.

$\Rightarrow$ A rozložíme na součin el. matic $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ a ukážeme $\det(EB) = \det(E)\det(B)$ $\Big\}$ indukcí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$\Rightarrow$ pro přičtení i-tého řádku k j-tému: $\det(E) = 1$, $\det(EB) = \det(B)$ ✓
pro vynásobení i-tého řádku $t \neq 0$: $\det(E) = t$, $\det(EB) = t \cdot \det(B)$ ✓ ∎

Důsledky

• $\underline{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$ Dk: $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ ∎

• A je <u>regulární</u> $\iff \det(A) \neq 0$ Dk: $\det(A) = \det(E_1 \cdots E_k) \neq 0$ ∎

• Laplaceův rozvoj

Značení: A^{ij} je podmatice získaná z A odstraněním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta: Pro libovolnou $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a jakýkoli <u>index</u> řádku i platí:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

→ stejný rozvoj lze dělat podle i-tého sloupce

Dk: Rozklad i-tého řádku + linearita:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})^T = a_{i1} e_1^T + a_{i2} e_2^T + \dots + a_{in} e_n^T$$

$$\begin{vmatrix} \hline a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in} \\ \hline \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} \hline 1\ 0 \cdots 0 \\ \hline \end{vmatrix} + a_{i2} \begin{vmatrix} \hline 0\ 1 \cdots 0 \\ \hline \end{vmatrix} + \dots + a_{in} \begin{vmatrix} \hline 0\ 0 \cdots 1 \\ \hline \end{vmatrix}$$

j-tý člen: $$\begin{vmatrix} \hline 0 \dots 0\ 1\ 0 \cdots 0 \\ \hline \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 \dots 0\, 1\, 0 \dots 0 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} 1\ 0 \cdots 0 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1\ 0 \dots 0 \\ \hline \\ \hline \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & A^{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$ ∎

• Determinant matice podmatic

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{A} & & 0 \\ & \boxed{B} & \\ 0 & & \boxed{C} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C)$$

Dk: indukcí z

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$$

tohle z: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

↳ $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(A)$

Adjungovaná matice

Def: Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definujeme adjungovanou matici $\mathrm{adj}(A)$

$$(\mathrm{adj}(A))_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A^{ij})$$

→ faktory L. rozvoje podél i-tého řádku A ukládám do i-tého sloupce adj(A)

Věta: Pro regulární $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ platí $\mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$

Dk: Ukážeme $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$.

- diagonála: $(i\text{-tý řádek } A) \cdot (i\text{-tý sloupec } \mathrm{adj}(A)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) = \det(A)$
- mimo $k \neq i$: $(k\text{-tý řádek } A) \cdot (i\text{-tý sloupec } \mathrm{adj}(A)) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} (-1)^{i+j} \det(A^{ij}) = \det(A') = 0$

  ↳ A' = matice získaná nahrazením i-tého řádku za k-tý ⇒ 2 stejné ř.

Crammerovo pravidlo

↳ původní motivace za determinanty – hledali obecné řešení soustavy l. r.

Věta: Nechť $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je regulární. Pak pro jakékoli $b \in \mathbb{K}^n$ splňuje řešení $Ax = b$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(A_{i \to b})$$

→ $A_{i \to b}$ získáme z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

Ukázka:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot x = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}}_{b} \qquad \det(A_{1 \to b}) = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad \det(A) = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

Dk: Označme $a_1, \dots a_n$ sloupce matice A.

Soustavu $Ax = b$ nyní přepíšeme po sloupcích: $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot a_k = b$

$$\det(A_{i \to b}) = \det(A_{i \to \sum_k x_k a_k}) \overset{*}{=} \sum_k x_k \det(A_{i \to a_k}) = x_i \det(A_{i \to i}) = \underline{x_i \det(A)}$$

$$* \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \left(\sum_k x_k a_k\right) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \sum_k x_k a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & \sum_k x_k a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + x_n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

∎

Dk #2: Všimnu si, že $\det(I_{i \to x}) = x_i$

& $A \cdot I_{i \to x} = A_{i \to b}$

$\Rightarrow \det(A) \cdot \det(I_{i \to x}) = \det(A_{i \to b}) \Rightarrow x_i \cdot \det(A) = \det(A_{i \to b})$

∎

• <u>Obaly množiny v eukleidovském prostoru</u>

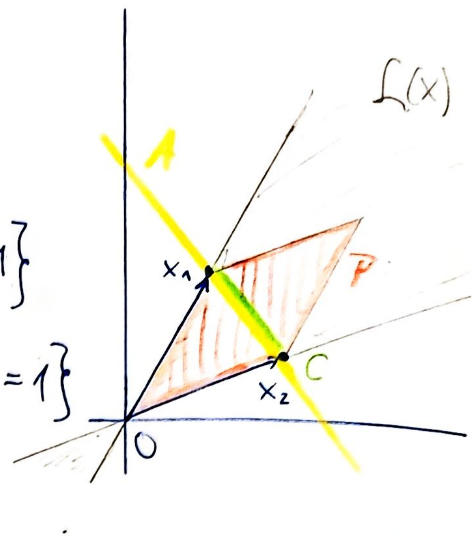
Pro $X=\{x_1,\dots x_k\}\subset\mathbb{R}^n$

1) Lineární obal $LO(X)=\left\{\sum_i a_i x_i \mid a_i\in\mathbb{R}\right\}$

2) Afinní obal $AO(X)=\left\{\sum_i a_i x_i \mid a_i\in\mathbb{R} \;\&\; \sum_i a_i=1\right\}$

3) Konvexní obal $CO(X)=\left\{\sum_i a_i x_i \mid a_i\in[0,1] \;\&\; \sum_i a_i=1\right\}$

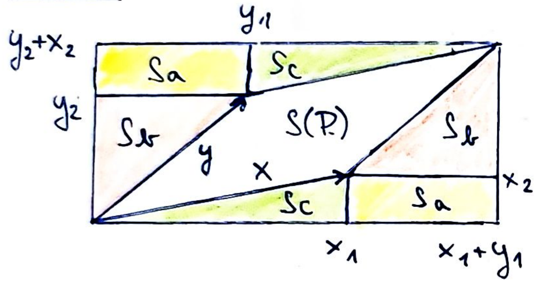
4) Rovnoběžnostěn $P(X)=\left\{\sum_i a_i x_i \mid a_i\in[0,1]\right\}$



• <u>Geometrický význam determinantu</u>

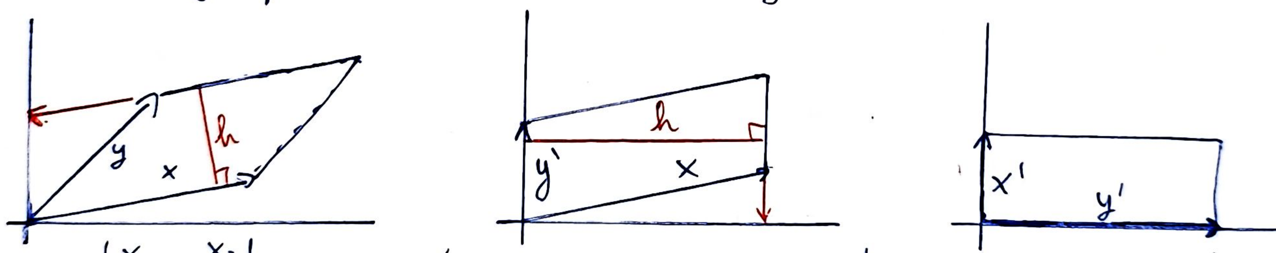
<u>Věta</u>: Pro $X=\{x_1,\dots x_n \mid x_i\in\mathbb{R}^n\}$ je $vol(P(X))=|\det(A)|$, kde $x_1,\dots x_n$ jsou sloupce A.
↳ objem

<u>Ukázka</u>:



$$S(P)=(x_1+y_1)(x_2+y_2)-2(S_a+S_b+S_c)$$
$$=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2-2y_1x_2-y_1y_2-x_1x_2$$
$$=x_1y_2-y_1x_2=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}$$

<u>Dk</u>: Elementární úpravy zachovávají objem.
→ vektory zapíšu do řádků matice, díky $\det(A)=\det(A^T)$



$$\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1+\lambda x_1 & y_2+\lambda x_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ 0 & y_2'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1+0 & x_2+\lambda' y_2'\\ 0 & y_2'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1' & 0\\ 0 & y_2'\end{vmatrix} = S(P)$$

<u>Důsledek</u>: Pro l.z. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ a matici tohoto zobrazení vzhledem k nějaké bázi X platí, že se objem tělesa V po transformaci změní následovně:

$$vol(f(V)) = |\det({}_X[f]_X)|\cdot vol(V)$$

<u>Idea</u>: Rozdělíme V na hyperkrychličky, které se pak zobrazí na rovnoběžnostěny s objemy změněnými faktorem $|\det({}_K[f]_K)|$, protože ${}_K[f]_K$ obsahuje obrazy k.b.

Pro jiné báze: $\det({}_X[f]_X)=\det({}_X[id]_K\,{}_K[f]_K\,{}_K[id]_X)=\det({}_K[f]_K)$
↳ ${}_K[id]_X^{-1}={}_X[id]_K$

■

• **Příklady**

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $H^{-1}=?$ $\rightarrow \operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

2) $$\det\begin{pmatrix}2&0&2&0&-1\\0&3&0&2&0\\2&0&-2&0&2\\0&2&0&3&0\\-2&0&2&0&2\end{pmatrix} = (-1)^{2}\begin{vmatrix}2&-1&2&0&0\\0&0&0&2&3\\2&2&-2&0&0\\0&0&0&3&2\\-2&2&2&0&0\end{vmatrix} = (-1)^{22}\begin{vmatrix}2&-1&2&0&0\\-2&2&2&0&0\\2&2&-2&0&0\\0&0&0&3&2\\0&0&0&2&3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&-1&2\\-2&2&2\\2&2&-2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix} = -32\cdot 5 = -160$$

3) $a=(a_1,\dots a_n)^T,\ b=(b_1,\dots b_n)^T \rightarrow \det(a\cdot b^T)=?$

dva konstantní řádky pro $n\geq 3$

$$\det\begin{pmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}a_1+b_1 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1\\ \vdots & & \vdots\\ a_n-a_{n-1} & \cdots & a_n-a_{n-1}\end{vmatrix} = \begin{cases}a_1+b_1, & n=1\\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2\\ 0, & n\geq 3\end{cases}$$

4) $$\det(A_n) = \overbrace{\begin{vmatrix}3&2&&&\\1&3&2&&\\&1&3&2&\\&&1&\ddots&2\\&&&1&3\end{vmatrix}}^{n} = 3\cdot\overbrace{\begin{vmatrix}3&2&&\\1&3&2&\\&1&3\ddots&\\&&\ddots&2\\&&1&3\end{vmatrix}}^{n-1} - 2\overbrace{\begin{vmatrix}1&2&&\\&3&2&\\&1&3&2\\&&1&3\ddots&\\&&&\ddots&2\\&&&1&3\end{vmatrix}}^{n-1} = 3|A_{n-1}| - 2\overbrace{\begin{vmatrix}1&3&2&\\&1&3&2\\&&1&3\ddots\\&&&\ddots&2\\&&&1&3\end{vmatrix}}^{n-2}$$

$\Rightarrow \det(A_n) = 3\cdot\det(A_{n-1}) - 2\det(A_{n-2})$

$\Rightarrow \det(A_1)=3$, $\det(A_2)=7$ $\Big\}$ $\det(A_3)=15$

$D_n = 2^{n+1}-1 \rightarrow$ indukcí:

$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2} = 3\cdot 2^n - 3 - 2\cdot 2^{n-1} + 2$

$= 2\cdot 2^n - 1 = 2^{n+1}-1$

5) $$\det\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\2&3&\cdots&n&1\\3&\cdots&n&1&2\\\vdots&&&&\vdots\\n&1&2&\cdots&n-1\end{pmatrix} \overset{ř.}{=} \begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&&n\\1&1&1&\cdots&1&(1-n)\\1&1&\cdots&(1-n)&&1\\1&\cdots&(1-n)&&\vdots&1\\\vdots&&&&1&\vdots\\1&(1-n)&1&\cdots&1&1\end{vmatrix} \overset{s.}{=} \begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&(n-1)\\1&0&0&\cdots&(-n)\\1&&&&\\1&&0&&\\\vdots&&&0&\\1&(-n)&&&\end{vmatrix} = \frac{1}{n}\begin{vmatrix}n&1&2&\cdots&(n-1)\\n&&&&(-n)\\n&&&&\\n&&&&\\\vdots&&&&\\n&(-n)&&&\end{vmatrix}$$

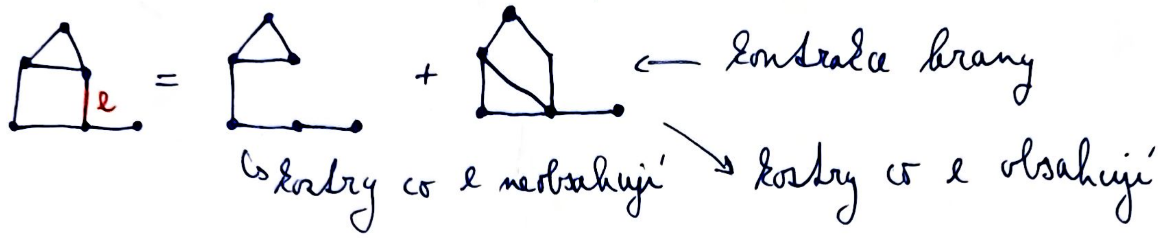
$$= \frac{1}{n}\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&1&2&\cdots&(n-1)\\0&&&&(-n)\\0&&&&\\\vdots&&&&\\0&(-n)&&&\end{vmatrix} = \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\overbrace{\begin{vmatrix}0&&(-n)\\&&\\(-n)&&0\end{vmatrix}}^{n-1} = \frac{1}{2}(n+1)\cdot(-n)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)\,n^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

• Počet koster grafu

$K(G) := \#$ koster grafu G

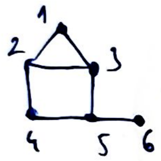
👁 : $K(G) = K(G-e) + K(G \cdot e)$ pro libovolnou hranu e



Def: Laplaceova matice grafu G na $V(G) = \{v_1, \dots v_n\}$ je $L_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ t.ž.:

$$(L_G)_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ -1 & ; i \neq j \wedge v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \end{cases}$$

Ukázka:



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{součet všech řádků / sloupců} = 0$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline L_{C_1} & \\ \hline & L_{C_2} \\ \hline \end{array} \leftarrow \text{2 komponenty}$$

👁 L_G je singulární

👁 G není souvislý $\Rightarrow L^{11}_G$ je singulární ∵ $\exists$ komponenta, ve které neleží v_1
$\Rightarrow \sum$ řádků této komponenty $= 0$
$\Rightarrow$ BÚNO G souvislý

Věta: Pro $|V(G)| \geq 1$ platí $K(G) = \det(L^{11}_G)$.

Vlastnosti $\det(L^{ij})$

$$1. + 2. + 3. + 4. + 5. + 6. = 0$$

$$\det L^{11}_G = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2.+3.+4.+5.+6. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1. \\ 3. \\ 4. \\ 5. \\ 6. \end{vmatrix} = -\det L^{21}_G$$

$$\det L^{21}_G = |2. 3. 4. 5. 6.| = |-1. 3. 4. 5. 6.| = -|1. 3. 4. 5. 6.| = -\det L^{22}_G$$

Důsledek: $\forall i, j$ $\det L^{ij}_G = (-1)^{i+j} \det L^{11}_G$.

Isomorfní grafy: $G \cong G' \Rightarrow \pi(v_1, \dots v_n) = (v_1', \dots v_n')$

$\Rightarrow$ v L_G se jenom zpermutují řádky i sloupce podle π

$\Rightarrow \exists i : \det L^{11}_G = \det L^{ii}_{G'} = \det L^{11}_{G'}$ $\rightarrow i = \pi(1)$

↳ $L^{11}_G, L^{ii}_{G'}$ se liší pouze permutací ř. i s. podle π $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\pi) = 1$

Dk: BÚNO G souvislý. Indukcí podle $m := |E(G)|$.

1) $m=1$: •—• $K(G)=1$, $L_G = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det L^{11}_G = 1$ ✓

2) $m-1 \to m$: Zvolím libovolnou $e \in E_G$, BÚNO $e = v_1 v_2$ ↙ díky $G \cong G'$ $\Rightarrow \det L^{11}_G = \det L^{11}_{G'}$

$\mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ $A := L^{11}_G$

$\mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ $B := L^{11}_{G-e} \to \det B = K(G-e)$

$\mathbb{R}^{n-2 \times n-2}$ $C := L^{11}_{G.e} \to \det C = K(G.e)$

chci ukázat $\det A = \det B + \det C$

$\to C \approx v_3, \dots v_n \Rightarrow C = A^{11} = B^{11}$

A a B jsou shodné, kromě $b_{11} = a_{11} - 1$ → stupeň v_2 klesne o 1

$\Rightarrow A_{*1} = B_{*1} + e_1$ → 1. sloupec A = 1. sloupec B + e_1

$\Rightarrow$ linearita $\det(A) = \det(B) + \det\begin{pmatrix}1 & ????\\ 0 & A^{11}\\ 0 & \end{pmatrix} = \det(B) + \det(A^{11})$

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) + \det(C)$ ∎

• Cayleho vzorec

Tvrzení: Úplný graf K_n má n^{n-2} koster.

Dk:

$$k(K_n) = \det L^{11}_{K_n} = \underbrace{\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & n-1 & & \vdots\\ -1 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1\end{vmatrix}}_{n-1} \overset{\downarrow +}{=} \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1\\ -n & n & & \\ -n & & n & 0\\ \vdots & 0 & & \ddots\\ -n & & & n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & n & & 0\\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & & & n\end{vmatrix} = \underline{\underline{n^{n-2}}}$$

↳ $n-1 + (n-2)\cdot(-1) = 1$

• Polynomy

Def: Polynom stupně n v proměnné x nad tělesem $\mathbb{K}$ je výraz $p \in \mathbb{K}(x)$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,\ a_0 \dots a_n \in \mathbb{K}.$$

↳ Operace s polynomy $p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ $\quad n \geq m$

- $(p \pm q)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i$
- $(\alpha p)(x) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) x^i$
- $(p \cdot q)(x) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i x^i$, kde $c_i = \sum_{j=1}^{i} a_j b_{i-j}$
- dělení se zbytkem $\frac{p}{q} = r + \frac{z}{q}$ $\quad \deg(z) < \deg(q)$

$\Rightarrow \exists$ unikátní $r, z \in \mathbb{K}(x)$: $p = q \cdot r + z$

$\to$ pro $\deg(p) < \deg(q)$: $z = p$, $r = 0$

- **Malá Fermatova věta** $\nearrow x^p = x$

Věta: Pro $x \in \mathbb{Z}_p \setminus 0$ platí $x^{p-1} = 1$.

Dk: zobrazení $i \mapsto x \cdot i$ je bijekce na $\{1, \dots p-1\}$ v $\mathbb{Z}_p$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{p-1} i = \prod_{i=1}^{p-1} x i = x^{p-1} \prod_{i=1}^{p-1} i \Rightarrow \underline{\underline{1 = x^{p-1}}}$$ ■

Důsledek: Pro $x \in \mathbb{Z}_p$: $x^p - p = 0$

$\Rightarrow$ pro $\forall q \in \mathbb{Z}_p(x)$ $\exists r \in \mathbb{Z}_p(x)$ t.ž. $\begin{cases} \deg(r) \leq p-1 \\ \forall x \in \mathbb{Z}_p : q(x) = r(x) \end{cases}$

Příklad: $\mathbb{Z}_5$

$$\underbrace{4x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2}_{q(x)} = 4\overbrace{(x^5 - x)}^{0} + \underbrace{2x^4 + 3x^2 + 4x + 2}_{r(x)}$$

- **Kořeny**

Def: $r \in \mathbb{K}$ je kořenem polynomu $p \in \mathbb{K}(x) \equiv p(r) = 0$.

👁 r je kořen $\Leftrightarrow$ $x - r$ dělí p beze zbytku ∵ pak $p = (x-r) \cdot q \overset{x=r}{=\!=} 0 \cdot q = 0$.

Def: Násobnost kořene $r \in \mathbb{K}$ je největší takové $k \in \mathbb{N}$, že $(x-r)^k$ dělí p.

Věta (Základní věta algebry): $\forall p \in \mathbb{C}(x)$, $\deg(p) \geq 1$ má alespoň 1 kořen.

Důsledek: $\forall p \in \mathbb{C}(x)$ lze rozložit na součin lineárních faktorů.

Def: Těleso $\mathbb{K}$ je algebraicky uzavřené $\equiv \forall p \in \mathbb{K}(x)$, $\deg(p) \geq 1$ má alespoň 1 kořen

- **Reprezentace polynomu stupně n**

1) $a_0, \dots a_n$
2) pro algebraicky uzavřená tělesa $\to a_n$ a n kořenů
3) hodnoty polynomu v $n+1$ bodech.

Problém: Dáno $n+1$ dvojic (x_i, y_i), urči $p \in \mathbb{K}(x)$ $\begin{cases} \deg(p) \leq n \\ \forall i : p(x_i) = y_i \end{cases}$

① vyřeším soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Def: Matice této soustavy se nazývá Vandermondova $V_{n+1}(x_0, \dots x_n)$.

Věta: Vandermondova matice V_{n+1} je regulární $\iff$ $x_0, \dots x_n$ jsou různé.

Dk: regulární $\iff$ determinant $\neq 0$

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} =$$

rozvoj podle 1. s. + z každého ř. vytknu $x_i - x_0$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1} \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 & & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^2 + x_n x_0 + x_0^2 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} x_0 + \dots + x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$\Rightarrow$ odzadu odečtu od každého sloupce x_0-násobek předchozího

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

rekurence

$$\Rightarrow \det(V_{n+1}(x_0, \dots x_n)) = \prod_{i=1}^{n}(x_i - x_0) \cdot \det(V_n(x_1, \dots x_n)) = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \quad \blacksquare$$

② Lagrangeova interpolace

- určím $n+1$ pomocných polynomů stupně n

$$p_i(x) = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \cdot \prod_{j \neq i}(x - x_j)$$

$p_i(x_i) = 1$

$p_i(x_j) = 0, \quad j \neq i$

ten součin ve jmenovateli je KONSTANTA

$$\Rightarrow p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i p_i(x) \qquad \Rightarrow p(x_i) = y_i p_i(x_i) = y_i \quad \blacksquare$$

Problém: Pro čísla m a n navrhni m klíčů tak, aby bylo možné zrekonstruovat tajný kód z libovolných n klíčů, ale nebylo možné to udělat s libovolnou kombinací méně klíčů.

Řešení: Zvolím nějaký polynom stupně $n-1$.

$\Rightarrow$ tajný kód je ten polynom

$\Rightarrow$ klíče je m dvojic (x_i, y_i)

těleso může být $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Z}_p$ s $p \geq m$

• Vlastní čísla a vektory

Def: Nechť V je v.p. nad $\mathbb{K}$ a $f: V \to V$ je l.z. $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastní číslo $f \equiv$

$$\exists v \in V \setminus o : f(v) = \lambda v$$

Vektor $v \in V$ je vlastní vektor k $\lambda \equiv f(v) = \lambda v$

Def: pro matici $A = {}_x[f]_x \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{K}^n$.

Def: Množina všech vlastních čísel je její spektrum

👁: Vlastní čísla diagonální matice jsou prvky na diagonále.

$$Dx = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda x \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = d_{11} & x_1 = (1,0,\dots 0)^T \\ \lambda_2 = d_{22} & x_2 = (0,1,\dots 0)^T \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ vlastní vektory $\sim$ kanonická báze

👁 Vlastní vektory odpovídající stejnému vlastnímu č. tvoří podprostor.

Dk: $U = \{u \in V \mid f(u) = \lambda u\}$

$$\forall u, v \in V: \ f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda(u+v) \ \checkmark$$
$$\forall a \in \mathbb{K}: \ f(au) = a f(u) = \lambda(au) \ \checkmark \qquad \blacksquare$$

Def: Geometrická násobnost v.č. je dimenze prostoru jeho vlastních vektorů.

Věta: Nechť $f: V \to V$ je l.z. a $\lambda_1, \dots \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla f a $x_1, \dots x_k$ odpovídající netriviální vlastní vektory.

Potom $x_1, \dots x_k$ jsou lineárně nezávislé.

Dk: Spor minimálním protipříkladem $\to k$ je nejmenší, že $\exists \lambda_1 \dots \lambda_k, x_1, \dots x_k$ l.z.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = o$ má netriviální řešení

$$o = \lambda_k o = \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_k a_i x_i$$

$$o = f(o) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i\right) = \sum_i a_i f(x_i) = \sum_i \lambda_i a_i x_i$$

$$\Rightarrow o = o - o = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \lambda_k) a_i x_i = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0} a_i x_i$$

$\Rightarrow x_1, \dots x_{k-1}$ jsou lineárně závislé $\Rightarrow$ spor s minimalitou k $\lightning$ $\blacksquare$

Důsledek: Matice řádu n může mít nejvýše n vlastních čísel.

• Charakteristický polynom

Def: Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ je $p_A(t) := \det(A - t \cdot I_n)$.

Věta: $\lambda \in \mathbb{K}$ je vlastním číslem matice $A \iff p_A(\lambda) = 0$.

Dk: λ je vlastní č. $A \iff$

$$\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus 0 : Ax = \lambda x \iff 0 = Ax - \lambda x = (A - \lambda I_n) x$$
$$\iff (A - \lambda I_n) \text{ je singulární}$$
$$\iff \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda) = 0 \quad \blacksquare$$

Důsledek: Vlastní čísla Δ matice jsou prvky na diagonále.

Def: Algebraická násobnost vlastního č. λ je jeho násobnost jakožto kořene v p_A.

Tvrzení: Každý polynom $\sum_{i=0}^{n} b_i t^i$, $b_n = (-1)^n$ je char. polynomem nějaké matice.

Dk: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_0 \\ 1 & & & -b_1 \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$ má char. polynom $(t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0)(-1)^n$ $\blacksquare$

• Koeficienty char polynomu

→ $p_A(t) = \det(A - t I) = \sum_i b_i t^i = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$.

- $b_n = (-1)^n$ … součin podle diagonály dá $(-t)^n$
- $b_0 = \det(A)$ … $\det(A - 0 \cdot I) = 0 + 0 + \dots + b_0$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ … diagonála

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - t \end{vmatrix}$$

→ pokud je $\mathbb{K}$ algebraicky uzavřené, tak

$$p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} (\lambda_2 - t)^{r_2} \cdots (\lambda_k - t)^{r_k}, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$$

r_k → algebraická násobnost λ_k

- $b_0 = \prod_i \lambda_i^{r_i}$ … $\det(A - 0 I) = \lambda_1^{r_1} \cdots \lambda_k^{r_k}$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_i r_i \lambda_i$

Důsledek: Nechť $\lambda_1, \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, alg. uzavřeného:

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \rightsquigarrow \det(A) = \prod_i \lambda_i$$

$$a_{11} + a_{22} + \dots a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \rightsquigarrow \sum_i a_{ii} = \sum_i \lambda_i$$

• **Příklady**

① $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 4 = -\lambda(\lambda-3)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \rightarrow (A - \lambda_1 I)x = 0 \Rightarrow$ řeším soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = (4, 4, 1)$$

$\Rightarrow \lambda_{2,3} = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = (-1, 2, -1)$

↳ alg. násobnost $= 2$, geom. nás. $= 1$

Pozorování: pro A singulární je $\lambda = 0$ vždy vlastní číslo $\because \det(A) = 0$

Pozorování: pro A s konstantními ř. součty k je k v.č. a $(1, 1, \dots 1)^T$ v.v.

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ sing. $\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \sum$ řádku $= 3 \Rightarrow \lambda_2 = 3$

$\Rightarrow \sum a_{ii} = \sum_i \lambda_i \Rightarrow 3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

• **Vlastní čísla příbuzných lineárních zobrazení**

$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \lambda_1, \dots \lambda_k$ a $x_1, \dots x_k$

• αA : $(\alpha A)x = \alpha(Ax) = \alpha \lambda x \Rightarrow \alpha\lambda_1, \dots \alpha\lambda_k$

• A^2 : $A^2 x = A\lambda x = \lambda A x = \lambda^2 x \Rightarrow \lambda_1^2, \dots \lambda_k^2$ $\qquad$ l.z.: znovu se natáhnou

• A^T : $p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda \cdot I^T) = \det((A - \lambda I)^T) =$

$= \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$

$\rightarrow$ stejné char. polynomy $\Rightarrow$ stejná vlastní čísla

• A^{-1} : $Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x$

$\Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1}, \dots \frac{1}{\lambda_k}$

- ## Cayleyova - Hamiltonova věta

Věta: Pro matici $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ a její char. polynom platí:

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + b_1 \lambda + b_0$$

nelegální

$$\emptyset_n = (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \ldots + b_1 A + b_0 I_n \quad = p_A(A)$$

Dk: $M := A - \lambda \cdot I_n$, upravíme $M \cdot \operatorname{adj}(M) = \det(M) \cdot I_n$

→ složky $\operatorname{adj}(M)$ jsou determinanty podmatic $\Rightarrow$ polynomy stupně $\leq n-1$

$\Rightarrow \operatorname{adj}(M) = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \lambda^{n-2} \cdot B_{n-2} + \ldots + \lambda \cdot B_1 + B_0$, $\quad B_0, \ldots B_{n-1} \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$\Rightarrow M \cdot \operatorname{adj} M = \det M \cdot I_n \Rightarrow (A - \lambda \cdot I_n) \cdot \operatorname{adj} M = p_A(\lambda) \cdot I_n$

$\Rightarrow (A - \lambda I_n)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \ldots + \lambda B_1 + B_0) = (-1)^n \lambda^n I_n + b_{n-1} \lambda^{n-1} I_n + \ldots + b_1 \lambda I_n + b_0 I_n$

$$\begin{array}{lll}
\lambda^n: & -B_{n-1} = (-1)^n I_n \quad \Rightarrow & -A^n B_{n-1} = (-1)^n A^n \\
\lambda^{n-1}: & A B_{n-1} - B_{n-2} = b_{n-1} I_n & A^{n-1}(A B_{n-1} - B_{n-2}) = b_{n-1} A^{n-1} \\
\lambda^i: & A B_i - B_{i-1} = b_i I_n & A^i (A B_i - B_{i-1}) = b_i A^i \\
\lambda^0: & A B_0 = b_0 I_n & A B_0 = b_0 I_n
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
L := -A^n B_{n-1} + A^{n-1}(A B_{n-1} - B_{n-2}) + \ldots + A(A B_1 - B_0) + A B_0 = \emptyset_n \\
P := (-1)^n A^n + b_{n-1} A^{n-1} + \ldots + b_1 A + b_0 I_n = p_A(A)
\end{array}\right\} \quad L = P$$

■

• Podobné matice

Matice l.z. f není jednoznačná $\because$ závisí na bázi.

$\Rightarrow$ všechny matice stejného zobrazení mají stejná vlastní čísla

$${}_X[f]_X = {}_X[id]_Y \, {}_Y[f]_Y \, {}_Y[id]_X \, , \quad {}_X[id]_Y^{-1} = {}_Y[id]_X$$

<u>Def:</u> Matice $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ jsou si <u>podobné</u> $\equiv$

$\exists$ regulární $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $A = R^{-1}BR$

: Podobné matice mají <u>stejná</u> vlastní čísla.

$$Ax = \lambda x \quad , \quad B(Rx) = \lambda(Rx)$$

$$\Rightarrow B(Rx) = RAR^{-1}Rx = RAx = R\lambda x = \lambda Rx \quad \blacksquare$$

: Podobné matice mají <u>stejné char. polynomy.</u>

$$p_B(t) = \det(B - t\cdot I) = \det(RAR^{-1} - R(tI)R^{-1}) =$$

$$= \det(R(A - tI)R^{-1}) = \det R \cdot p_A(t) \cdot \det R^{-1} = p_A(t) \cdot \underbrace{\det R \cdot \det R^{-1}}_{\det(I) = 1} \quad \blacksquare$$

Pokud báze X obsahuje v.v. u zobrazení f, tak se při provedení f ten vektor jenom natáhne - takže pro $[v]_X \to [f(v)]_X$ se souřadnice $\sim u$ jen vynásobí λ

$\Rightarrow$ ${}_X[f]_X$ obsahuje v sloupci odpovídajícím u jen <u>λ na diagonále.</u>

<u>Dk:</u> u je i-tým vektorem X $\Rightarrow$ i-tý sloupec

$$({}_X[f]_X)_{*i} = [f(u)]_X = [\lambda u]_X = \lambda [u]_X = \lambda e^i \quad \blacksquare$$

<u>Věta:</u> Geometrická násobnost vlastního čísla λ matice A je <u>menší nebo rovna</u> jeho algebraické násobnosti.

<u>Dk:</u> Budu A vnímat jako matici l.z. $\Rightarrow$ $A = {}_K[f]_K$.

Nechť $u_1, \dots u_k$ je báze prostoru vlastních vektorů příslušných λ

$\Rightarrow \text{Geom}(\lambda) = k$

Nyní $u_1, \dots u_k$ doplníme na bázi $\mathbb{K}^n \to X$

$\Rightarrow$ ${}_X[f]_X = {}_X[id]_K \, {}_K[f]_K \, {}_K[id]_X$ $\Rightarrow$ ${}_X[f]_X$ je podobná A

$\Rightarrow$ ${}_X[f]_X$ má v prvních k sloupcích pouze λ na diagonále

$\Rightarrow$ $(\lambda - t)^k$ dělí $p_{{}_X[f]_X}(t) = p_A(t)$ $\Rightarrow$ $\text{Alg}(\lambda) \geq k = \text{Geom}(\lambda)$ $\blacksquare$

• Diagonalizace

Pozorování: Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je podobná diagonální matici

$\iff$ prostor $\mathbb{K}^n$ má bázi sestávající z vlastních vektorů A.

Dk: $AR = DR$ s diagonální D. Ukážeme, že R obsahuje vlastní vektory A

$\Rightarrow$ protože R je regulární, tak jsou l. nezávislé $\Rightarrow$ tvoří bázi

$$AR = DR$$

i-tý sloupec: $(RD)_{*i} = x\, d_{ii} = \lambda x \Rightarrow Ax = \lambda x \Rightarrow x$ je v. v. A. ■

Def: Matice je diagonalizovatelná $\equiv$ je podobná diagonální matici.

Důsledek: Matice $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ je diag. $\iff$ má n různých vlastních čísel.

↝ od každého si vezmu 1 vl. v.

Důsledek: Když $p_A(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{r_i}$, pak:

A je diag. $\iff \forall i \ \mathrm{Geom}(\lambda_i) = r_i$

Důsledek: Je-li $A = R^{-1}DR$, pak $A^k = (R^{-1}DR)^k = R^{-1}D^kR$.

• Příklady

1) Mám vlastní čísla a vlastní vektory nějaké matice A $\Rightarrow$ chci A

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{C} \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$$

2) Mám A ↝ chci najít R a D, že $A = R^{-1}DR$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 2 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to (1,0,0)^T$$

$$\lambda_2 = 1 \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to (1,0,1)^T$$

$$\lambda_3 = -1 \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to (0,-1,1)^T$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- do D zapíšu na diag. vlastní č.
- do R zapíšu odpovídající vlastní v.

• Speciální komplexní matice

Def: Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je $A^H \in \mathbb{C}^{n\times m}$, kde $(A^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Def: Matice A je hermitovská $\equiv A = A^H$.

Def: Matice A je unitární $\equiv A^{-1} = A^H$, ortogonální $\equiv A^{-1} = A^T$.

1, Hermitovské matice mají reálnou úhlopříčku $a_{ii} = \overline{a_{ii}} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbb{R}$

2, $(A^H)^H = A$, $(AB)^H = B^H A^H$ – práce jako s A^T

3, pro unitární A, B je unitární i A^H, AB

4, $A^H A = I \Rightarrow$ sloupce unitární matice ~ ortonorm. báze

• $x_i^H x_j = 0$ pro $i \neq j$, $x_i^H x_i = 1$

5, Každý $x \in \mathbb{C}^n$ t.ž. $x^H x = 1$ lze doplnit na unitární matici
$\Rightarrow$ Gram-Schmidtovou ortonormalizací

Věta: Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná.
Navíc $\exists$ unitární R t.ž. $R^{-1}AR = R^H A R$ je diagonální.

Důsledek: Každá hermitovská i symetrická matice je diagonalizovatelná.

Dk: Indukcí podle n. Pro $n=1$ zjevně platí. $A_n := A$

1, v $\mathbb{C}$ má A_n vždy vlastní č. λ s v.v. x
$\Rightarrow x$ znormalizuji $\Rightarrow \|x\| = 1 \Rightarrow$ Gram-Schmidtem doplním na unitární P_n

2, ukážu, že $P_n^H A_n P_n = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow$ nějak zdiagonalizuju $A_{n-1} \Rightarrow ✓$

$(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n^H P_n = P_n^H A_n P_n$ je hermitovská $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

• x je 1. sloupec $P_n \Rightarrow$ 1. sl. $P_n^H A_n P_n$ je: $P_n^H A_n x = P_n^H \lambda x = \lambda P_n^H x$
$\rightarrow P_n$ je unitární (o.s.) $\Rightarrow \lambda P_n^H x = \lambda (1, 0, \dots 0)^T = (\lambda, 0, \dots 0)^T$

3, $P_n^H A_n P_n = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, A_{n-1} je hermitovská
$\Rightarrow$ podle i.p. $\exists R_{n-1}, D_{n-1} : R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$

$\rightarrow$ chci udělat něco jako $P_n^H R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} P_n$

$\Rightarrow R_n := P_n \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow R_n^{-1} A_n R_n = R_n^H A_n R_n = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}^H} \end{pmatrix} P_n^H A_n P_n \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{R_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \boxed{D_{n-1}} \end{pmatrix} = D_n$ ∎

Věta: Každá symetrická A má rozklad $R^{-1}AR = D$ pro ortogonální R.

Příklad: Diagonalizuj $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$.

$$p_A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

$$\lambda_1 = 1 \to \begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\-1&0&2\end{pmatrix} \to (2,-1,1)^T$$

$$\lambda_{2,3}=2 \to \begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \to (1,0,1)^T$$

$\Rightarrow$ jenom 2 vlastní v. $\Rightarrow$ není diagonalizovatelná

Jordanův blok $\Rightarrow$ diagonalizuju ji co nejvíc to půjde $\to J$

$$J = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \boxed{\begin{matrix}2&1\\&2\end{matrix}} & \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&0\\1&1&2\end{pmatrix}$$

To se dopočítá, aby to vyšlo

každý blok začíná na skutečný vl. v.

$\hookrightarrow A = R^{-1}JR$

• **Jordanova normální forma**

Def: Jordanův blok je matice ve tvaru $J_\lambda = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$ → 1. nad diagonálou

Věta: Každá čtvercová komplexní matice A je podobná J v Jordanově normální formě $J = \begin{pmatrix}J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_k}\end{pmatrix}$

→ Každý Jordanův blok J_{λ_i} odpovídá vlastnímu číslu λ_i matice A

- \# bloků s λ_i = Geom(λ_i)
- $\sum$ velikostí bloků s λ_i = Arit(λ_i)

$\Big\}$ J je určena jednoznačně až na permutaci bloků

Diagonalizovatelná A má Jordanovy bloky 1×1

• **Zobecněné vlastní vektory**

→ normálně $AR = RD$, tady $AR = RJ_\lambda$

x_1 = ten skutečný vlastní vektor

: i-tý sloupec $R = x_i$ splňuje $(A-\lambda I)^i x_i = 0$

Dk: $Ax_1 = \lambda x_1 \Rightarrow (A-\lambda I)x_1 = 0$

$Ax_2 = x_1 + \lambda x_2 \Rightarrow (A-\lambda I)x_2 = x_1 \Rightarrow (A-\lambda I)^2 x_2 = 0$

$\dots$

$\blacksquare$

Def: Zobecněný vlastní vektor matice A k v.č. λ je libovolný vektor x splňující $(A-\lambda I)^i x = 0$ pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ lze je řadit do řetízků $x_k, x_{k-1}, \dots x_2 x_1, 0$, kde $(A-\lambda I)x_i = x_{i-1}$.

• **Poznámka:** Děláme to nad $\mathbb{C}$, protože je algebraicky uzavřené $\Rightarrow \sum \mathrm{Alg}(\lambda) = n$.

• Gramova matice

→ mám nějaký obecný s.s. a vůči němu ortonormální bázi Z, potom:

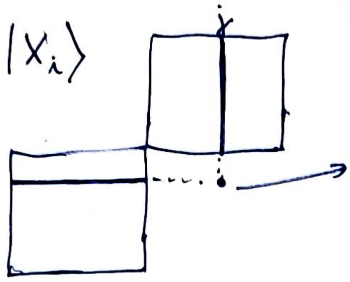
$$\langle u|v\rangle = [v]_Z^H \cdot [u]_Z \qquad [u]_Z = {}_Z[id]_X [u]_X, \quad [v]_Z = {}_Z[id]_X [v]_X$$

$$\langle u|v\rangle = [v]_X^H \cdot \underbrace{{}_Z[id]_X^H \cdot {}_Z[id]_X}_{G} \cdot [u]_X, \qquad X = (X_1, X_2, \dots X_n)$$

G → Gramova matice $:= G^T$

$G_{ij} = \langle x_j | x_i \rangle$

Dk:



$$G_{ij} = [x_i]_Z^H [x_j]_Z = \langle x_j | x_i \rangle \quad \blacksquare$$

protože Z je ortonorm.

→ Vlastnosti:

- $\langle x_i|x_j\rangle = \overline{\langle x_j|x_i\rangle} \Rightarrow G_{ji} = \overline{G_{ij}} \Rightarrow G$ je hermitovská
- $\langle u|u\rangle > 0$ pro $u \neq o \Rightarrow [u]_X^H G [u]_X > 0$ pro $\forall u \neq 0$.

• Pozitivně definitní matice

Def: Hermitovská matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je pozitivně definitní $\equiv$ $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus o : x^H A x > 0$.

Tvrzení: Pokud $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ jsou pozitivně def., $\alpha > 0$, pak:

- αA, $A + B$ jsou p.d.
- A je regulární $\because$ $Ax = o \Rightarrow x^H A x = x^H o = o \Rightarrow x = o$
- A^{-1} je p.d. Sporem: $x^H A^{-1} x \le 0$, $x^H A^{-1} A A^{-1} x \le 0 \Rightarrow y^H A y \le 0$ pro $y = A^{-1} x$ $\Rightarrow$ spor s p.d. A

Věta: Pro hermitovskou A je toto ekvivalentní:

1, A je pozitivně definitní
2, A má všechna vlastní čísla kladná
3, $\exists$ regulární U t.ž. $A = U^H U$

Dk: $1 \Rightarrow 2$: A je hermitovská $\Rightarrow$ má reálná vlastní čísla → jsou kladná?

→ nechť $x \neq o$ je v.v. k λ: $0 < x^H A x = x^H \lambda x = \lambda x^H x = \lambda \underbrace{\langle x|x\rangle}_{+} \Rightarrow \lambda > 0$

$2 \Rightarrow 3$: A je hermitovská $\Rightarrow \exists$ unitární R a diagonální D t.ž.:

$$A = R^H D R = R^H \sqrt{D}\sqrt{D} R = R^H \sqrt{D}^H \sqrt{D} R = (\sqrt{D}R)^H (\sqrt{D}R) \to U := \sqrt{D}R$$

$3 \Rightarrow 1$: $x^H A x = ?$, pokud $x \in \mathbb{C}^n \setminus o \Rightarrow Ux \neq 0$ $\because$ U je regulární

$$\Rightarrow x^H A x = x^H U^H U x = (Ux)^H (Ux) = \langle Ux | Ux \rangle > 0 \quad \blacksquare$$

<u>Poznámka</u>: $x^H A x = \sum_{i,j} \overline{x_i}\, a_{ij}\, x_j \qquad x^T A y = \sum_{i,j} x_i\, a_{ij}\, y_j$

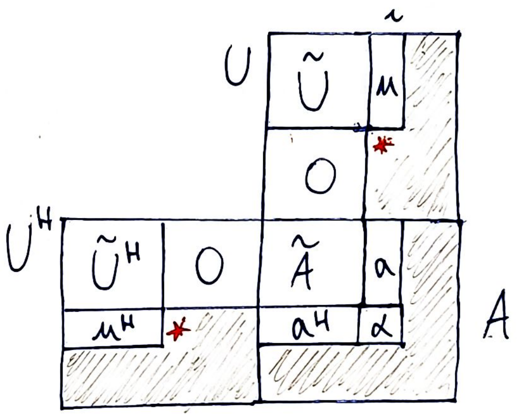
• <u>Choleského rozklad</u>

<u>Věta</u>: Pro $\forall$ p.d. matici A existuje <u>unikátní horní Δ</u> matice U s <u>kladnou</u> diagonálou t.ž. $A = U^H U$. U se nazývá <u>Choleského r.</u>

1. Pro $i = 1, \dots m$:
2. $\quad u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{ki}} \qquad \because\ a_{ii} = u_{ii}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{ki}$
3. $\quad$ Pokud $u_{ii} \notin \mathbb{R}^+$: A není p.d. $\Rightarrow$ STOP
4. $\qquad$ Pro $j = i+1, \dots m$:
5. $\qquad\quad u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{kj} \right) \qquad \because\ a_{ij} = u_{ij} u_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} \overline{u_{ki}}\, u_{kj}$

<u>Příklad</u>:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 2 & -1 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 0 & 2 & -1 \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 2 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -1 & 5 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2
\end{array}$$



$\tilde A = \tilde U^H \tilde U$

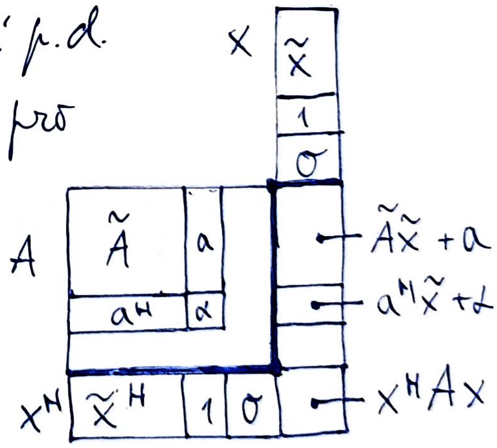
$a = \tilde U^H u$

$a^H = u^H \tilde U$

<u>Správnost</u>: Ukážeme, že pokud selže, tak A není p.d.

$\rightarrow$ selhal $\Rightarrow \alpha \le u^H u$, ukážeme $x^H A x \le 0$ pro

$x^T = \boxed{\tilde x^T \mid 1 \mid 0 \dots 0}$ kde $\tilde x = -\tilde U^{-1} u$



$\Rightarrow x^H A x = \tilde x^H \tilde A \tilde x + \tilde x^H a + a^H \tilde x + \alpha =$

$= \tilde x^H (\tilde U^H \tilde U) \tilde x + \tilde x^H (\tilde U^H u) + (u^H \tilde U) \tilde x + \alpha =$

$= (-\tilde U^{-1} u)^H (\tilde U^H \tilde U)(-\tilde U^{-1} u) + (-\tilde U^{-1} u)^H (\tilde U^H u) + (u^H \tilde U)(-\tilde U^{-1} u) + \alpha =$

$= u^H u - u^H u - u^H u + \alpha = \alpha - u^H u \le 0$ ■

• <u>Rekurentní podmínka</u>

<u>Věta</u>: Bloková matice $A = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array}$ je p.d. $\iff$ $\alpha > 0$ & $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je p.d.

Gaussovka prvního sl. pomocí prvního ř. dává: $\begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \\ \hline \end{array}$ $\quad a_i - \frac{1}{\alpha} a_i \cdot \alpha$, $\; -\frac{1}{\alpha} a_i \cdot a^H$

<u>Důsledek</u>: Gaussovka odshora dolu $\Rightarrow$ pokud je na konci ⊕ diagonála $\Rightarrow$ p.d.

<u>Dk</u>: $\Leftarrow$: $x \in \mathbb{C}^n \setminus 0$ zapíšeme jako $x^T = \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & \tilde{x}^T \\ \hline \end{array}$, $x_1 \in \mathbb{C}$, $\tilde{x}^T \in \mathbb{C}^{n-1}$.

$$x^H A x = \alpha x_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_1 a^H \tilde{x} + x_1 \tilde{x}^H a + \tilde{x}^H \tilde{A} \tilde{x} =$$

$$\begin{array}{ccc|c} & & & \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline \tilde{x} \\ \hline \end{array} \; x \\ & \alpha & a^H & \alpha x_1 + a^H \tilde{x} \\ A & a & \tilde{A} & a x_1 + \tilde{A}\tilde{x} \\ \hline x^H & \bar{x}_1 & \tilde{x}^H & x^H A x \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \tilde{x}^H \tilde{A} \tilde{x} = \underbrace{\tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H\right) \tilde{x}}_{m} + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}^H a a^H \tilde{x}$$

$$= m + \alpha x_1 \bar{x}_1 + x_1 \tilde{x}^H a + \bar{x}_1 a^H \tilde{x} + \frac{1}{\alpha} \tilde{x}^H a a^H \tilde{x} =$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ >0 \\ \text{pro } \tilde{x} \neq 0}}{m} + \underbrace{\left(\sqrt{\alpha} x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^H \tilde{x}\right)}_{r} \underbrace{\left(\sqrt{\alpha} \bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{x}^H a\right)}_{r^H = \bar{r}} \Rightarrow r \cdot \bar{r} > 0 \text{ pro } r \neq 0$$

$\Rightarrow$ alespoň jeden je ryze kladný $\Rightarrow x^H A x > 0$.

$\Rightarrow$: pro $\tilde{x} \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus 0$ vezmeme $x^T = \begin{array}{|c|c|} \hline x_1 & \tilde{x}^T \\ \hline \end{array}$ a najdeme x_1 aby:

$$0 < x^H A x = \tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H\right) \tilde{x} \Rightarrow \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \text{ je p.d.} \checkmark$$

potřebuju, aby $x^H A x = m \Rightarrow r = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{\alpha} a^H \tilde{x}$

$\to$ taky chceme $\alpha > 0$: pro $x_1 = 1$, $\tilde{x} = 0$: $x^H A x = 0 + \alpha > 0$ ∎

• <u>Sylvestrova podmínka</u>

<u>Věta</u>: Matice A je p.d. $\iff \forall i: \det(A_i) > 0$, kde A_i sestává z prvních i řádků a sloupců A.

<u>Dk</u>: Použijeme Gaussovku $A \rightsquigarrow A'$ na test zda je A p.d.

Nechť $\alpha_1, \dots \alpha_n$ jsou prvky na diagonále výsledné horní Δ matice A'.

$\to$ řádky jsme eliminovali odshora dolů

$$\Rightarrow \det A_i = \det A'_i = \prod_{j \leq i} \alpha_j = \alpha_i \cdot \prod_{j < i} \alpha_j = \alpha_i \det A_{i-1}$$

$$A \text{ je p.d.} \iff \alpha_1, \dots \alpha_n > 0 \iff \det A_1, \dots \det A_n > 0$$ ∎

A je p.d. $\iff$ αA je p.d. $\alpha > 0$

• **Příklad:**

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc} 2 & \cdot & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 5/2 \end{array} \sim \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \sim \begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 8/3 & 8/3 \\ 0 & 8/3 & 14/3 \end{array} \sim \begin{array}{c|c} 8 & 8 \\ \hline 8 & 14 \end{array} \sim \begin{array}{c|c} 8 & 8 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

$\uparrow$ je p.d.

• **Rekurentní podmínka**

Důkaz #2: Gaussovu eliminaci 1. sloupce A zapíšeme jako součin:

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0^H \\ \hline -\frac{1}{\alpha}a & I \end{array}\right]}_{E^H} \cdot \left[\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline a & \tilde{A} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & a^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \end{array}\right]$$

$\hookrightarrow \alpha \cdot x + a = 0$

$$\Rightarrow E^H A E = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0^H \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \end{array}\right]$$

$\hookrightarrow$ p.d. $\iff$ α i $\boxed{\tilde{A} - \frac{1}{\alpha}aa^H}$ jsou p.d.

$\Rightarrow$: $E^H \overset{U^H U}{\overset{\|}{A}} E = (UE)^H (UE)$ je p.d.

$\Rightarrow \alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H$ je p.d.

$\Leftarrow$: $E^H A E = U^H U$

$\Rightarrow A = (E^H)^{-1} U^H U E^{-1} = (UE^{-1})^H (UE^{-1})$ je p.d. ■

• Bilineární a kvadratické formy

Def: Nechť V je v. p. nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $V \times V \to \mathbb{K}$ je <u>bilineární forma</u> na $V \equiv$

- $\forall u, v \in V,\ \forall a \in \mathbb{K}:\quad f(au, v) = f(u, av) = a f(u, v)$
- $\forall u, v, w \in V:\quad f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
- $\forall u, v, w \in V:\quad f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)$

Def: Bilineární forma f je <u>symetrická</u> $\equiv \forall u, v \in V:\ f(u, v) = f(v, u)$.

Def: Zobrazení $g: V \to \mathbb{K}$ je <u>kvadratická forma</u> $\equiv$
$\exists$ b. forma f: $\forall u \in V:\ g(u) = f(u, u)$. $\Big\}$ něco jako $\|u\|^2$

👁 skalární součiny nad $\mathbb{R}$ jsou bilineární formy

Def: Nechť V je v. p. nad $\mathbb{K}$ s bází $X = (x_1, \dots x_n)$.

- <u>Matice b. formy</u> f vzhledem k bázi X je B_X, $b_{ij} = f(x_i, x_j)$.
- <u>Matice k. formy</u> g je matice <u>symetrické</u> b. formy f odpovídající g. → v tělesech s char $= 2$ nemusí $\exists$

→ jedné k. formě odpovídá spousta bilineárních ⇒ chci tu matici jednoznačnou

<u>Příklady</u> ← nad $\mathbb{Z}_5$

- $f(u, v) = u_1 v_1 + 2u_1 v_2 + 4u_2 v_1 + 3u_2 v_2 \qquad B_K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ → najdi g

  $\Rightarrow g(u) = f(u, u) = u_1^2 + u_1 u_2 + 3u_2^2 \quad \longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

- $g(u) = 2u_1^2 + 2u_1 u_2 - u_2^2 - 2u_2 u_4 - 4u_4^2$ → najdi f ← nad $\mathbb{R}$

  $f(u, v) = 2u_1 v_1 + (u_1 v_2 + v_1 u_2) - u_2 v_2 - (u_2 v_4 + v_2 u_4) - 4u_4 v_4$

  $$\Rightarrow B_K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

👁 Když mám matici B b. formy odpovídající k. formě g, která není symetrická, tak ji můžu symetrizovat takto:

$$B' = \tfrac{1}{2}(B + B^T)$$ → B' je symetrická a pořád je to matice formy g

$$\because\ x^T B x = g(x) = x^T B' x$$

$$x^T B' x = x^T \tfrac{1}{2}(B + B^T) x = \tfrac{1}{2}\Big(x^T B x + \underbrace{\overbrace{x^T B^T x}^{\text{skalár}}}_{= (x^T B^T x)^T}\Big) = \tfrac{1}{2}(x^T B x + x^T B x) = x^T B x \ \blacksquare$$

👁: $f(u,v) = [u]_X^T B_X [v]_X$, $g(u) = [u]_X^T B_X [u]_X$.

Dk: $u = \sum_i a_i x_i$, $v = \sum_i c_i x_i$

$$f(u,v) = f\Big(\sum_i a_i x_i , \sum_j c_j x_j\Big) = \sum_i \sum_j a_i c_j f(x_i, x_j) = \sum_{i,j} a_i b_{ij} c_j = [u]_X^T B [v]_X \quad ■$$

👁: Nechť B_X je matice b/k formy vzhledem k bázi X.

Potom $B_Y = {}_X[id]_Y^T \, B_X \, {}_X[id]_Y$ je matice stejné formy vzhledem k Y.

Dk: $[u]_X = {}_X[id]_Y [u]_Y$, $[v]_X = {}_X[id]_Y [v]_Y$

$$f(u,v) = [u]_X^T B_X [v]_X = [u]_Y^T \underbrace{\left({}_X[id]_Y^T \, B_X \, {}_X[id]_Y\right)}_{B_Y} [v]_Y \quad ■$$

Def: Analytické vyjádření b. formy nad K^n s maticí B je polynom

$$f(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} u_i v_j$$ ← ! tohle je vůči kanonické bázi

• Diagonalizace forem

předtím jsme uměli jen symetrickou

Věta: Pokud je g kvadratická forma na v.p. V konečné dimenze n nad $\mathbb{K}$, char $\neq 2$ pak má forma g diagonální matici B vzhledem k vhodné bázi X.

Def: Takovou bázi nazýváme polární báze. B_P je diagonální diagonální

Ekvivalentně: Pro $\forall$ symetrickou $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ s char$(\mathbb{K}) \neq 2$ $\exists$ regulární R: $R^T A R = D$.

Dk: indukcí podle n. → gaussovou eliminaci 1. ř. a s. ⇒ i.p.

$$A_n = A = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & a^T \\ \hline a & \tilde{A} \\ \hline\end{array} \qquad ① \ \alpha \neq 0: \quad P_n := \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -\frac{1}{\alpha} a^T \\ \hline 0 & I \\ \hline\end{array}$$

$$P_n^T A_n P_n = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & \tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^T \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & 0^T \\ \hline 0 & A_{n-1} \\ \hline\end{array}$$

→ el. úpravy na řádky i sloupce zachovávají symetrii ⇒ A_{n-1} je sym.

⇒ podle i.p. $\exists R_{n-1}, D_{n-1}$ pro A_{n-1} → chci vyrobit $R_{n-1}^T A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$

$$R_n := P_n \cdot \underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}}_{\tilde{R}_{n-1}} \Rightarrow R_n^T A_n R_n = \tilde{R}_{n-1}^T (P_n^T A_n P_n) \tilde{R}_{n-1} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & D_{n-1} \\ \hline\end{array} = D_n$$

② $\alpha = 0$, $a \neq 0$: $\exists i: a_{i1} \neq 0$ ⇒ přičtu i-tý řádek a sloupec k prvnímu

⇒ místo A budu diagonalizovat $A' := E^T A E$, kde $\alpha' = 2 a_{i1} \neq 0$ → ①

③ $\alpha = 0$, $a = 0$: vezmu $A_{n-1} = \tilde{A}$ a $R_n = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0^T \\ \hline 0 & R_{n-1} \\ \hline\end{array}$ ■

- Diagonalizace forem

→ Gaussovka, ale všechny operace provádíme na řádky i na sloupce.

👁: A symetrická ⇒ E^TAE také symetrická

Důsledek: Horní △ R^TAR je i diagonální.

signatura: $(2,1,0)$

Příklad: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \quad E_1^TA \quad E_1^TAE_1 \quad E_2^TE_1^TAE_1E_2$

→ můžu si stranou psát řádkové úpravy: $(A|I_n) \sim\sim (D|R^T)$ ← jenom řádkové

⇒ vektory polární báze X jsou sloupce R ⇒ řádky R^T

∵ $D_X = {}_K[id]_X^T \, B \, {}_K[id]_X \Rightarrow {}_K[id]_X = R$

$D = R^T \, B \, R$

- Sylvestrův zákon setrvačnosti

Věta: Každá kvadratická forma na konečně generovaném reálném v.p. má vzhledem k vhodné bázi diagonální matici pouze s $1, -1$, a 0.
Všechny takové diagonální matice odpovídající téže formě mají stejný $\#1$ a $\#-1$.

Def: Nechť reálná kvadratická forma g má diagonální matici B obsahující $1, -1$ a 0. Signatura formy g je $(\#1, \#-1, \#0)$ v B.

Dk: ① existence takové matice

Nechť B je matice formy vůči nějaké bázi Y. $\mathrm{Char}(\mathbb{R}) \neq 2$ ⇒ jde diagonalizovat

$\Rightarrow B = R^TDR$, R regulární

$\Rightarrow D = S^TD'S$, kde pro d_{ii} $\begin{cases} = 0, & d'_{ii} = 0, \; s_{ii} = 1 \\ > 0, & d'_{ii} = 1, \; s_{ii} = \sqrt{d_{ii}} \\ < 0, & d'_{ii} = -1, \; s_{ii} = \sqrt{-d_{ii}} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B = (SR)^TD'(SR), \; SR \text{ reg.} \\ \Rightarrow \text{najdu } X \text{ t.ž. } {}_Y[id]_X = (SR)^{-1} \end{array}\right\} {}_Y[id]_X^T B \, {}_Y[id]_X = D'$ ∎

② jednoznačnost signatury

→ pro ortogonální R máme $R^T = R^{-1} \Rightarrow B = R^{-1}DR \Rightarrow$

⇒ D obsahuje vlastní čísla ⇒ signatura je jednoznačná pro ortogonální R – co jinak?

→ Nechť $X = (u_1, \dots u_n)$, $Y = (v_1, \dots v_n)$ jsou dvě báze t.ž. odpovídající matice B a B' formy g jsou diagonální s $1, -1$ a 0 uspořádanými tak, že nejdříve jsou 1, potom -1 a nakonec 0.

→ protože součiny s regulárními maticemi nemění rank a $B = {}_Y[id]_X^T \, B' \, {}_Y[id]_X$

$$\Rightarrow \#0 \text{ v } B = n - \text{rank}(B) = n - \text{rank}(B') = \#0 \text{ v } B'.$$

→ $r := \#1$ v B, $s := \#1$ v B'. → sporem ukážeme $r = s$

→ pokud $r > s$: $\left.\begin{array}{l} \text{span}(u_1, \dots u_r) \\ \text{span}(v_{s+1}, \dots v_n) \end{array}\right\}$ součet dimenzí $= r + n - s > n$

$\Rightarrow$ mají netriviální průnik

$\Rightarrow$ zvolme $w \neq 0$ z tohoto průniku.

$\left.\begin{array}{l} [w]_X = (x_1, \dots x_r, 0, \dots 0)^T \\ [w]_Y = (0, \dots 0, y_{s+1}, \dots y_n)^T \end{array}\right\}$ co se stane s $g(w)$?

$\left.\begin{array}{l} g(w) = [w]_X^T B [w]_X = x_1^2 + \dots + x_r^2 > 0 \quad \because w \neq 0 \\ g(w) = [w]_Y^T B' [w]_Y = -y_{s+1}^2 - \dots - y_{\text{rank}(B')}^2 \leq 0 \end{array}\right\}$ ↯

→ podobně pro $r < s$ $\Rightarrow$ tedy $s = r$ ■

👁 Pokud má forma reálnou pozitivně def. matici, tak ji lze diagonalizovat na I_n

$\because B = U^H U = U^T U = U^T I_n U$

- Problém přímek svírající stejný úhel

Problém: Kolik nejvíce může být přímek v $\mathbb{R}^d$ t.ž. všechny svírají stejný úhel?

→ $\mathbb{R}^2$: 3 přímky $\varphi = 60°$

→ $\mathbb{R}^3$: 6 přímek

Věta: V $\mathbb{R}^d$ může nejvýše $\binom{d+1}{2}$ přímek svírat stejný úhel.

Dk: Předpokládejme, že $\exists$ n takových přímek. Zvolíme vektory jednotkové délky

$$v_1, \dots v_n \Rightarrow \langle v_i | v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ \cos\varphi & \text{jinak} \end{cases}$$

Zobrazení $v_i \mapsto v_i v_i^T$ je prosté $\Rightarrow$ ukážeme, že matice

$v_1 v_1^T, \dots v_n v_n^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ jsou lineárně nezávislé

$\Rightarrow$ pak $n \leq \binom{d+1}{2}$ $\because$ dimenze prostoru symetrický matic $\mathbb{R}^{d\times d}$ je $\binom{d+1}{2}$

→ ukážeme, že $\sum_i a_i v_i v_i^T = O_n$ má pouze triviální řešení

$$\forall j \in [n]: \; 0 = v_j^T O_n v_j = v_j^T \left(\sum_i a_i v_i v_i^T \right) v_j =$$

$$= \sum_i a_i (v_j^T v_i)(v_i^T v_j) = \sum_i a_i \langle v_i | v_j \rangle^2 = a_j + \cos^2\varphi \sum_{i \neq j} a_i$$

→ tyto podmínky zapíšeme do matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos^2\varphi & \dots & \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \quad \cos^2\varphi \\ \cos^2\varphi & \dots & \cos^2\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ matice této soustavy je regulární $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0$.

$\Rightarrow$ takže $v_1 v_1^T, \dots v_n v_n^T$ jsou l.n. a $n \leq \binom{d+1}{2}$ $\blacksquare$