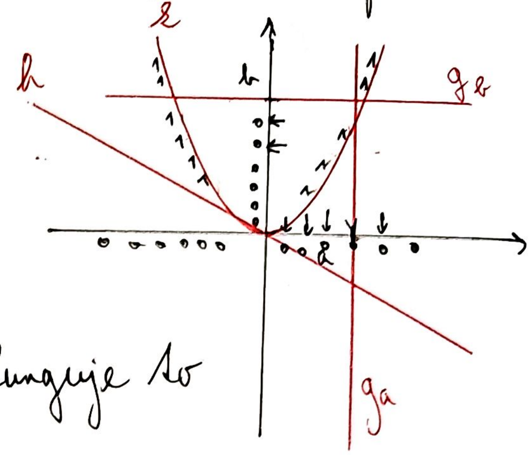
- Analýza funkce více proměnných

→ myšlenka: vždy všechny proměnné (až na jednu) zafixujeme → jako parametry

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}, \quad f(0,0) = ? \Rightarrow \text{chceme spojitě dodefinovat}$$



$$g_a(y) := f(a,y) = \frac{2a^2y}{a^4+y^2} \xrightarrow{y\to 0} 0$$

$$g_b(x) := f(x,b) = \frac{2x^2b}{x^4+b^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$h(x) := f(x,ax) = \frac{2ax^3}{x^4+a^2x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$k(x) := f(x,x^2) = \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1 \Rightarrow \text{nefunguje to}$$

- Metrické prostory

Def: Metrický prostor (X,d) je množina bodů X a metrika $d: X\times X \to \mathbb{R}$

$\forall x,y\in X: d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$

$\forall x,y,z\in X: d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$

$\forall x,y\in X: d(x,y) = d(y,x)$

Příklady:

a) reálná přímka $(\mathbb{R}, |x-y|)$ a komplexní rovina $(\mathbb{C}, |x-y|)$

b) Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_n: (\mathbb{R}^n, d)$, $d(X,Y) = \sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2}$

↳ je to v.p. $\mathbb{R}^n$ se standardním s.s. a normou → $d(u,v) = \|u-v\|$

c) diskrétní prostor (X,d), $d(x,y) = 1$ pro $x\neq y$

d) prostory funkcí → $F(a,b)$ množina všech omezených fcí na $[a,b]$

$d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \mid a\leq x\leq b\}$ ← vzdálenost v nejhorším bodě

$d(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ ← jak se liší globálně

Def: Podprostor m. p. (X,d) na množině $Y\subseteq X$ je (Y,d'), kde $d'(x,y) := d(x,y)$. $\forall x,y\in Y$

Def: Zobrazení $f:(X,d)\to(Y,d')$ je spojité ~ funkční hodnoty blízkých bodů jsou blízko

$\equiv \forall x,y\in X, \forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0: d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\varepsilon$.

👁: Složení spojitých zobrazení je spojité.

$\because \forall x,y\in X, \forall\varepsilon\ \exists\gamma (\forall\gamma\ \exists\delta): d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y))<\gamma \Rightarrow d''(g(f(x)),g(f(y)))<\varepsilon$

Def (konvergence): Pro posloupnost bodů $(x_n)_n$ definujeme limitu takto

$$\lim_n (x_n) = x \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon) \sim \lim_{n\to\infty}(d(x_n,x)) = 0$$

Pokud $\lim_n(x_n)$ existuje, tak $(x_n)_n$ je konvergentní.

Věta: Zobrazení $f:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ je spojité $\Longleftrightarrow$ pro $\forall$ konvergentní $(x_n)_n$ v (X_1,d_1) konverguje i $(f(x_n))_n$ v (X_2,d_2) a $\lim_n(f(x_n)) = f(\lim_n(x_n))$

Dk: $\Rightarrow$: Nechť f je spojitá a $\lim_n(x_n) = x$. Chceme ukázat, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon \ldots \Rightarrow \lim_n f(x_n) = f(x) = f(\lim_n x_n)$.

↳ pro dané ε ze spojitosti f $\exists \delta : d_1(x_n, x) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$.

↳ z konvergence (x_n) pro toto δ $\exists n_0\ \forall n \geq n_0 : d_1(x_n, x) < \delta$.

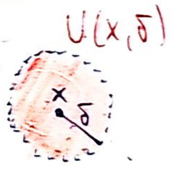
↳ toto je to hledané n_0.

$\Leftarrow$: Pro spor nechť f není spojitá. Potom $\exists x \in X_1$ a $\exists \varepsilon_0$, že $\forall \delta\ \exists x(\delta)$ t. ž. $d_1(x, x(\delta)) < \delta$, ale $d_2(f(x), f(x(\delta))) \geq \varepsilon_0$.

Položme $x_n := x(\frac{1}{n})$. Potom

- $\lim_n(x_n) = x$ $\because$ $d_1(x, x_n) < \frac{1}{n}$
- $f(x_n)$ nemůže konvergovat k $f(x)$ $\because$ $d_2(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$. ∎

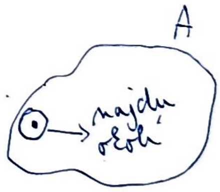
Def: Nechť (X,d) je metrický prostor, $x \in X$ a $\delta \in \mathbb{R}$. Definujeme



1) kruhové okolí $U(x,\delta) := \{y \in X \mid d(x,y) < \delta\}$
2) prstencové okolí $P(x,\delta) := \{y \in X \mid 0 < d(x,y) < \delta\} = U(x,\delta) \setminus \{x\}$

Def: Nechť (X,d_1), (Y,d_2) jsou m. p. a $f: X \to Y$ funkce. Řekneme, že $b \in Y$ je limita funkce f v bodě x_0 a píšeme

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b \equiv \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(b,\varepsilon).$$

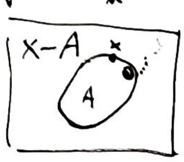


Def: Množina $A \subseteq (X,d)$ je otevřená $\equiv \forall x \in A\ \exists \delta > 0 : U(x,\delta) \subseteq A$.

- X a $\emptyset$ jsou otevřené
- Sjednocení a průnik otevřených množin jsou také otevřené

Def: Množina $A \subseteq (X,d)$ je uzavřená $\equiv \forall (x_n)_n \subseteq A$ konvergentní v X je $\lim_n(x_n) \in A$.

Tvrzení: $A \subseteq X$ je uzavřená v (X,d) $\Longleftrightarrow$ $X \setminus A$ je otevřená.



Dk: $\Rightarrow$: Pro spor nechť $X \setminus A$ není otevřená, pak $\exists x \in X \setminus A$ t. ž. $\forall n \in \mathbb{N} : U(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq X \setminus A$. Vyrobíme posl. $x_n \in U(x,\frac{1}{n}) \cap A$

$\Rightarrow \lim_n(x_n) = x$, ale $x \notin A \Rightarrow A$ není uzavřená ↯

$\Leftarrow$: Pro spor nechť $(x_n)_n \subseteq A$ konverguje k $x \in X \setminus A$. Potom z otevřenosti $X \setminus A$ $\exists \varepsilon > 0 : U(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$ a pro nějaké velké $n : x_n \in U(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$, ale $x_n \in A$ ↯ ∎

X a $\emptyset$ jsou uzavřené

Průnik a sjednocení uzavřených množin jsou také uzavřené.

<u>Def</u>: <u>Vzdálenost</u> bodu x od množiny A je $d(x,A) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$

<u>Def</u>: <u>Uzávěr</u> množiny $A \subseteq (X,d)$ je $\overline{A} := \{x \in X \mid d(x,A) = 0\}$

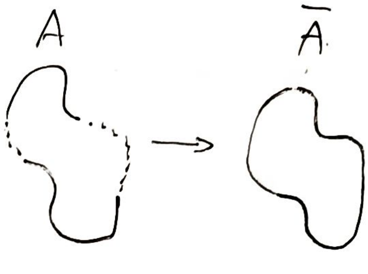
<u>Tvrzení</u>: 1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

2) $A \subseteq \overline{A}$

3) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

5) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$



<u>Tvrzení</u>: $\overline{A}$ je množina všech limit konvergentních posloupností $(x_n)_n \subseteq A$.

<u>Tvrzení</u>: $\overline{A}$ je nejmenší uzavřená množina obsahující A, tedy

$$\overline{A} = \bigcap \{B \text{ uzavřené} \mid A \subseteq B\}$$

<u>Dk</u>: 1) <u>$\overline{A}$ je uzavřená</u>: pokud $(x_n)_n \subseteq \overline{A}$ konverguje k x, tak sestrojíme $y_n \in A$ t.ž. $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Potom $\lim_n (y_n) = x$ a $x \in \overline{A}$.

2) <u>$\forall B$ uzav. : $\overline{A} \subseteq B$</u>: pro $x \in \overline{A}$ zvolíme konvergentní $(x_n)_n \subseteq A \subseteq B$, tak aby $\lim_n (x_n) = x$. $\rightarrow$ B je uzavřená $\Rightarrow$ $x \in B$. ∎

• <u>Vzory a obrazy</u>

- od teď nechť $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

<u>Def</u>: <u>Obraz</u> podmnožiny $A \subseteq X$ v Y je $f[A] := \{f(x) \mid x \in A\}$.

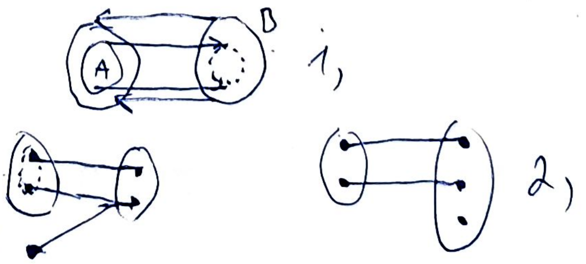
<u>Def</u>: <u>Vzor</u> podmnožiny $B \subseteq Y$ v X je $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

<u>Tvrzení</u>: Platí

1) $f[A] \subseteq B \iff A \subseteq f^{-1}[B]$

2) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$

3) $f^{-1}[f[A]] \supseteq A$



Věta: (Vlastnosti zobrazení): Nechť (X_1, d_1), (X_2, d_2) jsou metrické prostory a nechť $f: X_1 \to X_2$. Následující tvrzení jsou potom ekvivalentní

↳ formálně $f: (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$

1, f je spojité

2, $\forall x \in X_1$ a $\forall$ okolí V bodu $f(x)$ $\exists$ okolí U bodu x t.ž. $f[U] \subseteq V$.

3, $\forall$ otevřenou $U \subseteq X_2$ je vzor $f^{-1}[U]$ otevřený v X_1

4, $\forall$ uzavřenou $A \subseteq X_2$ je vzor $f^{-1}[A]$ uzavřený v X_1

5, $\forall A \subseteq X_1$ je $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

→ ty důkazy jsou technický a hnusný, ale principiálně easy

Dk: Ukážu pouze $1 \Leftrightarrow 2$. f je spojitá $\Leftrightarrow$

$\forall x, y \in X_1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. $\Leftrightarrow$

$\forall x \in X_1$ $\forall \varepsilon$ $\exists \delta$: $y \in \mathcal{U}(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in \mathcal{U}(f(x), \varepsilon)$ $\Leftrightarrow$

$\forall x \in X_1$ $\forall \mathcal{U}(f(x), \varepsilon)$ $\exists \mathcal{U}(x, \delta)$: $f[\mathcal{U}(x, \delta)] \subseteq f[\mathcal{U}(f(x), \varepsilon)]$. ∎

• Ekvivalence metrik

Def: Zobrazení $f: X_1 \to X_2$ je homeomorfismus $\equiv$ je bijektivní, spojité a $f^{-1}: X_2 \to X_1$ je také spojité.

→ pokud $\exists$ homeomorfismus $(X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$, tak jsou tyto prostory homeomorfní ... basically isomorfní.

Def: Vlastnost je topologická $\equiv$ je zachována homeomorfismy.

Příklady:

- konvergence – pokud x_n konverguje v X_1, tak $f(x_n)$ konverguje v X_2.
- otevřenost, uzavřenost, okolí, uzávěr
- spojitost (ale ne stejnoměrná spojitost!)

Def: Metriky d_1, d_2 na téže množině jsou <u>ekvivalentní</u> $\equiv$

$$id : (X, d_1) \to (X, d_2), \quad x \mapsto x$$

je homeomorfismus. Získáme tím prostor, kde všechny topologické věci fungují stejně.

Def: Metriky d_1, d_2 na téže množině jsou <u>silně ekvivalentní</u> $\equiv$

je jedno jestli $1<1<1$ nebo $3<1<2$

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \quad \alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y).$$

Jsou si tedy rovné až na nějaký omezený násobek. $\sim d_1 \in \Theta(d_2)$

Tvrzení: Silně ekvivalentní metriky d_1, d_2 jsou ekvivalentní.

Dk: Zobrazení $id : (X, d_1) \to (X, d_2)$ je určitě bijekce. Musíme ještě ukázat, že je spojité, a že inverze je spojitá. Víme

$$\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y).$$

Spojitost id:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \quad d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ zvolme $\delta := \varepsilon / \beta$: $d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) < \beta \cdot \delta = \beta \cdot \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon.$

Spojitost id^{-1}:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : \quad d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(x,y) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ zvolme $\delta := \alpha \cdot \varepsilon$: $d_1(x,y) \leq \frac{1}{\alpha} d_2(x,y) < \frac{1}{\alpha} \delta = \frac{1}{\alpha} \alpha \varepsilon = \varepsilon.$ $\blacksquare$

- <u>Užitečné ekvivalentní metriky</u>
  - <u>Euklidovská</u> metrika $d_e(x,y) := \sqrt{\sum_i |x_i - y_i|^2}$
  - <u>Součtová</u> metrika $d_s(x,y) := \sum_i |x_i - y_i|$
  - <u>Maximová</u> metrika $d_m(x,y) := \max_i |x_i - y_i|$

  můžeme si vždy vybrat tu metriku, se kterou bude práce easy

Tvrzení: Tyto metriky jsou silně ekvivalentní.

Dk:
- max. a součtová

$$\alpha \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq \sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i| \leq \beta \cdot \max_i |x_i - y_i| \Rightarrow \alpha = 1, \ \beta = n$$

- max. a euklidovská

$$\alpha \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \beta \cdot \max_i |x_i - y_i| \Rightarrow \alpha = 1 \qquad \beta = \sqrt{n}$$

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (\max_i |x_i - y_i|)^2} = \sqrt{n \cdot (\max_i |x_i - y_i|)^2} = \sqrt{n} \cdot \max_i |x_i - y_i| \quad \blacksquare$$

• Jaká zobrazení jsou spojitá?

Def: Pro $(X_1,d_1),\dots(X_n,d_n)$ definujeme na kartézském součinu $\underbrace{\prod_{i=1}^{n} X_i}$

metriku $d((x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n)) := \max_i d_i(x_i,y_i)$.

Tím získáme součin prostorů (X_i,d_i), který značíme

$$\Big(\underbrace{\prod_{i=1}^{n} X_i}, d\Big) =: \prod_{i=1}^{n} (X_i,d_i) = (X_1,d_1)\times(X_2,d_2)\times\dots\times(X_n,d_n).$$

Příklad: Pro reálná čísla s absolutní hodnotou $d(x,y)=|x-y|$ máme

$(\mathbb{R},d)^n = (\mathbb{R}^n, \max_i d(x_i,y_i)) = (\mathbb{R}^n, d_{max}(x,y))$. ... ale $d_{max} \sim$ eukl. m.

Lemma: Projekce $p_j: \prod_{i=1}^{n}(X_i,d_i) \to (X_j,d_j)$, $(x_1,x_2,\dots x_n)\mapsto x_j$ je spojitá.

Dk: Chceme aby

$\forall (x_1,\dots x_n),(y_1,\dots y_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i \ \forall \varepsilon \ \exists \delta: d(\vec{x},\vec{y})<\delta \Rightarrow d_j(p_j(\vec{x}),p_j(\vec{y}))<\varepsilon.$

$$\max_i d_i(x_i,y_i) < \delta \Rightarrow d_j(x_j,y_j)<\varepsilon$$

$\Rightarrow$ stačí zvolit $\delta := \varepsilon$, potom

$$d_j(x_j,y_j) \le \max_i d_i(x_i,y_i) < \delta = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Věta: Nechť $f_i: (Y,d)\to(X_i,d_i)$ pro $i=1,\dots n$ jsou libovolná spojitá zobrazení.
Potom definujme zobrazení $f:(Y,d)\to\prod_{i=1}^{n}(X_i,d_i)$, které splňuje
$p_i \circ f = f_i$, neboli $f(y)=(f_1(y),f_2(y),\dots f_n(y))$.
Tvrdíme, že f je spojité.

Dk: Chceme aby

$\forall y_1,y_2\in Y \ \forall\varepsilon \ \exists\delta: d(y_1,y_2)<\delta \Rightarrow d'(f(y_1),f(y_2))<\varepsilon.$

Ze spojitosti f_i víme $\qquad \max_i d_i(f_i(y_1),f_i(y_2))$

$\forall y_1,y_2\in Y \ \forall\varepsilon\ \exists\delta: d(y_1,y_2)<\delta \Rightarrow d_i(f_i(y_1),f_i(y_2))<\varepsilon$ pro všechna f_i $\blacksquare$

Součet a součin spojitých zobrazení je spojitý.

Též jsme dokázali, že složení spojitých zobrazení je spojité.

Důsledek: Polynomy jsou spojité.

Dk: Například pro 2 proměnné máme $P^2(x,y)=\sum_{0\le i,j\le n} a_{ij}x^iy^j$.
Ale $x=p_1(x,y)$ a $y=p_2(x,y)$, takže sčítáme a násobíme spojité věci $\blacksquare$

• <u>Příklad</u>: Lze tyto funkce spojitě dodefinovat?

1, $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ ... definované všude kromě $(0,0)$

↳ je to podíl polynomů $\Rightarrow$ spojité na celém D_f

co v $(0,0)$?

• $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$
• $f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$

} tohle nepůjde, měli bychom $f(0,0) = 0 = 1$

2, $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

• $f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$
• $f(x,x) = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2}$, $\lim_{x\to 0} f(x,x) = 0$

} možná půjde dodefinovat $f(0,0) := 0$.

$\Rightarrow$ ověříme z definice spojitosti, že $f_1(x,y) := \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ f(x,y), & \text{jinak} \end{cases}$ je spojitá.

Protože f je spojitá na celém svém D_f, tak stačí ověřit bod $(0,0)$.

$$\forall (x,y)\ \forall \varepsilon\ \exists \delta : d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow d'(f_1(x,y), f_1(0,0)) < \varepsilon.$$

$\rightarrow$ d' je absolutní hodnota, d Euklidovská metrika

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|y| = |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \text{zvolíme } \delta := \varepsilon$$

$\rightarrow$ protože Euklidovská metrika je ekvivalentní součtové, tak jsme mohli použít součtovou a dokazovat to pro $|x|+|y| < \delta$.

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |y| \le |y| + |x| \Rightarrow \text{zvolme } \delta := \varepsilon.$$

• <u>Stejnoměrná spojitost</u>

<u>Def</u>: Zobrazení $f:(X,d) \to (Y,d')$ je <u>stejnoměrně spojité</u> $\equiv$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x,y \in X : d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

$\rightarrow$ Normální spojitost:

$$\forall x,y \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

👁 stejnoměrná spojitost je mnohem silnější podmínka než normální souvislost.

$\rightarrow$ budeme ji potřebovat u více-násobných integrálů

ℝ s absolutní h. → → Euklidovský prostor

• Parciální derivace

Def: Reálná funkce o n proměnných je $f: U \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq E_n$.

→ v případě fcí jedné jedné proměnné byla U většinou nějaký interval, pro více proměnných je definiční obor zpravidla složitější.

Def: Pro funkci $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U je otevřená, a bod $\underset{\sim}{a} \in U$ definujeme funkci

$$\phi_k(t) := f(a_1, a_2, \dots a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots a_n).$$

Parciální derivace funkce f podle proměnné x_k v bodě $\underset{\sim}{a}$ je obyčejná derivace funkce ϕ_k v bodě a_k.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{a}) := \frac{d\phi_k}{dt}(a_k) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi_k(a_k+h) - \phi_k(a_k)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \dots a_{k-1}, a_k+h, a_{k+1}, \dots a_n) - f(\underset{\sim}{a})}{h}.$$

→ basically zapomenu, že ty ostatní proměnné jsou proměnné.

Když $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{a})$ existuje pro všechna $\underset{\sim}{a}$ v nějaké oblasti U, tak dostaneme funkci $\frac{\partial f}{\partial x_k}: U \to \mathbb{R}$.

Intuice: Geometricky to je směrnice tečny funkce f v daném bodě a ve směru příslušné osy

• Jak je to se spojitostí?

- pro funkce 1 proměnné platí: derivace v bodě $a \Rightarrow$ spojitost v a.
- platí to pro parciální derivace funkce více proměných?

→ funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ není v $(0,0)$ spojitá (viz. příklad)

↳ ale má tam obě parciální derivace

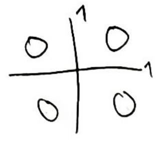
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{0}{h^2+0} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h+0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0.$$

↘ nebo ještě horší

$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \cdot y = 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$

⇒ EXISTENCE PARCIÁLNÍCH DERIVACÍ NEIMPLIKUJE SPOJITOST



p. derivace jsou všude 0

• Totální diferenciál

→ protože parciální derivace neimplikují spojitost, tak budeme potřebovat něco silnějšího.

Ekvivalentní definice derivace

$$\frac{df}{dx}(a) = A \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A$$

$\to f(a+h) \approx f(a) + Ah$

$\iff$ pro $h \to 0$ máme $f(a+h) - f(a) \to Ah$

$\iff f(a+h) - f(a) = Ah +$ něco malého

$\iff \exists$ spojitá μ t.ž. $\lim_{h\to 0} \mu(h) = 0$ a platí

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

$\Rightarrow$ potom zpětně mám

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + \frac{|h|}{h} \cdot \mu(h) \to 0$$

Def: Pro $x \in \mathbb{E}_n$ definujeme $\|x\| := \max_i |x_i|$.

↳ potřebujeme nějak zobecnit absolutní hodnotu

↳ tohle je $\|x\| = d_{max}(x, 0)$, takže ekvivalentně můžeme použít i Euklidovskou metriku a $\|x\|$ vnímat jako $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

→ nebo součtovou metriku $\|x\| = |x_1| + \dots + |$

Def: Funkce f má totální diferenciál v bodě $\underset{\sim}{a} = (a_1, \dots a_n) \equiv$

$\exists$ funkce μ, spojitá na nějakém okolí nuly $\underset{\sim}{0} \in \mathbb{R}^n$ t.ž. $\mu(\underset{\sim}{0}) = 0$ a $\exists$ čísla $A_1, \dots A_n$, pro která

$$f(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{a}) = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i + \|\underset{\sim}{h}\| \cdot \mu(\underset{\sim}{h}). \quad \dots \underset{\sim}{h} = (h_1, h_2, \dots h_n)$$

Nebo pomocí skalárního součinu

$$f(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{h} + \underbrace{\|\underset{\sim}{h}\| \cdot \mu(\underset{\sim}{h})}_{\varphi(\underset{\sim}{h})} \quad \dots \text{ekvivalentní } \varphi(\underset{\sim}{h}) = o(\|\underset{\sim}{h}\|)$$

↳ $f = o(g) \equiv \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Intuice: Pro funkci 1 proměnné je

$f(a+h) \approx f(a) + Ah$ lineární aproximace pomocí přímky

Pro 2 proměnné máme

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \approx f(a_1, a_2) + A_1 h_1 + A_2 h_2,$$

což je lineární aproximace pomocí tečné roviny.

Příklad: $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ukaž, že v bodě $(1,1)$ je $A = (2,2)$.

$$f(1+h_1, 1+h_2) - f(1,1) = 2h_1 + 2h_2 + \|h\|\mu(h)$$

$$(1+h_1)^2 + (1+h_2)^2 - 2 = 2h_1 + 2h_2 + \|h\|\mu(h)$$

$$\Rightarrow \mu(h) = \frac{h_1^2 + h_2^2}{\|h\|} = \sqrt{h_1^2+h_2^2} \Rightarrow \mu(0,0) = 0 \checkmark$$

Značení: Totální diferenciál funkce f v bodě $\underset{\sim}{a}$ značíme jako

$$D_f^a(\underset{\sim}{h}) := \sum_{i=1}^{n} A_k h_k \quad , \quad \text{čili} \quad f(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{a}) = D_f^a(\underset{\sim}{h}) + \|h\|\mu(h).$$

$\longrightarrow$ je to nějaké lineární zobrazení

Tečná rovina: Tečná rovina k funkci $f(x,y)$ v bodě $a = (a_1, a_2)$ je

$$T_f^a(x,y) = f(a_1,a_2) + D_f^a(\underbrace{x-a_1}_{h_1}, \underbrace{x-a_2}_{h_2}) = f(a_1,a_2) + A_1(x-a_1) + A_2(x-a_2).$$

Def: Gradient je operátor definovaný pro funkci $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ jako

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Věta: Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě $\underset{\sim}{a}$. Potom platí

1) f je spojitá v $\underset{\sim}{a}$

2) f má všechny parciální derivace v $\underset{\sim}{a}$, a sice $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{a}) = A_k$

Dk: 1) Chceme aby

$$\forall \underset{\sim}{x}\ \forall \varepsilon\ \exists \delta : d(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{a}) < \delta \Rightarrow |f(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{a})| < \varepsilon.$$

$\rightarrow$ dosadíme do definice TD $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{h} \Rightarrow \underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{a}$

$$f(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{A}\cdot(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a}) + \|x-a\|\mu(x-a) \quad , \quad \text{čili}$$

$$|f(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{a})| \leq |\underset{\sim}{A}\cdot(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{a})| + \|x-a\|\cdot|\mu(x-a)|$$

i když ε je libovolně malé, tak umím zvolit δ, aby pravá strana šla k nule, takže $< \varepsilon$

$\rightarrow$ když uděláme δ dostatečně malé $(\delta \to 0)$, tak pravá strana $\to 0$ ■

2)
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots a_k + h, \dots a_n) - f(\underset{\sim}{a})}{h} \quad \dots \text{do TD dosadím } \bar{h} := (0, \dots 0, \overset{k}{h}, 0 \dots 0)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\underset{\sim}{A}\cdot\bar{h} + \|\bar{h}\|\mu(h)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(A_k h + |h|\mu(h)\right) = A_k + \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}\mu(h) = A_k \quad ■$$

Důsledek: TD můžeme psát jako $f(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{a}) = \nabla f(\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{h} + o(\|h\|)$

Příklad: $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\ln(1+x\cdot y)$. Urči TD všude, kde existuje/

... mimo $(0,0)$ existuje (protože spojité PD)

→ co v $(0,0)$?

→ zkusme dodefinovat $f(0,0):=0$. Protože TD ⇒ spojitost, tak musíme nejprve ověřit spojitost f v $(0,0)$.

$d((x,y),(0,0))<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$ ... použijeme d = součtová m

$$\left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\ln(1+xy)\right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}\cdot\left|\frac{\ln(1+xy)}{xy}\right|\cdot|xy|$$

→ zvolíme nějaké malé δ ... $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ ... aby $\frac{\ln(1+xy)}{xy}\leq 2$ (stačí)

nebo pro velké ε klidně něco menšího

- **Užitečné nerovnosti:**

$(x+y)^2\leq 4(x^2+y^2)$
$|xy|\leq x^2+y^2$
$|x+y|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}$ → lehce z $|x+y|\leq\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow |f(x,y)|\leq \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\cdot 2\cdot(x^2+y^2)\leq 2\underbrace{(|x|+|y|)}_{d(x,y)} \Rightarrow \delta:=\frac{\varepsilon}{2} \quad ✓$$

Takže f je v 0 spojitá... má tam TD?

$$f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)=f(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h_1+\frac{\partial f}{\partial y}h_2+\|h\|\cdot\mu(h)$$

→ $f(x,0)=\frac{x}{x^2}\ln(1)=0=f(0,y)$ ⇒ na osách je f nulová!
⇒ PD tam jsou nulové

→ $f(h_1,h_2)=\|h\|\,\mu(h)$ → $\mu(h)=\frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|}$, chci $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\mu(h)=0$

$$\lim_{\|h\|\to 0}\mu(h)=\lim_{\|h\|\to 0}\frac{h_1+h_2}{h_1^2+h_2^2}\ln(1+h_1h_2)\cdot\frac{1}{|h_1|+|h_2|}\overset{?}{=}0$$

↳ neplatí to, protože pro $h_1=h_2$ máme

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h}{2h^2}\cdot\frac{\ln(1+h^2)}{2|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h^2)}{h^2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h}{2|h|}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}$$

neexistuje: $h>0 \ldots \frac{1}{2}$, $h<0 \ldots -\frac{1}{2}$

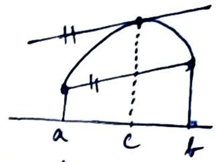
⇒ f není možné v $(0,0)$ dodefinovat tak, aby tam měla TD i

• Spojité parciální derivace ⇒ TD

Věta: Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť f má na nějakém okolí $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n$ PD.
1) Jsou-li tyto PD omezené, potom je f v bodě $\underset{\sim}{a}$ spojitá.
2) Jsou-li tyto PD spojité v $\underset{\sim}{a}$, potom má f v bodě $\underset{\sim}{a}$ TD.

Lemma (Lagrangeova věta): Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a má na (a,b) derivaci. Potom $\exists c \in (a,b)$ t.ž.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{neboli} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$



nebo také $\exists\, 0<\theta<1$: $f(b)-f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a)$.

Dk: Pro $\underset{\sim}{h} = (h_1, \dots h_n)$ označíme

$\underset{\sim}{h}^0 := (0,0,\dots 0) = \underset{\sim}{0}$

$\underset{\sim}{h}^1 := (h_1, 0, \dots 0)$ až nakonec $\underset{\sim}{h}^n := (h_1, \dots h_n) = \underset{\sim}{h}$

$\underset{\sim}{h}^2 := (h_1, h_2, 0, \dots 0)$

BÚNO $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$. Pokud $\underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}$, tak $g(x_1, \dots x_n) := f(x_1+a_1, \dots x_n+a_n)$ je posunutí f tak, aby $g(\underset{\sim}{0}) = f(\underset{\sim}{a})$. Takže pro 2) stačí dokázat

$$f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0}) = \nabla f(\underset{\sim}{0}) \cdot \underset{\sim}{h} + o(\|h\|). \quad \text{Máme}$$

$$\to f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0}) = f(\underset{\sim}{h}^n) - f(h^{n-1}) + f(h^{n-1}) - f(h^{n-2}) + \dots + f(h^1) - f(h^0)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(h^k) - f(h^{k-1}) \quad \Rightarrow P_k := f(h^k) - f(h^{k-1})$$

Definujme

$$\varphi^k(t) := f(h_1, h_2, \dots h_{k-1}, t, 0, \dots 0)$$

DŮKAZ 2)

Takže podle Lagrangeovy věty

$$P_k = \varphi^k(h_k) - \varphi^k(0) = h_k \cdot (\varphi^k)'(\theta_k h_k), \quad \text{pro } \theta_k \in (0,1)$$

$$= h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(h_1, h_2, \dots h_{k-1}, \theta_k h_k, 0, \dots 0)$$

→ k-tý kanonický vektor

$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{\theta}^k)\, h_k, \quad \text{pro } \underset{\sim}{\theta}^k := \underset{\sim}{h}^{k-1} + \theta_k h_k \underset{\sim}{e}^k$$

*
$$\Rightarrow f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0}) = \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{\theta}^k)\, h_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{0})\, h_k}_{\nabla f(\underset{\sim}{0}) \cdot \underset{\sim}{h}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{\theta}^k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{0})\right) h_k}_{\mu(\underset{\sim}{h})}$$

→ zbývá ukázat $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\mu(h)}{\|h\|} = 0$

→ zřejmě však

$$\|h\| \to 0 \Rightarrow \underset{\sim}{\theta}^k \to \underset{\sim}{0} \quad \Rightarrow \frac{|\mu(h)|}{\|h\|} \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta^k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underset{\sim}{0})\right|}_{\to 0 \text{ ze spojitosti } \frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ v bodě } \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}} \cdot \overbrace{\frac{|h_k|}{\|h\|}}^{\leq 1} \to 0.$$

■

* $\boxed{\text{DŮKAZ 1)}}$ Víme:

$$f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta^k)\, h_k$$

→ abychom ukázali, že f je v $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$ spojitá, tak

$$\forall \underset{\sim}{h} \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ d(\underset{\sim}{h}, 0) > \delta \Rightarrow d(f(\underset{\sim}{h}), f(\underset{\sim}{0})) < \varepsilon$$

→ čili chceme aby pro $\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}$ bylo $|f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0})| \to 0$.

$$|f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0})| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\theta^k)\right| |h_k|.$$

→ protože PD jsou omezené nějakou konstantou C, tak

$$\leq C \cdot \sum_{k=1}^{n} |h_k| = C \cdot \|h\|,$$

když za $\|h\|$ zvolíme součtovou metriku.

→ Nyní zřejmě když $\|h\| \to 0$, tak $|f(\underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{0})| \to 0$. ■

Důsledek: Spojité PD $\Rightarrow$ TD $\Rightarrow$ PD

Def: Pro $U \subseteq \mathbb{R}^n$ značí $C^k(U)$ třídu funkcí, které mají spojité všechny parciální derivace až po k-tý řád pro $\forall a \in U$.

$\Rightarrow$ takže pokud $f \in C^1(U)$, potom má f na U spojité PD.

- Směrová parciální derivace

$\rightarrow$ klasické PD jsou směrnice tečen ve směru dané osy.

Def Derivace funkce $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U je otevřená, ve směru $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underset{\sim}{0}\}$ v bodě $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n$ je číslo

$$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(\underset{\sim}{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\underset{\sim}{a} + h \cdot \underset{\sim}{v}) - f(\underset{\sim}{a})}{h}$$ značí se též $f_v(a)$ nebo $D_v f(a)$.

👁 : Pokud definujeme $g(t) := f(\underset{\sim}{a} + t \cdot \underset{\sim}{v})$, tak $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = g'(0)$.

Dk: $$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underset{\sim}{a} + h \cdot \underset{\sim}{v}) - f(\underset{\sim}{a})}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(a). \blacksquare$$

Tvrzení: Pokud $f \in C^1$, potom pro směrovou derivaci platí

* $$\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{v}}(\underset{\sim}{a}) = \nabla f(\underset{\sim}{a}) \cdot \underset{\sim}{v}$$ $\rightarrow$ skalární součin

Intuice: Pokud $f \in C^1$, potom má v bodě $\underset{\sim}{a}$ TD, takže místo toho, abychom zkoumali chování f ve směru $\underset{\sim}{v}$ od $\underset{\sim}{a}$, tak zkoumáme chování lineární aproximace f v $\underset{\sim}{a}$ ve směru $\underset{\sim}{v}$.

- Geometrický význam gradientu

$\rightarrow$ klasická derivace = míra změny $\Rightarrow$ kladná – roste, záporná – klesá, nulová – stagnuje

$\Rightarrow$ vektor $\nabla f(a)$ ukazuje ve směru nejrychlejšího růstu funkce f od toho bodu $\underset{\sim}{a}$.

$\Rightarrow$ pokud jsem v sedle / extrému, tak $\nabla f(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{0}$.

$\Rightarrow$ pokud $\frac{\partial f}{\partial v}(\underset{\sim}{a}) = \nabla f(\underset{\sim}{a}) \cdot \underset{\sim}{v} = 0$, tak $\nabla f(\underset{\sim}{a}) \perp \underset{\sim}{v}$,

takže v ukazuje ve směru vrstevnice f

↳ vrstevnice je množina všech bodů, kde f má stejnou hodnotu

↳ f se na té vrstevnici nemění $\Rightarrow$ směrová derivace $= 0$.

* **Důsledek:** Pokud má f v bodě $\underset{\sim}{a}$ derivaci ve směru $\underset{\sim}{h} = (h_1, h_2, \dots h_n)$, ale tato derivace není lineární kombinace složek $\underset{\sim}{h}$, tak f v $\underset{\sim}{a}$ nemá TD.

• **Počítání parciálních derivací**

- aritmetická pravidla (součet, konstantní násobek) fungují stejně jako pro obyčejné derivace ... protože PD vlastně je obyčejná derivace.

• **PD složené funkce**

Věta: Nechť funkce $g_k(t)$ pro $k=1,\dots n$ mají vlastní derivace v bodě $b\in\mathbb{R}$.
Definujme $g(t):=(g_1(t), g_2(t),\dots g_n(t))$. Označme $\underset{\sim}{a}:=g(b)$.
Pokud má funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ v bodě $\underset{\sim}{a}$ TD, potom má funkce

$$F(t):=f(g(t)) = f(g_1(t),\dots g_n(t))$$

derivaci v bodě b, a sice

tohle jsme nedefinovali, ale snad je zřejmé, co to znamená

$$F'(b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(\underset{\sim}{a})}{\partial x_k}\cdot g_k'(b) = \nabla f(g(b))\cdot g'(b) \to \text{skalární součin}$$

Dk:

$$\frac{1}{t}(F(b+t)-F(b)) = \frac{1}{t}(f(g(b+t))-f(g(b))) \dots \text{ tohle pro } t\to 0 \text{ je } F'(b)$$

Protože F má v bodě $\underset{\sim}{a}=g(b)$ TD, tak

$$f(g(b+t))-f(g(b)) = f(g(b)+g(b+t)-g(b))-f(g(b)) = f(\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{h})-f(\underset{\sim}{a})$$

$$\hookrightarrow \underset{\sim}{h}:=g(b+t)-g(b)$$

$$=\nabla f(\underset{\sim}{a})\cdot\underset{\sim}{h} + \mu(\underset{\sim}{h})\cdot\|\underset{\sim}{h}\|, \text{ kde } \lim_{\|h\|\to 0}\mu(\underset{\sim}{h})=0.$$

Vydělíme t a pro $\|h\|$ použijeme maximovou metriku

$$\frac{1}{t}(F(b+t)-F(b)) = \nabla f(\underset{\sim}{a})\cdot\frac{g(b+t)-g(b)}{t} + \mu(\underset{\sim}{h})\cdot\frac{1}{t}\cdot\max_k|\overbrace{g_k(b+t)-g_k(b)}^{h_k}|$$

Když $t\to 0$, tak máme

$$F'(b) = \underbrace{\nabla f(\underset{\sim}{a})\cdot g'(b)}_{\text{to co chceme}} + \underbrace{\mu(\underset{\sim}{h})}_{*}\cdot\underbrace{\max_k|g_k'(b)|}_{\text{omezené}}$$

podle věty v projektce

$*$ g_k mají v b derivaci, takže jsou v b spojité $\Rightarrow$ g je v b také spojitá
$\Rightarrow$ když $t\to 0$, tak $g(b+t)\to g(b)$, takže $\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}\Rightarrow\mu(\underset{\sim}{h})\to 0$ ■

Příklad:

$$f(x,y)=\sin(xy),\quad g_1(t)=\ln(t),\quad g_2(t)=t^2$$

$$\Rightarrow F(t):=f(g_1(t),g_2(t)) = \sin(\ln(t)\cdot t^2) \quad\Rightarrow \text{ urči } F'(t)$$

$$F'(t)=\nabla f(g(t))\cdot g'(t) = \left\langle (y\cos(xy), x\cos(xy))(\ln(t), t^2); \left(\frac{1}{t}, 2t\right)\right\rangle$$

$$=\frac{1}{t}\cdot t^2\cos(t^2\ln(t)) + 2t\cdot\ln(t)\cos(t^2\ln(t))$$

normálně: $F'(t)=\cos(\ln(t)\cdot t^2)\cdot\left(\frac{1}{t}t^2+\ln(t)\cdot 2t\right)$ ✓

Věta (Řetízkové pravidlo): Nechť mají funkce $g_k : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ pro $k = 1, \dots m$ parciální derivace v $b = (b_1, \dots b_r)$. Definujeme $g(t) := (g_1(t), g_2(t), \dots g_m(t))$. Označme $a := g(b)$. Pokud má funkce $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ v bodě a TD, potom funkce

$$F(t) := f(g(t)) = f(g_1(t), \dots g_m(t))$$

má v b všechny parciální derivace, a sice

$$\frac{\partial F(b)}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(b)}{\partial t_i}$$

Dk: Skládáme

$$\mathbb{R}^r \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

i-tý k. vekt.

$$\frac{\partial F(b)}{\partial t_i} = \lim_{h \to 0} \frac{F(b_1, \dots b_{i-1}, b_i + h, b_{i+1}, \dots b_r) - F(b)}{h} =$$

$$= \phi'(b_i), \quad \text{kde } \phi(x) := F(b_1, \dots b_{i-1}, x, b_{i+1}, \dots b_r) = F(b + e^i(x - b_i))$$

Abychom mohli použít předchozí větu, tak definujeme

$$\hat{g}_k(x) := g_k(b + e^i(x - b_i)) \quad \text{a} \quad \hat{g}(x) := (\hat{g}_1(x), \dots \hat{g}_m(x))$$

Takže $\hat{g}_k(b_i) = g_k(b)$ a $\hat{g}(b_i) = a$. Máme

$$\phi(x) = F(b + e^i(x - b_i)) = f(g(b + e^i(x - b_i))) = f(\hat{g}(x))$$

$$\Rightarrow \quad \phi'(b_i) = \nabla f(\hat{g}(b_i)) \cdot \hat{g}'(b_i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_k} \cdot \hat{g}_k'(b_i)$$

Jenomže $\hat{g}_k'(b_i) = \frac{\partial g_k}{\partial t_i}(b)$ … to je doslova definice PD. ∎

Značení: Řetízkové pravidlo je možné zapsat jako násobení matic, pokud trochu zobecníme gradient.

Def: Gradientem funkce $f = (f_1, f_2, \dots f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kde $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rozumíme matici $m \times n$

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i = 1, \dots m \\ j = 1, \dots n}} = (\nabla f_1, \nabla f_2, \dots \nabla f_m)^T$$

→ klasický gradient

→ transponovaná

Ekvivalentně můžeme tedy řetízkové pravidlo zapsat jako

$$\nabla(g \circ f) = (\nabla f)(g) \cdot \nabla g$$

→ používám $(g \circ f)(x) = f(g(x))$

→ pro funkce jedné proměnné to je prostě $\frac{d}{dx}(g \circ f) = f'(g) \cdot g'$

Příklad $f(x,y) = x e^{x+y}$, $g_1(r,\theta) = r\cdot\cos\theta$, $g_2(r,\theta) = r\cdot\sin\theta$

$\Rightarrow$ složení $F(r,\theta) := f(g_1(r,\theta), g_2(r,\theta)) = r\cos\theta\cdot e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g=(g_1,g_2)} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ b=(r,\theta) & & a=g(b) & & f(a)=f(g(b)) \end{array}$$

Podmínky:
f má spojité PD $\Rightarrow$ TD
g_1, g_2 mají PD
$\Rightarrow$ můžu řetízkovat

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x+y} + x\cdot e^{x+y},\ x\cdot e^{x+y}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla g_1(r,\theta) = (\cos\theta,\ -r\sin\theta) \\ \nabla g_2(r,\theta) = (\sin\theta,\ r\cos\theta) \end{array}\right\} \nabla g = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \nabla g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\nabla F = \nabla(g\circ f) = (\nabla f)(g)\cdot\nabla g = (\nabla f)(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot\nabla g \qquad \begin{array}{cc} & \boxed{\nabla g} \\ \boxed{\nabla f} & \boxed{\nabla F} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial r} = (1+r\cos\theta)\cdot e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\cos\theta + r\cos\theta\, e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\sin\theta.$$

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = (1+r\cos\theta)\cdot e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot(-r\sin\theta) + r\cos\theta\, e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot r\cos\theta.$$

Příklad: Dokaž vzorce pro obyčejnou derivaci součinu a podílu funkcí 1 proměnné.

- **součin:** $f(x), g(x) \Rightarrow h(u,v) = u\cdot v$

$$\Rightarrow f\cdot g = h(f,g)$$

$$\Rightarrow (f\cdot g)' = \left(\frac{\partial h}{\partial u}(f,g), \frac{\partial h}{\partial v}(f,g)\right)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \end{pmatrix} = (g, f)\cdot\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = f'g + fg'$$

- **podíl** $f(x), g(x) \Rightarrow h(u,v) = \frac{u}{v}$

$$\Rightarrow \frac{f}{g} = h(f,g)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

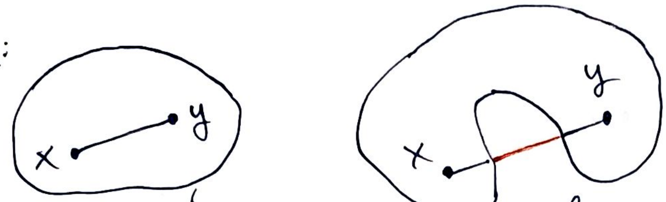
$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g}\cdot f' - \frac{f}{g^2}g' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

• Lagrangeova věta pro více proměnných

Def: Podmnožina $U \subseteq E_n$ je konvexní $\equiv$

$$\forall \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in U \;\; \forall s \in [0,1]: \; (1-s)\underset{\sim}{x} + s\underset{\sim}{y} = \underbrace{\underset{\sim}{x} + s(\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x})}_{\text{parametrická rovnice úsečky } x \bullet\!\!-\!\!\bullet y} \in U.$$

Ukázka:



konvexní   nekonvexní

Opakování: Lagrangeova věta v jedné proměnné říká následující: → actually derivace ⇒ spojitost

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a má na (a,b) derivaci.

Pak existuje $c \in (a,b)$ splňující | nebo ekviv. $\exists \theta \in (0,1)$ splňující

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \qquad\qquad f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

Věta: Nechť $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U je konvexní a otevřená, $f \in C^1(U)$.

Potom pro libovolné dva body $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in U$ $\exists \theta \in (0,1)$ t.ž.

$$f(\underset{\sim}{b}) - f(\underset{\sim}{a}) = \nabla f(\underset{\sim}{a} + \theta(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}))(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}). \quad \to \underset{\sim}{a} + \theta(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{c} \in \text{úsečka } \underset{\sim}{a} \bullet\!\!-\!\!\bullet \underset{\sim}{b}$$

Dk: Definujme $g_k(s) := a_k + s(b_k - a_k)$ a $g(s) := (g_1(s), \dots g_n(s)) = \underset{\sim}{a} + s(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a})$

Dále $F(s) := f(g(s)) = f(\underset{\sim}{a} + s(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}))$. Podle řetízkového pravidla

$$F'(s) = (\nabla f)(g(s)) \cdot g'(s) \qquad \to g_k'(s) = b_k - a_k \Rightarrow g'(s) = \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}$$

Všimněme si, že $F(1) = f(b)$ a $F(0) = f(a)$. Navíc má F pouze jednu proměnnou, takže podle obyčejné L.v. $\exists \theta \in (0,1)$ splňující

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot (1-0) = F'(\theta)$$

$$= (\nabla f)(g(\theta)) \, g'(\theta) = \nabla f(\underset{\sim}{a} + \theta(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}))(\underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{a}). \quad \blacksquare$$

Poznámka: Tato formule se často používá ve tvaru $b = x + h$, $a = x \Rightarrow b - a = h$

$$f(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{x}) = \nabla f(\underset{\sim}{x} + \theta \underset{\sim}{h}) \cdot \underset{\sim}{h} \quad , \text{ pro nějaké } \theta \in (0,1).$$

V porovnání s TD:

$$f(\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{h}) - f(\underset{\sim}{x}) = \nabla f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{h} + o(\|h\|)$$

→ když $\|h\| \to 0$, tak jsou tyto formule stejné.

• Záměnnost pořadí parciálních derivací

Značení: Parciální derivace vyšších řádů značíme jako

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Pokud vícekrát za sebou derivujeme podle té samé proměnné, tak píšeme

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

Věta: Nechť $f(x,y): U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $f \in C^2(U)$. Potom na U platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{neboli} \quad \forall \underset{\sim}{a} \in U: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underset{\sim}{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underset{\sim}{a})$$

Dk: Pokud na chvíli zapomeneme, že v definici PD je limita, tak máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

Obdobně to můžeme udělat pro $\partial y \to \partial x$ a dostaneme výraz

$$\frac{1}{h^2}\Big(f(x+h,y+h) - f(x,y+h) - f(x+h,y) + f(x,y)\Big) =: F(h)$$

Není pravda (v obecném případě), že $\lim_{h \to 0} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, protože v definici PD je limita, takže to vlastně je limita v limitě.

Zafixujme h a definujme

$$\left.\begin{aligned} \varphi(y) &:= f(x+h,y) - f(x,y) \\ \psi(x) &:= f(x,y+h) - f(x,y) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} F(h) &= \frac{1}{h^2}\big(\varphi(y+h) - \varphi(y)\big) \quad (1) \\ F(h) &= \frac{1}{h^2}\big(\psi(x+h) - \psi(x)\big) \quad (2) \end{aligned}$$

Zkusme upravit (1). Funkce $\varphi \in C^1$, takže můžeme dosadit do obyčejné Lagrangeovy formule a pro nějaké $\theta_1 \in (0,1)$ máme

$$F(h) = \frac{1}{h^2}\big(\varphi(y+h) - \varphi(y)\big) = \frac{1}{h^2}\varphi'(y+\theta_1 h)\cdot h = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+\theta_1 h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\theta_1 h)\right)$$

Protože $\frac{\partial f}{\partial y} \in C^1$, tak opět podle L.V. – tentokrát měníme proměnnou x

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h)\right) = *$$

jde to přes obyčejnou ⇒ U nemusí být konvex

$$* = \square$$

pro nějaká θ_1, θ_2 mezi 0 a 1. Rovnice (2) dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_4 h, y+\theta_3 h)\right) = \square$$

Pro $h \to 0$ máme $(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h) \to (x,y)$. Protože $\frac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá, tak $\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Navíc protože $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{\partial y}\right)$ je spojitá, tak

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h)\right) \to \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$ Obdobně pro (2). Čili $\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ ∎

Důsledek: Nechť $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^k(U)$. Potom hodnoty parciálních derivací do řádu k na U nezáleží na pořadí derivování.

Takže pro $r \le k$ jsou všechny PD řádu r rovny

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \cdots \partial x_n^{r_n}}, \quad \text{kde } r_1 + r_2 + \dots + r_n = r.$$

• Kompaktní metrické prostory

→ nejprve trocha opakování

Def: kompaktní interval je uzavřený omezený interval. $[a,b]$ $a,b \in \mathbb{R}$

Věta (Bolzano–Weierstrassova): Z každé posloupnosti na kompaktním intervalu je možno vybrat konvergentní podposloupnost.

Dk:

Lemma: Každá reálná posloupnost má monotónní podposloupnost.

Důsledek: Nechť $(a_n) \subset [a,b]$ a (b_n) je její omezená podposloupnost.

(b_n) je omezená a monotónní $\Rightarrow$ konverguje ke svému supremu / infimu

→ navíc $\because$ $[a,b]$ je kompakt., tak konverguje k nějakému $x \in [a,b]$.

Dk: Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, najdeme monotónní podposloupnost. Definujme

$$M := \{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \ge n : a_n \ge a_m \} \quad \dots \quad 5 \in M \iff a_5 \ge a_6, a_7, a_8, \dots$$

- Pokud je M nekonečná, potom prvky M tvoří posloupnost $n_1 > n_2 > n_3 > \dots$

  $a_{n_k} \ge a_{n_{k+1}} \Rightarrow (a_{n_k})_k$ je nerostoucí

- Pokud je M konečná, tak nechť $n_1 > \max(M)$. Zřejmě $n_1 \notin M$, takže $\exists n_2 > n_1 : a_{n_2} > a_{n_1}$. Protože $n_2 \notin M$, tak $\exists n_3 > n_2 : a_{n_3} > a_{n_2}$ atd.

  Dostaneme rostoucí posloupnost $(a_{n_k})_k$. ■

→ tato věta nám dává zobecnitelnou charakterizaci kompaktních intervalů

→ další užitečné věty z MA1:

Tvrzení: Pokud $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konverguje k A, potom každá podposloupnost (a_n) také konverguje k A.

Def: Nechť (X,d) je m.p. Množina $A \subseteq X$ je kompaktní $\equiv \forall$ posloupnost v A obsahuje konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v A.

→ pokud m.p. (X,d) nazveme kompaktním, tak tím myslíme, že X je komp.

Tvrzení: Nechť (X,d) je kompaktní m.p. Potom pro libovolnou $Y \subseteq X$ platí
$$Y \text{ je kompaktní} \iff Y \text{ je uzavřená.}$$

Dk: $\Rightarrow$: Pro spor nechť Y není uzavřená. Potom $\exists$ posloupnost $(y_n) \subset Y$ t.ž. $y := \lim_n y_n \notin Y$. Takže každá podposloupnost (y_n) také konverguje k y $\Rightarrow$ (y_n) nemá podposl. konvergentní v $Y \Rightarrow Y$ není kompakt. ↯

$\Leftarrow$: Nechť $(y_n) \subset Y$. Ale (y_n) je současně i posloupnost X a X je kompakt, takže (y_n) obsahuje konvergentní podposloupnost a z uzavřenosti Y je tato limita v Y. ∎

Tvrzení: Nechť (X,d) je libovolný (ne nutně kompaktní) metrický prostor. Potom každá kompaktní $Y \subseteq X$ je uzavřená.

Dk: Nechť posloupnost $(y_n) \subset Y$ konverguje k $y \in X$. Y je kompakt, takže (y_n) obsahuje konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v Y. Ale protože (y_n) konverguje, tak tato limita $= y$, takže ve skutečnosti $y \in Y$. ∎

Věta: Součin konečně mnoha kompaktních prostorů je kompaktní.

Dk: stačí to dokázat pro 2 prostory, protože součin prostorů je asociativní
$$(X_1,d_1) \times (X_2,d_2) \times (X_3,d_3) = [(X_1,d_1) \times (X_2,d_2)] \times (X_3,d_3)$$
Nechť (X,d_1) a (Y,d_2) jsou kompaktní a nechť $((x_n,y_n))_n \subset X \times Y$.
Chceme najít nějakou konvergentní podposloupnost.

1, zvolme konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$

↳ ale odpovídající $(y_{n_k})_k \subset (y_n)_n$ konvergentní být nemusí

2, zvolme konvergentní podposloupnost $(y_{n_{k_\ell}})_\ell \subset (y_{n_k})_k$

↳ odpovídající $(x_{n_{k_\ell}})_\ell \subset (x_{n_k})_k$ konvergentní je $\because$ $(x_{n_k})_k$ je konvergentní

$\Rightarrow ((x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}))_\ell \subset ((x_n,y_n))_n$ je hledaná konvergentní podposloupnost. ∎

→ Tady jsme kompaktní prostory charakterizovali pomocí uzavřenosti, nyní omezenosti.

Def: Nechť (X,d) je m.p. Množina $A \subseteq X$ je omezená $\equiv$

$$\exists x_0 \in X \ \exists K > 0 : A \subseteq U(x_0, K) = \{y \in X \mid d(x_0, y) < K\}$$

→ čili A lze uzavřít do nějaké koule

A je omezená $\iff \exists K > 0 : \forall x, y \in A : d(x,y) < K.$

→ pokud o m.p. (X,d) řekneme, že je omezený, tak tím myslíme, že X je omezený

Tvrzení: Nechť (X,d) je m.p. Potom každá kompaktní $A \subseteq X$ je omezená.

Dk: Pro spor nechť A není omezená. To znamená, že

$$\forall x_0 \in X \ \forall K > 0 : A \nsubseteq U(x_0, K).$$

Tedy $\exists x \in A$ t.ž. $d(x, x_0) > K$. Zvolím si x_0 libovolně a pro $\forall n \in \mathbb{N}$ vyberu x_n tak, aby $d(x_n, x_0) > n$. Protože A je kompaktní, tak

$\exists$ podposloupnost $(\tilde{x}_n)_n \subset (x_n)_n$ konvergentní k nějakému $y \in A$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : d(\tilde{x}_n, y) < \varepsilon.$

Tohle musí platit pro nekonečně mnoho n. Takže pro $n \to \infty$ máme podle Δ-nerovnosti

$$\underbrace{d(\tilde{x}_n, x_0)}_{\to \infty} \leq \underbrace{d(\tilde{x}_n, y)}_{< \varepsilon} + \underbrace{d(y, x_0)}_{\text{pevné číslo} \in \mathbb{R}} \qquad \lightning \qquad \blacksquare$$

Shrnutí: Pokud je $Y \subseteq (X,d)$ kompaktní, tak je uzavřená a omezená.

- Euklidovské kompaktní prostory

Věta: Množina $Y \subseteq \mathbb{E}_n$ je kompaktní $\iff$ je uzavřená a omezená.

Dk: Směr $\Rightarrow$ už víme.

$\Leftarrow$: Jelikož je Y omezená, tak ji můžeme zavřít do nějaké velké krychle. Formálně $Y \subseteq J \subseteq \mathbb{E}_n$, kde J je součin n kompaktních intervalů $[a_i, b_i]$. Protože kompaktní intervaly jsou kompaktní, tak jejich součin je také kompaktní. Jelikož je Y uzavřená v $\mathbb{E}_n$, tak je uzavřená i v podprostoru $J \subseteq \mathbb{E}_n$. Protože je J kompaktní a Y uzavřená v J tak je Y kompaktní v J. Zřejmě je tedy kompaktní i v $\mathbb{E}_n$. $\blacksquare$

• Vztah kompaktnosti a spojitosti

→ víme, že vzor uzavřené množiny ve spojitém zobrazení je vždy uzavřený

→ pokud je definiční obor našeho zobrazení kompaktní, tak to platí i pro obrazy.

<u>Tvrzení</u>: Nechť $f:(X,d_1)\to(Y,d_2)$ je <u>spojité</u> zobrazení.

Pokud je $A\subseteq X$ <u>kompaktní</u>, tak je $f[A]$ <u>také kompaktní</u>.

<u>Dk</u>: Nechť $A\subseteq X$ je kompaktní a $(y_n)_n\subset f[A]$. Chceme najít nějakou konvergentní podposloupnost $(y_n)_n$ s limitou v $f[A]$.

⇒ Zvolme x_n tak, aby $y_n=f(x_n)$. Potom posloupnost $(x_n)_n\subset A$ má konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_k$ s limitou $a\in A$.

⇒ Protože f je spojitá, tak $(f(x_{n_k}))_k\subset f[A]$ také konverguje a její limita je $f(a)\in f[A]$. Je to tedy ta hledaná podposloupnost. ■

<u>Věta</u>: Nechť $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ je <u>spojitá funkce</u> a $A\subseteq X$ <u>kompaktní</u>.

Potom f nabývá na A <u>maxima a minima</u>.

vzdálenost bodu od mny

<u>Dk</u>: $f[A]$ je kompaktní, tedy i omezená, takže musí mít supremum $M\in\mathbb{R}$ a infimum $m\in\mathbb{R}$. Zřejmě $d(m,f[A])=d(M,f[A])=0$ a jelikož je $f[A]$ uzavřená, tak $m,M\in f[A]$. ■

- <u>Cauchyovské posloupnosti</u>

<u>Def</u>: Posloupnost $(x_n)_n$ v metrickém prostoru (X,d) je <u>Cauchyovská</u> $\equiv$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall m,n \geq n_0 : d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

<u>Intuice</u>: prvky Cauchyovské posloupnosti se k sobě dostávají libovolně blízko
$\Rightarrow$ pro $\forall \varepsilon$ je jen konečně mnoho prvků, od sebe dál než ε

Každá konvergentní posloupnost je Cauchyovská

Ne každá Cauchyovská posloupnost je konvergentní

$\hookrightarrow$ například $3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \ldots \subseteq \mathbb{Q}$
chce konvergovat k π, ale $\pi \notin \mathbb{Q}$

<u>Tvrzení</u>: Pokud má Cauchyovská posloupnost <u>konvergentní podposloupnost</u>, potom konverguje k limitě této podposloupnosti. *

<u>Dk</u>: Nechť $(x_n)_n$ je Cauchyovská posloupnost a $(\tilde{x}_n)_n$ její konvergentní podposloupnost s limitou x. Chceme ukázat, že $\lim_n(x_n) = x$. Nechť $\varepsilon>0$ je dané. Víme

(1) $\exists n_1\ \forall m,n \geq n_1 : d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ... $(x_n)_n$ je Cauchyovská

(2) $\exists n_2\ \forall n \geq n_2 : d(\tilde{x}_n, x) < \varepsilon$ ... $\lim_n(\tilde{x}_n) = x$

Označme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Z Δ-nerovnosti máme pro $\forall n \geq n_0$

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, \tilde{x}_n) + d(\tilde{x}_n, x) < 2\varepsilon. \quad \Rightarrow \lim_n(x_n) = x \quad \blacksquare$$

<u>Tvrzení</u>: Mějme pro $i=1,\ldots k$ metrické prostory (X_i, d_i) a v každém z nich posloupnost $(x^{(i)}_n)_n \subset X_i$. Posloupnost $((x^{(1)}_n, x^{(2)}_n, \ldots x^{(k)}_n))_n$ je <u>Cauchyovská</u> v $\prod_{i=1}^{k}(X_i, d_i) \iff$ <u>$\forall i$ je $(x^{(i)}_n)_n$ Cauchyovská v (X_i, d_i)</u>.

$\rightarrow ((x^{(1)}_n, x^{(2)}_n, \ldots x^{(k)}_n))_n = (x^{(1)}_1, x^{(2)}_1, \ldots x^{(k)}_1), (x^{(1)}_2, x^{(2)}_2, \ldots x^{(k)}_2), \ldots$

<u>Dk</u>: Připomeňme, že metrika součinu prostorů je $d(\underline{u}, \underline{v}) := \max_i d_i(u_i, v_i)$.

$\Rightarrow$: plyne bezprostředně z toho, že $d_i(u_i, v_i) \leq d(\underline{u}, \underline{v}) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Nechť je každá $(x^{(i)}_n)_n$ Cauchyovská. Mějme dané $\varepsilon>0$. Pro každé $1 \leq i \leq k$ z Cauchyovskosti $(x^{(i)}_n)_n$ $\exists n_i\ \forall m,n \geq n_i : d_i(x^{(i)}_n, x^{(i)}_m) < \varepsilon$

Označme $n_0 := \max_i n_i$. Potom $\forall i$ máme $\forall n,m \geq n_0 : d_i(x^{(i)}_n, x^{(i)}_m) < \varepsilon$,

tedy $\forall n,m \geq n_0 : d((x^{(1)}_n, x^{(2)}_n, \ldots x^{(k)}_n), (x^{(1)}_m, x^{(2)}_m, \ldots x^{(k)}_m)) < \varepsilon. \quad \blacksquare$

• Úplné metrické prostory

Def: Metrický prostor je <u>úplný</u> ≡ je v něm každá Cauchyovská posl. konvergentní.

→ z MA1 víme, že

Věta (Bolzano-Cauchyova): <u>Reálná čísla</u> spoln. s absolutní hodnotou jsou <u>úplná</u>.

Dk: Všimněme si, že každá Cauchyovská posloupnost $(x_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená

… vezmeme n_0 takové, že $\forall m, n \geq n_0 : |x_m - x_n| < 1$

↳ těch x_k, pro která to neplatí je jen konečně mnoho

⇒ (x_n) tedy můžeme omezit do nějakého kompaktního intervalu $[a, b]$

→ podle jednoho z předchozích tvrzení má tedy $(x_n) \subset [a, b]$ konvergentní podposloupnost a podle tvrzení ✱ tedy také konverguje

↳ tady jsme využili axiom infima, proto to nefunguje pro $\mathbb{Q}$ ■

Silná ekvivalence metrik <u>zachovává</u> úplnost — not sure jak to je s obecnou ekvivalencí

↳ všechno roztáhne o nějaký konstantou omezený faktor

Homeomorfismus metrických prostorů <u>nezachovává</u> úplnost

↳ například $(0,1)$ a $\mathbb{R}$ jsou homeomorfní, ale $(0,1)$ není úplný

Tvrzení: Každý <u>kompaktní</u> prostor je úplný.

Dk: Cauchyovská posloupnost má podle kompaktnosti konvergentní podposloupnost, takže také konverguje ke stejnému bodu.

Věta: Součin úplných prostorů je úplný. <u>Speciálně $\mathbb{E}_n$ je úplný.</u>

Dk: Mějme nějakou Cauchyovskou posloupnost z tohoto součinu. Podle tvrzení ⌘ jsou posloupnosti jednotlivých složek tohoto vektoru také Cauchyovské v jejich odpovídajících prostorech. Protože tyto prostory jsou úplné, tak tyto posloupnosti konvergují, takže celý ten vektor také konverguje. ■

Tvrzení: Podprostor úplného prostoru je úplný ⇔ je <u>uzavřený</u>.

Dk: Nechť (X, d) je metrický prostor a $Y \subseteq (X, d)$.

⇒: Nechť Y je úplný a pro spor předpokládejme, že není uzavřený. Potom existuje posloupnost $(y_n)_n \subset Y$ konvergentní v X t.ž. $\lim_n y_n \notin Y$. Potom je $(y_n)_n$ Cauchyovská v X a jelikož je metrika stejná, tak i v Y. Protože je Y úplný, tak $\lim_n (y_n) \in Y$, což je spor.

⇐: Nechť Y je uzavřený a $(y_n)_n \subset Y$ Cauchyovská. Potom je Cauchyovská i v X, takže konverguje v X a z uzavřenosti Y je $\lim_n y_n \in Y$. ■

Důsledek: Podprostor $\mathbb{E}_n$ je úplný ⇔ je uzavřený. (nemusí být kompaktní)

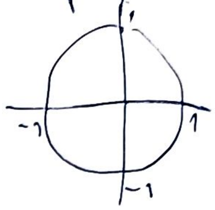
• Věty o implicitních funkcích

Příklad: Mějme rovnici $x^2+y^2=1$ nebo ekvivalentně funkci

$F(x,y) := x^2+y^2-1$ a chceme najít x, y aby $F(x,y)=0$.

→ jak to vyřešit? můžeme y vyjádřit jako nějakou funkci x

$y = f(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$ ... ale to není funkce



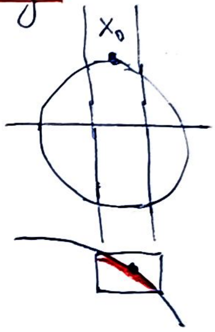
⇒ zkusme pro $y \in (0.5, 1.5)$. potom $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

⇒ takže můžeme psát $F(x, y(x)) = 0$ pro $\forall x$ t.ž. $y(x) \in (0.5, 1.5)$

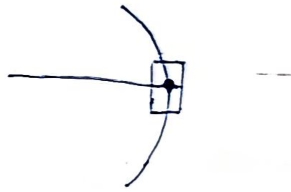
→ problémy

1) pro některá x (např. $x < -1$) řešení neexistuje

2) pokud najdeme nějaké řešení x_0, na jehož okolí řešení také existuje, tak to ještě nemusí být funkce! Musíme zvolit i nějaké vhodné okolí okolo y_0, čili udělat nějaký obdélníček, kde to funkce je



3) existují body, kde je řešení - například $(1,0)$, ale neexistuje žádné okénko obsahující to řešení, kde by to byla funkce



naše $F(x,y)$ má dva takové body a v obou platí

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0 \quad \ldots (-1,0) \text{ a } (0,1)$$

Věta: Nechť $F(\underline{x}, y): \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ a nechť pro $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ platí

i) $F(\underline{a}, b) = 0$ ... $(\underline{a}, b)$ řeší rovnici $F(\underline{x}, y) = 0$

ii) $F \in C^k$ na nějakém okolí $(\underline{x}_0, y_0)$ ... $k \geq 1$

iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{a}, b) \neq 0$ ... klíčový předpoklad

$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$

Potom $\exists \delta, \varepsilon > 0: \forall \underline{x} \in U(\underline{a}, \delta) \ \exists! y \in U(b, \varepsilon): F(\underline{x}, y) = 0$.

Označíme-li toto y jako funkci $f(\underline{x})$, tak platí, že f je třídy C^k.

Dk: 1) existence funkce f → pro <0 by postup byl stejný

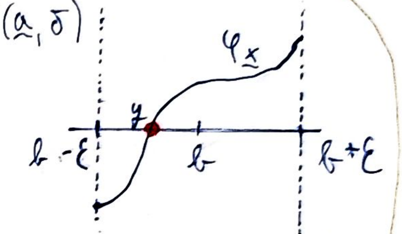
→ nenastane $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)=0$, takže BÚNO $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)>0$

→ vzhledem ke spojitosti $\frac{\partial F}{\partial y}$ existují $\Delta, \varepsilon>0$, že v obdélníku $U(a,\Delta)\times U(b,\varepsilon)$ je $\frac{\partial F}{\partial y}>0$.

→ pro pevné $x\in U(a,\Delta)$ definujme pomocnou funkci $\varphi_x(y):=F(x,y)$. Všimněme si, že pro $y\in U(b,\varepsilon)$ platí $\varphi_x'(y)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$.

→ zaměřme se na φ_a. Zřejmě $\varphi_a(b)=F(a,b)=0$ a protože je φ_a rostoucí, tak
$\varphi_a(b-\varepsilon)<\varphi_a(b)=0<\varphi_a(b+\varepsilon)$

→ protože F je spojitá, tak $\exists\delta: 0<\delta\le\Delta$, že $\forall x\in U(a,\delta)$
$\varphi_x(b-\varepsilon)<0<\varphi_x(b+\varepsilon)$.



Spojitost totiž říká, že když trochu změním vstup (tady x), tak se výstup také změní jenom trochu, takže když $F(a,b-\varepsilon)<0$, tak $F(x,b-\varepsilon)<0$ pro nějaká x hodně blízko a. Protože φ_x je rostoucí ⇒ prostá, a spojitá, tak
→ $\exists!\, y\in U(b,\varepsilon): \varphi_x(y)=F(x,y)=0$. Označme toto y jako $y=:f(x)$.

$\Downarrow$

$F(x,f(x))=0$

2) Výpočet a spojitost f

→ chceme najít $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ pro nějaké $x\in U(a,\delta)$.

→ připomeňme Lagrangeova věta

$$F(A)-F(B)=\nabla F(C)\cdot(A-B),\ \text{kde } C=A+\theta(B-A) \text{ pro } \theta\in(0,1)$$

→ uvažujme malé t, aby $x+t\cdot e^i$ stále leželo v $U(x_0,\delta)$

$0=0+0$
$$0=\underbrace{F(x+t\cdot e^i, f(x+t\cdot e^i))}_{A_t}-F(\underbrace{x, f(x)}_{B})=\nabla F(C_t)\cdot(A_t-B)$$

↳ vektor k. báze

→ přičemž $A_t-B=(t\cdot e^i, f(x+te^i)-f(x))=(0,0,\dots,\overset{i}{t},0,\dots, f(x+te^i)-f(x))$

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n},\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

→ celkem $0=\frac{\partial F}{\partial x_i}(C_t)\cdot t+\frac{\partial F}{\partial y}(C_t)\cdot\big(f(x+t\cdot e^i)-f(x)\big)$

klíčový předpoklad

⇒ (*) $\frac{1}{t}\big(f(x+te^i)-f(x)\big)=-\frac{\partial F}{\partial x_i}(C_t)\Big/\frac{\partial F}{\partial y}(C_t)$ ... $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$

→ pravá strana je omezená, protože jsme předpokládali spojité PD
↳ když uděláme uzávěr $U(a,\delta)\times U(b,\varepsilon)$, tak dostaneme kompakt, takže tam PD nabývají extrémů, čili jsou omezené

⇒ levá strana je tedy omezená nějakou konstantou K, neboli
$$\left|\frac{1}{t}\big(f(x+te^i)-f(x)\big)\right|\le K \Rightarrow |f(x+te^i)-f(x)|\le K\cdot|t|$$

POKRAČOVÁNÍ DŮKAZU

→ tedže pro $t \to 0$ máme $f(\underset{\sim}{x} + t\underset{\sim}{e}^i) \to f(\underset{\sim}{x})$ (tohle by pro $x \in \mathbb{R}^1$ znamenalo spojitost)

→ z toho taky

$$A_t \to (\underset{\sim}{x}, f(\underset{\sim}{x})) = B \quad \Rightarrow C_t \to (\underset{\sim}{x}, f(\underset{\sim}{x}))$$ ... protože C_t je mezi A_t a B

→ tedže limitou pro $t \to 0$ v (*) máme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underset{\sim}{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\underset{\sim}{x}, f(\underset{\sim}{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\underset{\sim}{x}, f(\underset{\sim}{x}))} \qquad (**)$$

→ nyní zbývá ukázat, že $f \in C^1$.

na tohle byla věta o spojité PD ⇒ TD

- f je spojitá v $\underset{\sim}{x}$ ... protože tam má omezené PD dle (**)
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ je spojitá v $\underset{\sim}{x}$ ... předpokládali jsme $F \in C^1$, tedže podle (**) je $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ složení (podíl) spojitých funkcí

→ co když $F \in C^k$?

→ pokud F navíc je C^2, tak pravá strana (**) je C^1

$$\Rightarrow \forall i \ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^1 \quad \text{neboli} \quad f \in C^2$$

⇒ pro obecné C^k indukcí

∎

- Implicitní funkce pro dvě rovnice

$F_1(\underset{\sim}{x}, y, z) = 0$
$F_2(\underset{\sim}{x}, y, z) = 0$

→ mějme už nalezené nějaké řešení $(\underset{\sim}{x}_0, y_0, z_0)$ a pokusme se najít funkce $y = f(\underset{\sim}{x})$ a $z = g(\underset{\sim}{x})$ v nějakém jeho okolí

→ zatím ignorujme první rovnici a uvažujme o té druhé jako o rovnici pro z, abychom mohli aplikovat větu o jedné rovnici.

⇒ tím jsme v nějakém okolí (x_0, y_0, z_0) získali $z = \varphi(\underset{\sim}{x}, y)$

→ substitucí do první rovnice máme

$$G(\underset{\sim}{x}, y) := F_1(\underset{\sim}{x}, y, \varphi(\underset{\sim}{x}, y)) = 0$$

⇒ opět můžeme použít větu o jedné rovnici, takže máme $y = f(\underset{\sim}{x})$ v nějakém okolí $(\underset{\sim}{x}_0, y_0)$

⇒ substituujeme ho do φ a získáme

$z = g(\underset{\sim}{x}) := \varphi(\underset{\sim}{x}, f(\underset{\sim}{x}))$

- Co jsme vlastně předpokládali

i) spojité PD funkcí F_1 a F_2

ii) abychom získali φ, tak $\frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

iii) abychom z G získali f: $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

↳ ale G je složená fce $F_1(\underbrace{x_1, x_2, \dots x_n, y, \varphi(\underset{\sim}{x}, y)}_{h(\underset{\sim}{x}, y)})$

⇒ řetízkové pravidlo:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \sum_k \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial y} = 0 + 0 + \dots + 0 + \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$$

→ navíc víme, že $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F_2}{\partial y}}{\frac{\partial F_2}{\partial z}}$ ... vzoreček z důkazu předchozí věty → vyjadřovali jsme $z = \varphi(\underset{\sim}{x}, y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} \Big/ \frac{\partial F_2}{\partial z} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y} \neq 0$$ ... ale tahle věc je prostě determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$$

Intuice: To, že se tady objevil determinant, by nemělo být překvapivé.
→ řešíme soustavu rovnic a předpokládáme, že tyto funkce jsou C^1, takže mají TD
→ to znamená, že je lze lokálně lineárně aproximovat, takže lokálně (na nějakém okolí $(\underset{\sim}{x}_0, y, z)$) vlastně řešíme soustavu lineárních (homogenní) rovnic, která má jednoznačné řešení ⟺ je její matice regulární
→ tento speciální determinant, co jsme dostali je přesně determinantem příslušející této soustavě

Def (Jakobián): Pro vektorovou funkci $\mathbf{F}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}): \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, podrobněji

$$\mathbf{F}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = (F_1(\underset{\sim}{x}, y_1, \dots y_m), \dots F_m(\underset{\sim}{x}, y_1, \dots y_m))$$

definujeme Jacobiho determinant jako

$$\frac{D(\mathbf{F})}{D(\underset{\sim}{y})} := \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

tohle je jakoby funkce, takže do ní můžeme dosazovat věci

FINÁLNÍ PRODUKT

Věta: Nechť $\mathbf{F}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}): \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, podrobněji jde o funkce

$$F_i(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_m), \quad i = 1, \dots m.$$

Nechť pro $\underset{\sim}{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\underset{\sim}{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ platí

i) $\mathbf{F}(\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{y}_0) = \underset{\sim}{0}$ ... $(\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{y}_0)$ je řešením soustavy $\mathbf{F}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = 0$

ii) F_i jsou C^k na nějakém okolí $(\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{y}_0)$ ... $k \geq 1$

iii) $\frac{D(\mathbf{F})}{D(\underset{\sim}{y})}(\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{y}_0) = \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\underset{\sim}{x}_0, \underset{\sim}{y}_0)\right) \neq 0$ ... klíčový předpoklad

Potom existují $\delta, \varepsilon > 0 : \forall \underset{\sim}{x} \in \mathcal{U}(\underset{\sim}{x}_0, \delta)\ \exists! \underset{\sim}{y} \in \mathcal{U}(\underset{\sim}{y}_0, \varepsilon): \mathbf{F}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \underset{\sim}{0}$.
Píšeme-li toto y jako vektorovou funkci $f(\underset{\sim}{x}) = (f_1(\underset{\sim}{x}), f_2(\underset{\sim}{x}), \dots f_m(\underset{\sim}{x}))$, tak jsou funkce $f_i : \mathcal{U}(\underset{\sim}{x}_0, \delta) \to \mathcal{U}(\underset{\sim}{y}_0, \varepsilon)$ třídy C^k.

Důsledek: Protože jsou to funkce třídy C^k, tak je můžeme lineárně aproximovat pomocí TD. Nebo ještě líp, pomocí Taylorova rozvoje až do řádu k.

Příklad

$$F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 = 0$$
$$F_2(x,y,z) = x + y + z - 2 = 0$$

→ chceme $x = x(z)$, $y = y(z)$

→ dostali jsme řešení $a = (1,-1,2)$

i) $F_1(a) = 1 + 1 - 1 = 0$ ✓
$F_2(a) = 1 - 1 + 2 - 2 = 0$ ✓

ii) F_1, F_2 jsou polynomy ⇒ spojité PD ✓

iii)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}(a) = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}(a) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 \neq 0 \ ✓$$

$\Rightarrow \exists\, U(2)\ \exists\, V(1,-1) : \forall z \in U\ \exists!\,(x,y) \in V : \mathbf{F}(x,y,z) = 0$

↳ označme toto x jako $x(z)$ a y jako $y(z)$

→ definujme $G_1(z) := F_1(x(z), y(z), z)$
$G_2(z) := F_2(x(z), y(z), z)$

→ protože G_1 a G_2 jsou na U konstantní 0, tak jejich derivace je taky 0. Takže

$$G_1'(z) = 2x(z)\cdot x'(z) + 2y(z)y'(z) - 2z = 0$$
$$G_2'(z) = x'(z) + y'(z) + 1 = 0$$

→ speciálně v bodě $a = (1,-1,2)$ máme $x(2) = 1$, $y(2) = -1$, takže

G_1': $2\cdot x'(2) - 2\cdot y'(2) - 4 = 0$
$x'(2) - y'(2) - 2 = 0$

G_2': $x'(2) + y'(2) + 1 = 0$

$\oplus$ $2x'(2) - 1 = 0 \Rightarrow x'(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow y'(2) = -\frac{3}{2}$

→ protože $x(z)$ a $y(z)$ jsou C^1, tak mají TD, tudíž

$$x(z) \approx x(2) + x'(2)(z-2) = 1 + \frac{1}{2}(z-2) = \frac{1}{2}z$$
$$y(z) \approx y(2) + y'(2)(z-2) = -1 - \frac{3}{2}(z-2) = 2 - \frac{3}{2}z$$

→ pomocí Taylorova rozvoje bychom mohli dělat lepší aproximace

- Taylorův rozvoj v jedné proměnné

Def: Taylorův rozvoj funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivovatelné alespoň do řádu k v bodě $a \in \mathbb{R}$, řádu k je

$$T_k^{f,a} := f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{i=1}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

→ tohle je dobrá aproximace většiny normálních funkcí

• Taylorův rozvoj ve více proměnných

Def: Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je alespoň C^k. Taylorův rozvoj řádu k funkce f v bodě $\underset{\sim}{a} = (a_1, a_2, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ je

$$\underbrace{\underbrace{T_k^{f,a} := f(\underset{\sim}{a}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\underset{\sim}{a})}{\partial x_i} \cdot (x_i - a_i)}_{\text{TD}}}_{\text{Tečná rovina}} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\underset{\sim}{a})}{\partial x_i \partial x_j} \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$$

suma přes všechny možné dvojice i, j

$$\dots + \frac{1}{k!} \sum_{1 \le i_1, i_2, \dots i_k \le n} \frac{\partial^k f(\underset{\sim}{a})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \cdot (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2}) \cdots (x_{i_k} - a_{i_k})$$

protože f je C^k, tak nezáleží na pořadí derivování, takže ty sumy vlastně nejsou až tak obří

Ukázka: Taylorův rozvoj 2. řádu funkce $f(x,y) = xe^{x+y}$ v bodě $(0,0)$ je

$$xe^{x+y} \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \cdot xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \cdot y^2\right)$$

$$= x + x^2 + xy$$

• Hledání extrémů

Opakování: Pro funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ platí následující:

1) nutná podmínka toho, že a je extrém, je $f'(a) = 0$. Navíc pokud
2) $f''(a) > 0$, tak a je minimum → všude okolo a to roste
   $f''(a) < 0$, tak a je maximum → všude okolo a to klesá

Def: Pro $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a bod $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n$ definujeme Hesseho matici

$$H_f(\underset{\sim}{a}) := \left(\frac{\partial^2 f(\underset{\sim}{a})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Fakt: Platí

1) nutná podmínka toho, že $\underset{\sim}{a}$ je extrém, je $\nabla f(\underset{\sim}{a}) = 0$. Navíc pokud
2) $H_f(\underset{\sim}{a})$ je pozitivně definitní, tak $\underset{\sim}{a}$ je maximum → všechna vlastní č. > 0
   $H_f(\underset{\sim}{a})$ je negativně definitní, tak $\underset{\sim}{a}$ je minimum → všechna vlastní č. < 0

Shrnutí: Podezřelé body jsou

1) $\nabla f = 0$
2) ∇f není definovaný ... PD neexistují
3) okraje definičního oboru

- <u>Vázané extrémy</u>

→ problém je následující: chceme najít extrémy funkce f, ale jenom na nějaké množině $\{x \mid g(x) = 0\}$

→ například $f(x,y) = 2x + y$ na kružnici $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$.

→ čili zapomeneme jak f vypadá mimo a budeme se soustředit jen na

<u>Věta</u>: Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $g_1, g_2, \dots g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pro $\underline{k < n}$.
Nechť $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{R}^n$ splňuje $\underset{\sim}{a} \in \Gamma$, kde

$$\Gamma := \{\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : g_i(\underset{\sim}{x}) = 0\} \quad \dots \text{ množina daná vazbami}$$

Dále předpokládejme, že

i) f a g_i jsou <u>třídy C^1</u> na okolí bodu $\underset{\sim}{a}$

ii) že matice

$$M := \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underset{\sim}{a})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underset{\sim}{a}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\underset{\sim}{a}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\underset{\sim}{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\underset{\sim}{a}) & \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(\underset{\sim}{a}) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(\underset{\sim}{a}) \end{pmatrix} \qquad \overbrace{\boxed{}}^{n}\Big\}k$$

má <u>maximální hodnost</u>, tedy $k < n$.

Potom <u>nutnou podmínkou</u> toho, že $\underset{\sim}{a}$ je <u>lokální extrém f vůči Γ</u>, je existence čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\frac{\partial f(\underset{\sim}{a})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot \frac{\partial g_j(\underset{\sim}{a})}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{pro } i = 1, \dots n$$

neboli funkce $L := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_k g_k$ splňuje

$$\underline{\nabla L(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{0}}.$$

<u>Poznámka</u>: Číslům $\lambda_1, \dots \lambda_k$ se říká <u>Lagrangeovy multiplikátory</u>

<u>Příklad</u>: $f(x,y) = 2x + y$, $g(x,y) = x^2+y^2-1 \Rightarrow \Gamma = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$.

→ f a g jsou C^1 a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$, takže $(2x, 2y)$ má hodnost $1 \Leftrightarrow (x,y) \neq (0,0)$, ale $(0,0) \in \Gamma$!

⇒ chceme

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2 + \lambda 2x \\ 0 &= 1 + \lambda 2y \\ g: \ 1 &= x^2 + y^2 \end{aligned}\right\} \text{všechny extrémy musí tohle splňovat}$$

⇒ 3 rovnice o 3 neznámých

⇒ $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ ... jen 2 podezřelé body

→ Γ je kompakt ⇒ tohle jsou extrémy f

Dk: Z lingebry: M má hodnost $\geq k \iff$ je alespoň jedna její $k \times k$ podmatice regulární (tedy má nenulový determinant). Takže máme

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{matrix}} & \begin{matrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \Box \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ BÚNO nechť to platí pro ty první, takže $\Box$ je regulární, potom soustava k lineárních rovnic o k neznámých má jednoznačné řešení $\underset{\sim}{\lambda} = (\lambda_1, \dots \lambda_k)$

$\Rightarrow$ při této volbě $\underset{\sim}{\lambda}$ platí tvrzení z věty pro $i = 1, \dots k$. Konkrétně

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (*) \quad \text{pro } i = 1, \dots k. \quad \rightarrow \text{ale co } i > k?$$

$\rightarrow$ protože je $\det(\Box) \neq 0$, tak soustava rovnic $g_j(\underbrace{x_1, \dots x_k}_{y}, \underbrace{x_{k+1}, \dots x_n}_{x}) = 0$ splňuje podmínky věty o implicitních funkcí $\Rightarrow$ lze vyjádřit proměnné $x_1, \dots x_k$ jako nějaké C^1 funkce $x_i = \phi_i(\tilde{x})$, kde $\tilde{x} := (x_{k+1}, \dots x_n)$. Potom

$$g_j(\phi_1(\tilde{x}), \phi_2(\tilde{x}), \dots \phi_k(\tilde{x}), \tilde{x}) = 0 \quad \text{pro } j = 1, \dots k.$$

$\rightarrow$ takže $\forall \tilde{x}$ z nějakého okolí bodu $\tilde{a} := (a_{k+1}, \dots a_n)$ je

$$\varphi(\tilde{x}) := (\phi_1(\tilde{x}), \phi_2(\tilde{x}), \dots \phi_k(\tilde{x}), \tilde{x}) \in \Gamma$$

$\rightarrow$ to znamená, že obor hodnot (tentokrát už nevázané) funkce

$F(\tilde{x}) := f(\varphi(\tilde{x}))$ je stejný, jako obor hodnot funkce f na Γ.

$\rightarrow$ protože $\underset{\sim}{a}$ je extrém f vůči Γ, tak $\tilde{a}$ je extrém F, tedy

$\nabla F(\tilde{a}) = \underset{\sim}{0}$. Navíc protože je $G_j(\tilde{x}) := g_j(\varphi(\tilde{x}))$ konstantní, tak $\nabla G_j(\tilde{a}) = \underset{\sim}{0}$. Čili z řetízkového pravidla máme

rozšířený gradient

$$\underset{\sim}{0} = \nabla F(\tilde{a}) = \nabla(f(\varphi))(\tilde{a}) = (\nabla f)(\varphi(\tilde{a})) \cdot \nabla \varphi(\tilde{a}) = \nabla f(\underset{\sim}{a}) \cdot \boxed{\nabla \varphi(\tilde{a})}.$$

$$\underset{\sim}{0} = \nabla G_j(\tilde{a}) = \nabla(g_j(\varphi))(\tilde{a}) = (\nabla g_j)(\varphi(\tilde{a})) \cdot \nabla \varphi(\tilde{a}) = \nabla g_j(\underset{\sim}{a}) \cdot \boxed{\nabla \varphi(\tilde{a})}.$$

$\rightarrow$ nyní zkoumejme tuto rovnici:

$$\underset{\sim}{0} = \nabla F + \lambda_1 \nabla G_1 + \lambda_2 \nabla G_2 + \dots + \lambda_k \nabla G_k = \nabla F + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla G_j$$

$$\underset{\sim}{0} = \left(\nabla f + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla g_j \right) \cdot \nabla \varphi \quad \rightarrow \text{pro jednoduchost nepíšu } \tilde{a}, \underset{\sim}{a}$$

$\rightarrow$ podívejme se nyní na i-tou složku tohoto vektoru pro $i = k+1, \dots n$:

$$0 = \sum_{r=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_r} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_r} \right)} \cdot \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} \quad \text{pro } i = k+1, \dots n$$

$\rightarrow$ zaměřme se na jednotlivé členy této sumy. Když $r = 1, \dots k$, tak ten červený výraz je podle $(*)$ roven 0. Navíc, když $r = k+1, \dots n$, tak $\varphi_r = x_r$, takže $\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = \frac{\partial x_r}{\partial x_i}$, což je 1 pokud $r = i$ a jinak opět 0. Protože $0 = \sum$, tak i člen pro $r = i$: $\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ musí být roven 0. ∎

• Regulární zobrazení

→ regulární zobrazení je zobecnění pojmu prosté funkce pro více proměnných

→ funkce 1 proměnné je prostá <=> je ryze monotónní (rostoucí / klesající)

⇒ má všude buď ⊕ nebo ⊖ derivaci

Def: Nechť $f_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U otevřená, $f_i \in C^1$, pro $i = 1, \dots n$.

Vektorovou funkci $\underset{\sim}{f} := (f_1, \dots f_n) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazveme regulární ≡

$$\forall \underset{\sim}{a} \in U : \frac{D(\underset{\sim}{f})}{D(\underset{\sim}{x})}(\underset{\sim}{a}) = \det(\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})) \neq 0$$

→ v tomto případě je Jakobián stejný jako zobecněný gradient, protože uvažujeme derivace podle všech proměnných.

Intuice: Jakobián (tentokrát myslíme matici) vektorové funkce v nějakém bodě $\underset{\sim}{a}$ se na tu funkci dívá jako na její lineární aproximaci, tedy TD v $\underset{\sim}{a}$. Funkce f se tedy lokálně chová jako lineární zobrazení a proto má nějakou matici. Zamysleme se, jak by mohla vypadat. Z lingebry víme, že i-tý sloupec matice l. z. je obraz i-tého bázového vektoru v tomto zobrazení.

→ Vezmeme i-tý vektor kanonické báze a kam se zobrazí.

→ protože to děláme lokálně, vůči nějakému $\underset{\sim}{a}$, tak nás zajímá

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}^i) = (f_1(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}^i), f_2(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}^i), \dots f_n(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}^i))$$

$$\text{TD: } f_k(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}^i) \approx f_k(\underset{\sim}{a}) + \nabla f_k(\underset{\sim}{a}) \cdot \underset{\sim}{e}^i = f_k(\underset{\sim}{a}) + \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\underset{\sim}{a})$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}^i) \approx \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a}) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underset{\sim}{a}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\underset{\sim}{a}), \dots \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\underset{\sim}{a})\right)$$

→ což je přesně (až na to posunutí) i-tý sloupeček $\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{a})$.

Intuice: Pokud se tedy na Jakobián díváme jako na matici lokálního lineárního zobrazení, tak jeho determinant určuje, jak moc se objemy roztahují. Pokud det = 0, tak matice není regulární, objem se smrští na nulu a vektorový prostor obrazů má menší dimenzi, než prostor vzorů. To znamená, že se na některé obrazy muselo zobrazit víc vzorů, takže to zobrazení není „prosté".

Důsledek tvrzení (*): Prosté regulární zobrazení $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má regulární inverzi $g : f[U] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Tvrzení: Je-li $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární a $V \subseteq U$ otevřená, potom je obraz $f[V]$ také otevřený.

Poznámka: Tahle věc, ale naopak, platí pro libovolnou spojitou funkci. Platí totiž: obraz otevřený $\Rightarrow$ vzor otevřený.

Dk: Nechť $V \subseteq U$ je otevřená, $\underline{a} \in V$. Označme $\underline{b} := f(\underline{a})$. Chceme ukázat

$$\exists \delta > 0 : \mathcal{U}(\underline{b}, \delta) \subseteq f[V].$$

Jako další definujme $\mathbf{F}: V \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ předpisem $\mathbf{F}(\underline{x}, \underline{y}) := f(\underline{x}) - \underline{y}$.

Máme $\mathbf{F}(\underline{a}, \underline{b}) = f(\underline{a}) - \underline{b} = 0$. Protože $\frac{D(F)}{D(x)}(\underline{a}) = \frac{D(f)}{D(x)}(\underline{a}) \neq 0$ a $F \in C^1$, tak můžeme použít větu o impl. fcích a na nějakém okolí $(\underline{a}, \underline{b})$ vyjádřit proměnné $x_1, \dots x_n$ jako funkce proměnných $y_1, \dots y_n$. Máme

$$\exists \delta, \varepsilon > 0 : \forall \underline{y} \in \mathcal{U}(\underline{b}, \delta) \ \exists! \underline{x} \in \mathcal{U}(\underline{a}, \varepsilon) : \mathbf{F}(\underline{x}, \underline{y}) = f(\underline{x}) - \underline{y} = \underline{0}$$

Ale to znamená, že $\underline{y} = f(\underline{x})$. Zřejmě

$$\mathcal{U}(\underline{a}, \varepsilon) \subseteq V \Rightarrow \mathcal{U}(\underline{b}, \delta) = \{ f(\underline{a}) \mid \underline{a} \in \mathcal{U}(\underline{a}, \varepsilon) \} \subseteq f[V].$$

$\to$ otevřenost V jsme využili v kroku $\frac{D(F)}{D(x)}(\underline{a})$, protože derivace v $\underline{a}$ je definovaná pouze, pokud má $\underline{a}$ nějaké okolí. $\blacksquare$

Tvrzení: Je-li $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je regulární a $\underline{a} \in U$, potom $\exists$ okolí $V(\underline{a})$ t.ž.

* 1, restrikce $f|_V : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je prostá (dokonce bijekce)

2, zobrazení $g : f[V] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inverzní k $f|_V$ je regulární

Dk: Znovu použijeme stejný argument jako minule. Tedy máme zobrazení $\mathbf{F}: V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{F}(\underline{x}, \underline{y}) := f(\underline{x}) - \underline{y}$. Z věty o impl. fcích opět máme

$$\exists \delta, \varepsilon > 0 : \forall \underline{y} \in \mathcal{U}(f(\underline{a}), \delta) \ \exists! \underline{x} \in \mathcal{U}(\underline{a}, \varepsilon) : \mathbf{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$$

Označme toto jednoznačné $\underline{x}$ jako $\underline{x} =: g(\underline{y})$.

Dále máme $F(\underline{x}, \underline{y}) = f(\underline{x}) - \underline{y} = \underline{0} \Rightarrow \underline{y} = f(\underline{x})$.

Víme, že f je funkce, čili $\forall \underline{x} \in \mathcal{U}(\underline{a}, \varepsilon) \ \exists! \underline{y} \in \mathcal{U}(f(\underline{a}), \delta) : \underline{y} = f(\underline{x})$

$\to$ když to zkombinujeme, tak zjistíme, že na $V := \mathcal{U}(\underline{a}, \varepsilon)$ je f bijekce a podobně, na $f[V]$ je g bijekce a zřejmě je g inverzní k f. $\Rightarrow$ 1)

$\to$ ještě zbývá dokázat, že g je regulární. Věta o IF nám garantuje $g \in C^1$, ještě potřebujeme aby $\det(\nabla g(\underline{b})) \neq 0$ pro $\forall \underline{b} \in f[V]$. Realizované p.:

$$\nabla(id)(\underline{b}) = \nabla(g \circ f)(\underline{b}) = (\nabla f)(g(\underline{b})) \cdot \nabla g(\underline{b})$$

$$\Rightarrow \det(\nabla(id)(\underline{b})) = \det\left((\nabla f)(g(\underline{b})) \cdot \nabla g(\underline{b})\right) \Rightarrow 1 = \underbrace{\det((\nabla f)(g(\underline{b})))}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det(\nabla g(\underline{b}))}_{\neq 0} \ \blacksquare$$

• **Opakování Riemannova integrálu jedné proměnné**

Def: Dělení intervalu $[a,b]$ je $(n+1)$-tice $D=(t_0,t_1,\dots t_n)$, kde

$$a=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=b$$

Def: Zjemnění dělení $D=(t_0,t_1,\dots t_n)$ je dělení $D'=(t'_0,t'_1,\dots t'_m)$ splňující $\{t_0,t_1,\dots t_n\}\subseteq\{t'_0,t'_1,\dots t'_m\}$.

Def: Jemnost (norma) dělení $D=(t_0,t_1,\dots t_n)$ je $\lambda(D):=\max_i(t_i-t_{i-1})$.

← $f(x)$ je vždy ≥ 0

Def: Pro omezenou funkci $f: J=[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ a dělení D intervalu J definujeme

1, dolní součet pro $m_i:=\inf\{f(x)\mid t_{i-1}\leq x\leq t_i\}$

$$s(f,D):=\sum_{i=1}^n m_i(t_i-t_{i-1})$$

2, horní součet pro $M_i:=\sup\{f(x)\mid t_{i-1}\leq x\leq t_i\}$

$$S(f,D):=\sum_{i=1}^n M_i(t_i-t_{i-1})$$

Jde o obsahy aproximací plochy pod křivkou kladné funkce f

$$s(f,D)\leq \operatorname{vol}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\leq x\leq b\ \&\ 0\leq y\leq f(x)\}\leq S(f,D)$$

Pokud D' zjemňuje D, tak

$$s(f,D)\leq s(f,D')\leq S(f,D')\leq S(f,D)$$

Def: Pro omezenou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}_0^+$ definujeme

1) dolní Riemannův integrál $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{s(f,D)\mid D \text{ je dělení } [a,b]\}$

2) horní Riemannův integrál $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{S(f,D)\mid D \text{ je dělení } [a,b]\}$

3, Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, pokud $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Pokud Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, tak je to jediná hodnota, kterou dává smysl přiřadit jako obsah množiny

$$\operatorname{vol}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[a,b]\ \&\ y\in[0,f(x)]\}$$

• Existence Riemannova integrálu

Věta: Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists D$ dělení $[a,b]$ t.ž.

$$S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

Dk: $\Rightarrow$: Nepřítel nám dal nějaké $\varepsilon>0$.

Protože $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje, tak existují dělení D_1 a D_2 taková, že

$$\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}>S(f,D_1) \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{2}<s(f,D_2)$$

Nechť D je společné zjemnění D_1 a D_2. Dosadíme do těch dvou nerovností a od té první odečteme tu druhou (takže se otočí $<\to>$)

$$\int_a^b f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}-\int_a^b f(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon>S(f,D)-s(f,D).$$

$\Leftarrow$: Pro nějaké $\varepsilon>0$ volme D, aby $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$. Potom

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\le S(f,D)<s(f,D)+\varepsilon\le\underline{\int_a^b} f(x)\,dx+\varepsilon.$$

Protože vždy $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\ge\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ a ε může být libovolně malé, tak musí platit $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx=\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$. ■

Věta: Pro každou spojitou $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Dk: Musíme ukázat, že $\forall\varepsilon>0\ \exists D$ dělení $[a,b]$: $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$.

$$S(f,D)-s(f,D)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})$$

Pokud se nám podaří M_i-m_i omezit pomocí ε, tak máme

$$\le\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})=K\left(t_1-t_0+t_2-t_1+\ldots+t_n-t_{n-1}\right)=\varepsilon(b-a).$$

Protože $b-a$ je konstanta, tak by tohle dokázalo naši větu.

Nyní využijeme spojitost f. Máme

$$\forall x,y\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

A zkusíme omezit M_i-m_i:

$$M_i-m_i=\underbrace{\sup\{f(x)\mid t_{i-1}\le x\le t_i\}}_{\text{nejvyšší hodnota}}-\underbrace{\inf\{f(x)\mid t_{i-1}\le x\le t_i\}}_{\text{nejnižší hodnota}}$$

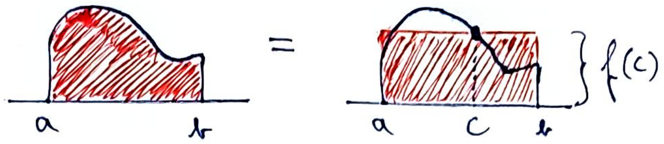
$$=\underbrace{\sup\{|f(x)-f(y)|\mid t_{i-1}\le x,y\le t_i\}}_{\text{největší rozdíl hodnot}}<\varepsilon$$

■

- <u>Integrální věta o střední hodnotě</u>

<u>Věta</u>: Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je <u>spojitá</u>. Potom existuje $c\in[a,b]$ t.ž.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



<u>Dk</u>: Protože $[a,b]$ je kompaktní a f spojitá, tak tam nabývá extrémů. Nechť

- $m := \min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ ... minimum
- $M := \max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$ ... maximum

Zřejmě
$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M\cdot(b-a).$$
Všechno to jsou čísla, čili existuje $K\in[m,M]$: $\int_a^b f(x)\,dx = K\cdot(b-a)$.
Protože K je někde mezi min. a max. a f je spojitá, tak existuje nějaké $c\in[a,b]$, ve kterém f nabývá K, tedy $f(c)=K$. ■

- <u>Základní věta analýzy</u>

<u>Věta</u>: Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je <u>spojitá</u>. Definujme $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ danou předpisem
$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt.$$ Potom je $F'(x)=f(x)$.

<u>Dk</u>: Pro $h\neq 0$ máme
$$\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right)=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h}f-\int_a^x f\right)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt.$$
Zde jsme použili pozorování $\int_a^b+\int_b^c=\int_a^c$. Nyní použijeme větu o střední hodnotě.
Pro nějaké $\theta\in(0,1)$ máme
$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt=\frac{1}{h}f(x+\theta h)\cdot(x+h-x)=f(x+\theta h)\to f(x)\ \text{pro}\ h\to 0.$$ ■

<u>Důsledek</u>: <u>Spojitá</u> $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ má na $[a,b]$ <u>primitivní funkci</u> F.
Navíc, protože (derivace $\Rightarrow$ spojitost) je F <u>spojitá</u>.

<u>Věta</u>: Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je <u>spojitá</u>. Potom pro každou $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, primitivní k f platí
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

<u>Dk</u>: Protože pro $G(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ platí $G'(x)=f(x)$ & víme $F'(x)=f(x)$, tak máme $F(x)=G(x)+C$, pro nějaké $C\in\mathbb{R}$. Takže
$$F(b)-F(a)=G(b)+C-G(a)-C=\int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$ ■

Integrální věta o střední hodnotě je variace klasické věty o S. H. (Lagrangeova věta)

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a) = F'(c)(b-a).$$

• Riemannův integrál ve více proměnných

Def: (n-rozměrný) kompaktní interval v $\mathbb{E}_n$ je kvádr

$$J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Def: Dělení kompaktního intervalu v $\mathbb{E}_n$ je n-tice dělení $\underline{D} = (D_1, D_2, \dots D_n)$, kde D_i je dělení intervalu $[a_i, b_i]$. Čísla v D_i indexujeme jako

$$a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \dots < t_{i,m_i-1} < t_{i,m_i} = b_i,$$

čili jednotlivá dělení D_i mohou mít různou délku m_i.

Def: Dělení $\underline{D} = (D_1, \dots D_n)$ rozseká prostor na malé cihličky. Každá taková cihla dělení $\underline{D}$ je kompaktní interval ve tvaru

$$[t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1}] \times [t_{2,i_2}, t_{2,i_2+1}] \times \dots \times [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}].$$

Množina $\mathcal{B}(\underline{D})$ (bricks) značí množinu všech cihel dělení $\underline{D}$.

Protože jednotlivé cihly se dotýkají pouze společnou plochou jedné stěny, tak pro kompaktní interval J s množinou cihel $\mathcal{B}$ platí

$$\mathrm{vol}(J) = \sum \{\mathrm{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

Def: Průměr (diameter) intervalu $J = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ je

$$\mathrm{diam}(J) := \max_i (b_i - a_i).$$

Def: Jemnost (norma) dělení D je $\lambda(D) := \max\{\mathrm{diam}(B) \mid B \in \mathcal{B}(D)\}$.

Def: Dělení $\underline{Q} = (Q_1, Q_2, \dots Q_n)$ zjemňuje dělení $\underline{D} = (D_1, D_2, \dots D_n) \equiv$

$\forall i : Q_i$ zjemňuje D_i.

Pro cihlu $B \in \mathcal{B}(D)$ určuje Q dělení této cihly, které označíme Q_B.

Zřejmě platí, že cihličky jednotlivých cihel dají všechny cihly dělení Q, tedy

$$\mathcal{B}(Q) = \bigcup \{\mathcal{B}(Q_B) \mid B \in \mathcal{B}(D)\}.$$

Každá dvě dělení D, Q kompaktního intervalu J mají společné zjemnění.

Def: Pro omezenou $f: J \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+_0$ a dělení D kompaktního intervalu J definujeme

1) pro cihlu $B \in \mathcal{B}(D)$: $m(f,B) := \inf\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in B\}$.

$\Rightarrow$ dolní součet $s(f,D) := \sum\limits_{B \in \mathcal{B}(D)} m(f,B) \cdot vol(B)$

2) pro cihlu $B \in \mathcal{B}(D)$: $M(f,B) := \sup\{f(\underline{x}) \mid \underline{x} \in B\}$.

$\Rightarrow$ horní součet $S(f,D) := \sum\limits_{B \in \mathcal{B}(D)} M(f,B) \cdot vol(B)$

pokud $C \subseteq B$, tak

$$m(f,B) \leq m(f,C) \leq M(f,C) \leq M(f,B).$$

pokud Q zjemňuje D, tak

$$s(f,D) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,D).$$

Tvrzení: Pro libovolná dvě dělení D, Q platí $s(f,D) \leq S(f,Q)$.

Dk: Nechť R je společné zjemnění D a Q. Potom máme

$$s(f,D) \leq s(f,R) \leq S(f,R) \leq S(f,Q) \quad \blacksquare$$

Důsledek: Pro libovolné dělení D je $s(f,D)$ omezena shora a $S(f,D)$ zdola nějakými konstantami, které jsou společné pro všechny dělení.

$\rightarrow$ tyto konstanty můžeme získat aplikací předchozího tvrzení na D a libovolné jiné dělení Q, které zafixujeme.

Def: Pro omezenou funkci $f: J \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, J je kompaktní interval, definujeme

1) dolní Riemannův integrál $\underline{\int}_J f(\underline{x})\,d\underline{x} := \sup\{s(f,D) \mid D \text{ je dělení } J\}$

2) horní Riemannův integrál $\overline{\int}_J f(\underline{x})\,d\underline{x} := \inf\{S(f,D) \mid D \text{ je dělení } J\}$

3) Riemannův integrál $\int_J f(\underline{x})\,d\underline{x}$, pokud $\underline{\int}_J f(\underline{x})\,d\underline{x} = \overline{\int}_J f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Pokud Riemannův integrál $\int_J f(\underline{x})\,d(\underline{x})$ existuje, tak

$$vol\{(\underline{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \underline{x} \in J \ \& \ y \in [0, f(\underline{x})]\} = \int_J f(\underline{x})\,d\underline{x}$$

$\rightarrow$ je to jediná hodnota, kterou dává smysl přiřadit tomuto objemu

• Existence Riemannova integrálu více proměnných

Věta: Riemannův integrál $\int_J f(\underline{x})\,d\underline{x}$ existuje $\iff$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists D \text{ dělení } J: \ S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

Dk: Stejný jako pro obyčejný Riemannův integrál. Například implikace

$\Leftarrow$: Pro libovolné $\varepsilon>0$ máme D, že $S(f,D)<\varepsilon+s(f,D)$, takže

$$\overline{\int} \le S(f,D) < \varepsilon + s(f,D) \le \varepsilon + \underline{\int}$$

Protože vždy $\overline{\int} \ge \underline{\int}$ a ε může být libovolně malé, tak $\overline{\int}=\underline{\int}$. ■

Věta: Každá spojitá $f: J\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, J kompaktní i., má Riemannův integrál.

Dk: Budeme používat maximovou metriku místo Eukleidovské – jsou silně e.

Tedy $d(\underline{x},\underline{y}) := \max_i |x_i - y_i|$. Musíme ukázat, že

$$\forall \varepsilon>0\ \exists D \text{ dělení } J: \ S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

Máme

$$S(f,D)-s(f,D) = \sum_{B\in \mathcal{B}(D)} (M(f,B)-m(f,B))\cdot \mathrm{vol}(B).$$

Pokud omezíme $M(f,B)-m(f,B)$ pomocí ε, tak

$$\le \varepsilon \cdot \sum_{B\in\mathcal{B}(D)} \mathrm{vol}(B) = \varepsilon\cdot \mathrm{vol}(J).$$

Protože $\mathrm{vol}(J)$ je konstanta, tak tohle stačí.

Nyní, ze spojitosti f máme

$$\forall \underline{x},\underline{y}\in J\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: d(\underline{x},\underline{y})<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Takže

$$M(f,B)-m(f,B) = \underbrace{\sup\{f(\underline{x}) \mid \underline{x}\in B\}}_{\text{největší hodnota}} - \underbrace{\inf\{f(\underline{x})\mid \underline{x}\in B\}}_{\text{nejmenší hodnota}}$$

$$= \underbrace{\sup\{|f(\underline{x})-f(\underline{y})| \mid \underline{x},\underline{y}\in B\}}_{\text{největší rozdíl hodnot}} < \varepsilon$$

■

- Jak počítat integrály více proměnných – Fubiniova věta

Věta (Fubiniova): Nechť $J_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ a $J_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou kompaktní i. a $J = J_1 \times J_2$.

Nechť $f: J \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ je spojitá a pro $\forall \underline{x} \in J_1$, $\forall \underline{y} \in J_2$ existují

i) $\int_J f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}\underline{y}$

ii) $\int_{J_1} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}$ → tady je $\underline{y}$ jako parametr

iii) $\int_{J_2} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{y}$ → tady je $\underline{x}$ jako parametr

Potom platí

$$\int_{J_1 \times J_2} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}\underline{y} = \int_{J_1} \overbrace{\int_{J_2} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{y}}\, d\underline{x} = \int_{J_2} \overbrace{\int_{J_1} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}}\, d\underline{y}$$

Poznámka: Pro 2 proměnné $\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy\, dx$.

Dk: Definujme $F(\underline{x}) := \int_{J_2} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{y}$. Dokážeme, že existuje $\int_{J_1} F$ a že

$$\int_{J_1} F(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{J_1} \int_{J_2} f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{y}\, d\underline{x} = \int_J f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}\underline{y}.$$

Zvolme dělení D intervalu J tak, aby pro $\varepsilon > 0$ platilo

$$\int_J f - \varepsilon \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq \int_J f + \varepsilon. \quad (*)$$

Toto dělení je tvořeno děleními D_1 intervalu J_1 a D_2 intervalu J_2. Máme

$$\mathcal{B}(D) = \{ B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}(D_1),\ B_2 \in \mathcal{B}(D_2) \}.$$

Zřejmě ← tohle není definované

$F(\underline{x}) = \int_{J_2} f \leq \text{"}S(f, D_2)\text{"}$ ⇒ definujme $M'(\underline{x}, B) := \sup\{ f(\underline{x}, \underline{y}) \mid \underline{y} \in B \}$

Takže $\leq \sum_{B_2 \in \mathcal{B}(D_2)} M'(\underline{x}, B_2) \cdot \mathrm{vol}(B_2)$

$$\int_{J_1} F \leq S(F, D_1) = \sum_{B_1 \in \mathcal{B}(D_1)} M(F, B_1) \cdot \mathrm{vol}(B_1) = \sum_{D_1 \in \mathcal{B}(D_1)} \sup\{ F(\underline{x}) \mid x \in D_1 \} \cdot \mathrm{vol}(B_1)$$

$$\leq \sum_{D_1 \in \mathcal{B}(D_1)} \sup\Big\{ \sum_{B_2 \in \mathcal{B}(D_2)} M'(\underline{x}, B_2) \cdot \mathrm{vol}(B_2) \,\Big|\, \underline{x} \in B_1 \Big\} \cdot \mathrm{vol}(B_1)$$

$$\leq \sum_{D_1 \in \mathcal{B}(D_1)} \sum_{B_2 \in \mathcal{B}(D_2)} \sup\{ M'(\underline{x}, B_2) \mid x \in B_1 \} \cdot \mathrm{vol}(B_2) \cdot \mathrm{vol}(B_1) \quad \dots M'$$

$$\leq \sum_{D_1} \sum_{D_2} \sup\{ f(\underline{x}, \underline{y}) \mid \underline{x} \in B_1 \ \&\ \underline{y} \in B_2 \} \cdot \mathrm{vol}(B_2) \cdot \mathrm{vol}(B_1)$$

$$= \sum_{B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}(D)} \sup\{ f(\underline{x}, \underline{y}) \mid (\underline{x}, \underline{y}) \in B_1 \times B_2 \} \cdot \mathrm{vol}(B_1 \times B_2) = S(f, D)$$

→ tento proces můžeme udělat i pro infimum
→ celkově získáme

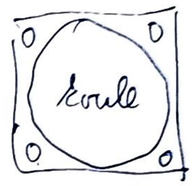
$$s(f,D) \le s(F,D_1) \le \int_{J_1} F \le S(F,D_1) \le S(f,D).$$

→ v kombinaci s (*) to dává

$$\int_J f - \varepsilon \le s(f,D) \le s(F,D_1) \le \int_{J_1} F \le S(F,D_1) \le S(f,D) \le \int_J f + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_J f - \varepsilon \le \int_{J_1} F \le \int_J f + \varepsilon$$

→ tohle pro libovolně malé ε, čili $\int_J f = \int_{J_1} F$.



<u>Příklad</u>: Objem koule → rovnice $x^2+y^2+z^2=r^2$
→ plán: spočítáme objem polokoule  
→ na intervalu $J=[-r,r]^2$ vezmeme

$$z = f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{r^2-x^2-y^2}, & \text{pro } r^2-x^2-y^2 \ge 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$ → mimo kouli placatá 0

$$V = 2\cdot \int_J f = 2\int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} "\sqrt{r^2-x^2-y^2}"\,dx\,dy$$

→ integrujeme přes y třeba zleva doprava výsledky integrálů
$\int_{-r}^{r} "\sqrt{r^2-y^2-x^2}"\,dx$. Jenže ta věc vevnitř není $\sqrt{r^2-y^2-x^2}$
→ když $x^2 > r^2-y^2$, tak to je 0. Pokud značíme $u := \sqrt{r^2-y^2}$, tak to je

$$\int_{-u}^{u} \sqrt{u^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l|l} x = u\sin\theta & x=u:\ 1=\sin\theta \\ dx = u\cos\theta\,d\theta & x=-u:\ -1=\sin\theta \end{array} \right| = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} u\cos\theta\cdot u\cos\theta\,d\theta =$$

$$= u^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 2u^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1)\,d\theta = u^2\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}u^2.$$

$$\Rightarrow V = 2\int_{-r}^{r} \frac{\pi}{2}u^2\,dy = \pi\int_{-r}^{r} r^2-y^2\,dy = 2\pi\int_0^r r^2-y^2\,dy = 2\pi\left[u^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi r^3}}$$

! Je to legit? Pro použití Fubiniho věty musí být f spojitá
→ tady náhodou byla, protože ta koule se dotýká plochy $z=0$, ale většinou se to nestane

- Lebesgueův integrál

→ složitější a mocnější konstrukce, pro kterou platí

1) Pokud na kompaktním intervalu J existuje Riemannův integrál $\int_J f$, tak se shoduje s Lebesgueovým.

→ je nepraktické pracovat pouze s definičními obory jak s cihlami

⇒ chceme integrovat přes kompaktní množinu D

2) $\int_D \lim_{n\to\infty} f_n(\underline{x})\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_D f_n(\underline{x})\,dx$ pokud $|f_n(\underline{x})| \leq K$ pro $\forall \underline{x}$

↳ všechny ty funkce $f_1, f_2, \dots$ musí být omezené stejným K.

→ trocha podrobněji

3) pokud $\int_D f_n$ existuje pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $(f_n)_n$ je monotónní, potom $\int_D \lim_n f_n = \lim_n \int_D f_n$

4) pokud $\int_{D_n} f$ existuje pro $n = 1, 2, \dots$, potom existuje i $\int_{\bigcup_i D_i} f$

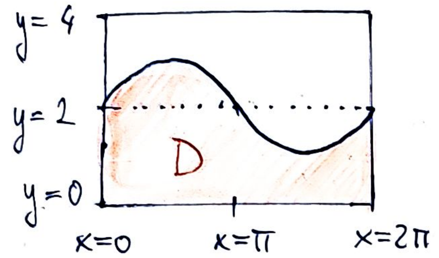
→ těch pravidel je víc

Fakt: Pokud je f spojitá na kompaktním $D \subseteq \mathbb{E}_m$ a $D \subseteq J$, kde J je kompaktní interval, tak pokud rozšíříme f na $g: J \to \mathbb{R}$ hodnotami 0 na $J \setminus D$, tak získaná g je Lebesgueovsky integrovatelná.

• Tietzeova věta – jak rozšířit kompaktní množinu na cihlu

Věta (Tietzeova): Nechť (X,d) je m.p. a $Y \subseteq X$ je uzavřená.
Potom $\forall$ spojitá $f: Y \to [a,b]$ se dá rozšířit na spojitou $g: X \to [a,b]$.

Příklad:



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2\pi] \ \& \ y \in [0, 2+\sin x]\}$$
$$J = [0,2\pi] \times [0,4] \ \to \ D \subseteq J$$

→ chceme spočítat $\int_D f(x,y)\, dxy$ pro $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}y$.

→ ale D není cihla → $g: J \to \mathbb{R}$, $g(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$

$\int_D f = \int_J g$ ... ale g rozhodně na hranici D není spojitá, těch bodů nespojitosti je nekonečně mnoho.

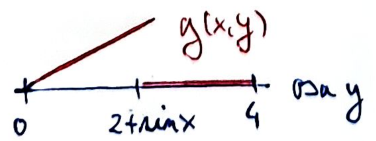
→ ale je to Lebesgueovsky integrovatelné

$$\int_D f = \int_0^{2\pi} \int_0^4 g(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin x} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{2+\sin x} \frac{y}{2}\, dy dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[y^2 \right]_0^{2+\sin x} dx = \int_0^{2\pi} (2+\sin x)^2 dx = \int_0 4 + 4\sin x + \sin^2 x\, dx$$
$$= \left[4x - 4\cos x \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2x)\, dx = (8\pi - 4) - (0-4) + \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x) \right]_0^{2\pi}$$
$$= 8\pi + \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \underline{\underline{9\pi}}$$

Intuice: integruju postupně zleva → doprava podle x

→ každý jednotlivý integrál podle y je $\int_0^4 g(x,y)\, dy$

→ situace:



→ je tam jenom 1 bod nespojitosti

→ proto to rozdělím na

$$\int_0^4 g(x,y)\, dy = \int_0^{2+\sin x} \frac{1}{2} y\, dy + \int_{2+\sin x}^4 0\, dy$$

- <u>Substituční metoda</u>

→ pro jednu proměnnou

<u>Věta:</u> Nechť f je spojitá a F je k ní primitivní. Dále nechť ϕ má derivaci. Potom platí

$$\int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx.$$

<u>Dk:</u> Pro funkci $G := F(\phi)$ platí $G'(x) = F'(\phi(x))\cdot\phi'(x)$, tedy

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx.$$

<u>Intuice:</u> řekněme, že ϕ je rostoucí, tedy $\phi : [a,b] \to [\phi(a), \phi(b)]$.
Potom popisuje deformaci intervalu $[a,b]$. Konkrétně natahuje malé intervaly $[x, x+h]$ v poměru přibližně $\phi'(x)$. To proto, že podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě: $\phi(x+h) - \phi(x) = \phi'(x+\theta h)\cdot h$.
Takže když $\int f(x)dx \sim$ sčítání obdélníčků šířky h a výšky $f(x)$, tak $\int f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx \sim$ sčítání obdélníčků šířky $h\cdot\phi'(x)$ a výšky $f(\phi(x))$.

<u>Věta:</u> Nechť V je otevřené okolí kompaktní množiny $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\phi : V \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ regulární. Potom pro spojitou funkci $f : \phi[D] \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_{\phi[D]} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_D f(\phi(\underline{x}))\cdot\underbrace{\left|\det(\nabla\phi(\underline{x}))\right|}_{\frac{D(\phi)}{D(x)}}\,dx$$

<u>Intuice:</u> Absolutní hodnota determinantu matice lineárního zobrazení je faktor, o který se deformují objemy těles po provedení tohoto zobrazení. Protože ϕ je regulární, tak má TD, takže je lokálně lineární a determinant tohoto lokálně lineárního zobrazení je právě Jakobián.

1. Série domácích úkolů – termín odevzdání 30.10.2023

Příklad 1: (1 bod)

Ukažte, že je-li funkce f spojitá na $\mathbb{R}^n$, potom množina $M = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}$ je otevřená.

Příklady 2:

Lze následující funkce dodefinovat tak, aby byly na $\mathbb{R}^2$ spojité?

(a) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$ (1 bod)

(c) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ (1 bod)

Příklad 3.

Určete definiční obor následující funkce a vypočtěte parciální derivace všude, kde existují:

$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{x+y}$, vyčíslete v bodě $[1, 1]$ (1 bod)

Příklady k procvičování (na doma, pokud si nejste jistí a chtěli byste se pocvičit) – nejde o domácí úkol!

Určete definiční obor – jde o ot. či uz. množinu? Rozhodněte, zda jde o spojitou funkci, příp. zda ji lze spojitě rozšířit. Umíte vypočítat parciální derivace?

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2} - 1}$ (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ (c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(d) $f(x, y) = \arcsin xy$ (e) $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x+1}$ (f) $f(x, y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1 f spojitá na $\mathbb{R}^n \iff \forall x, y\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \left(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon\right)$

M je otevřená $\iff \forall x \in M\ \exists \delta > 0 : \Omega(x, \delta) \subseteq M$

→ dostanu $x \in M$, $f(x) < 0$ ⇒ vezmu si nějaké jeho okolí t.ž. $d(f(x), f(y)) < |f(x)|$

→ potom pro $d = |\ldots|$ máme $2f(x) < f(y) < f(x) + |f(x)| = 0 \Rightarrow f(y) < 0$

→ tohle okolí musí ze spojitosti existovat

↳ budeme chtít δ pro $\varepsilon := |f(x)|$

② Lze funkci spojitě dodefinovat?

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = ?$

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0 \;, \quad f(x,x) = \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ tuto funkci nelze spojitě dodefinovat

b) $f(x,y) = (x+y)^2 \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, $f(0,0) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} f(x,0) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0 \\ f(x,x) = 4x^2 \sin\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right) \;\ldots \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 0 \end{array}\right\} \text{ možná } f(0,0) \to 0\,?$$

$$f'(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \ldots \text{ je } f' \text{ spojitá v } (0,0)\,?$$

spojitost: $\forall \bar{x}\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0 : \; d((0,0),\bar{x}) < \delta \Rightarrow d(0, f'(\bar{x})) < \varepsilon$

$\hookrightarrow \bar{x} = (x,y)$ $\qquad \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f'(x,y)| < \varepsilon$

$$|f'(x,y)| = (x+y)^2 \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq (x+y)^2 \overset{*}{\leq} 4(x^2+y^2) < 4\delta^2 \Rightarrow \text{zvolím } \delta := \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$$

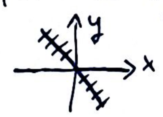
$\Rightarrow$ pro $\delta := \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$ platí $|f'(x,y)| < \varepsilon \Rightarrow$ lze spojitě dodefinovat

$*$: $(x+y)^2 \leq 4(x^2+y^2) \iff x^2+2xy+y^2 \leq 4x^2+4y^2 \iff 0 \leq 3x^2-2xy+3y^2 = (x-y)^2+2(x^2+y^2)$

③ Definiční obor, parciální derivace, hodnota v (1,1)

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y} \quad \Rightarrow \quad f(1,1) = \operatorname{arctg}\frac{0}{2} = 0$$

- D_f: $x+y \neq 0 \Rightarrow y \neq -x$



- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \dfrac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \dfrac{2y}{2x^2+2y^2} = \underline{\underline{\dfrac{y}{x^2+y^2}}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{1}{2}$

$\hookrightarrow (x,y) \neq (0,0)$

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \dfrac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{-2x}{2x^2+2y^2} = \underline{\underline{\dfrac{-x}{x^2+y^2}}} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{1}{2}$

$\hookrightarrow (x,y) \neq (0,0)$

JAKUB SMOLÍK

Couleslaw

2. Série domácích cvičení – termín odevzdání 13. 11. 2023

1. Najděte definiční obor, zjistěte, zda je funkce omezená shora a zda je omezená zdola. Spočítejte všechny derivace prvního a druhého řádu: (1 bod)

   $f(x,y) = \ln(x^2 - 2x - y)$

2. Vypočtěte derivaci funkce $f(x,y,z) = \sin(xyz)$ ve směru $(2,1,1)$ v bodě $(1,1,0)$. (1 bod)

3. Buď dána funkce $f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$ (1 bod)

   a) Najděte definiční obor D funkce f a načrtněte jej.

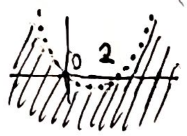
   b) Určete gradient funkce $\nabla f(x,y)$ v bodě $[1,1]$.

   c) Je funkce f v tomto bodě diferencovatelná? Pokud ano, napište její totální diferenciál v tomto bodě.

   d) Aproximujte f pomocí diferenciálu v bodě $[1.04; 0.99]$.

4. Zjistěte, zda lze funkci $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ dodefinovat tak, aby měla ve všech bodech R^2 totální diferenciál. Všude, kde existuje, totální diferenciál určete! (2 body)

① $D(f)$: $y < x^2 - 2x$



$f(x,y) = \ln(x^2 - 2x - y)$

• Omezená shora: Nechť $\exists K$ t.ž. $\forall x,y: f(x,y) < K$.

$x^2 - 2x = 2e^K \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+2e^K}$

Potom $f(1+\sqrt{1+2e^K}, 0) = \ln(2e^K - 0) = \ln(2) + K > K$. SPOR

• Omezená zdola: Nechť $\exists L$ t.ž. $\forall x,y$ $L < f(x,y)$

$x^2 - 2x = e^L \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+e^L}$

Potom $f(1+\sqrt{1+e^L}, \frac{1}{2}e^L) = \ln(e^L - \frac{1}{2}e^L) = \ln(\frac{1}{2}e^L) = \ln(\frac{1}{2}) + L < L$. SPOR

$\Rightarrow$ f není omezená.

• $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x-2}{x^2-2x-y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2-2x-y) - 2(x-1)(2x-2)}{(x^2-2x-y)^2} = 2 \cdot \frac{-x^2+2x-y-2}{(x^2-2x-y)^2}$

• $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{x^2-2x-y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x^2-2x-y)}$

• $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2x-2}{(x^2-2x-y)^2}$ ... protože to je spojité

② $f(x,y,z) = \sin(xyz)$, $v = (2,1,1)$, $a = (1,1,0)$

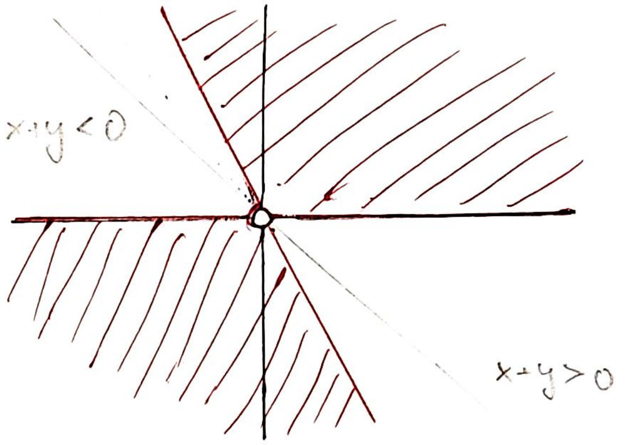
$\nabla f = (yz \cdot \cos(xyz), xz \cdot \cos(x,y,z), xy \cdot \cos(xyz))$; $\nabla f(a) = (0,0,1)$

$D_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle = 0 + 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$

tohle můžu udělat, protože f má v a TD

JAKUB SMOLÍK
Coulestaw

③ $f(x,y) = \arccos\left(\frac{x}{x+y}\right)$



a) $D(f): -1 \le \frac{x}{x+y} \le 1 \quad , \quad y \ne -x$

$\bullet\ x+y>0: \ -x-y \le x \le x+y \Rightarrow \ y \ge 0$
$\quad -2x-y \le 0 \le y \qquad\qquad y \ge -2x$

$\bullet\ x+y<0: \ -2x-y \ge 0 \ge y \Rightarrow \ y \le 0$
$\qquad\qquad y \le -2x$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{(x+y)-x}{(x+y)^2} = \frac{-y}{|x+y|} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-x^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{-x}{(x+y)^2} = \frac{x}{|x+y|} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+y)^2-x^2}}$$

$$\nabla f(1,1) = \left(-\frac{1}{2\sqrt3}, \frac{1}{2\sqrt3}\right)$$

c) parciální derivace jsou v okolí (1,1) spojité $\Rightarrow$ TD existuje

$$D_f^{(1,1)}(h_1,h_2) = -h_1 \cdot \frac{1}{2\sqrt3} + h_2 \cdot \frac{1}{2\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{6}(h_2-h_1)$$

d) $$f(1.04, 0.99) \approx f(1,1) + D_f^{(1,1)}(0.04,-0.01) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt3}{6}(-0.05) \approx 1.033$$

④ $f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$, $Df = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, spojitost OK mimo $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - x^3y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \ne (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2+y^2) - x^3y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \ne (0,0)$$

spojitost na D(f) OK

$\bullet$ Pro $(x,y) \ne (0,0)$: $D_f^{(x,y)}(h_1,h_2) = h_1 \cdot \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} + h_2 \cdot \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$\bullet$ Pro $(x,y) = (0,0)$:

a) dodefinujeme $f(0,0) := 0$ a ověříme, že pak f bude v $(0,0)$ spojitá

$\forall (x,y)\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{x^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2 \le x^2+y^2 < \delta^2 \Rightarrow \delta := \sqrt{\varepsilon} \quad ✓$$

b) ukážeme z definice TD, že $D_f^{(0,0)}(h_1,h_2) = 0$.

$$f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) = 0 + \|h\| \cdot \mu(h) \Rightarrow \mu(h) = \frac{f(h_1,h_2)}{\|h\|}$$

$\Rightarrow$ pro $h \ne (0,0)$ je μ definovaná a spojitá.
$\Rightarrow$ pro $h = (0,0)$ jí dodefinujeme jako $\mu(0,0) := 0$ a ověříme spojitost:

$\forall (x,y)\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0: \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |\mu(x,y)| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |f(x,y)| \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x^2+y^2) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \delta := \varepsilon$$

$\Rightarrow$ takže μ je spojitá v okolí $(0,0)$ a $\mu(0,0) = 0$. Tedy $D_f^{(0,0)}(h_1,h_2) = 0$.
$\Rightarrow f$ lze dodefinovat aby měla TD na celém $\mathbb{R}^2$

3. Série domácích cvičení – termín odevzdání 27. 11. 2023

1. Mějme funkci $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$. (2 body)
   Vypočtěte její totální diferenciál všude, kde existuje. Vyčíslete jej v bodě $(1,1,1)$.

2. Mějme následující funkci: (2 body)

$$f(x,y) = 4 \cdot \sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$$

a) Najděte definiční obor funkce f a načrtněte jej.
b) Spočítejte parciální derivace všude, kde existují.
c) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $[0,-3]$ a určete v tomto bodě její totální diferenciál.
d) Napište rovnici tečné roviny ke grafu f v bodě $[0,-3,8]$.
e) Najděte lineární aproximaci funkce f v okolí bodu $[0,-3]$.

3. Nechť $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$. (2 body)
   Určete tečnou rovinu T, která je kolmá k přímce $\{[t,t,t] \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$.
   Ve kterém bodě protíná T přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$?

Tečná nadrovina. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Tečnou nadrovinou ke grafu funkce f v bodě* $[a, f(a)]$ rozumíme graf fce T, $x \in \mathbb{R}^n$:

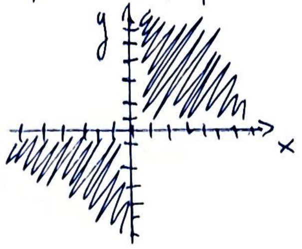
$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n)$$

4. Mějme funkci $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a funkce $r,\ s,\ t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: (2 body)
   $f(u,v,w) = u + vw$
   $r(x) = x^2$, $s(x) = x^3$ a $t(x) = \ln x$
   a) Spočítejte všechny parciální derivace složené funkce $f(r(x), s(x), t(x))$.
   Užijte maticové značení z přednášky!
   b) Zkontrolujte výpočtem derivací přímo („postaru").

Jakub Smolík
Coubeslaw

$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$, $TD = ?$, $TD(1,1,1) = ?$

- Def. obor: $y \neq 0$, $\frac{x}{y} > 0$
  $x \neq 0$
  $z \neq 0$



$f(x,y,z) = e^{\frac{1}{z}\ln\left(\frac{x}{y}\right)}$

- spojitost: $\frac{x}{y}$ i $a^{\frac{1}{z}}$ jsou spojité na $D(f) \Rightarrow f$ je spojitá na celém $D(f)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \quad \ldots \; x,y,z \neq 0, \; \frac{x}{y} > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{1}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \quad \ldots \; x,y,z \neq 0, \; \frac{x}{y} > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \ldots x,y,z \neq 0, \; \frac{x}{y} > 0$$

definované na celém $D(f)$

$\Rightarrow$ všechny parciální derivace jsou spojité na celém $D(f)$

- TD: $D_f^{(x,y,z)}(h) = \frac{1}{xz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} h_1 - \frac{1}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} h_2 - \frac{1}{z^2}\ln\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} h_3 =$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \cdot \left(\frac{1}{x} h_1 - \frac{1}{y} h_2 - \frac{1}{z}\ln\left(\frac{x}{y}\right) h_3\right)$$

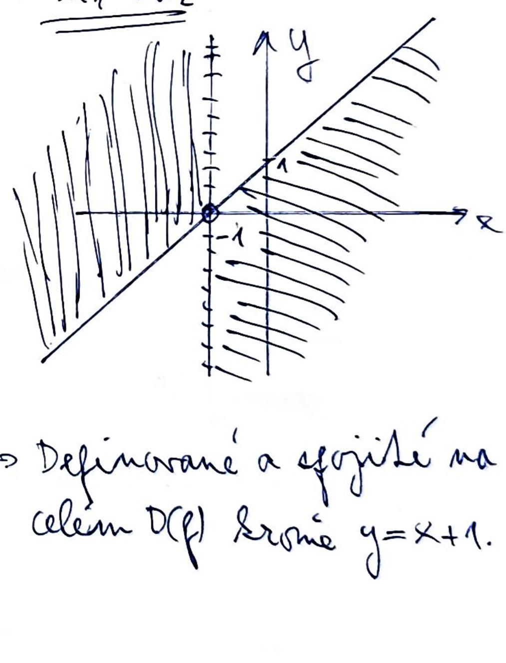
$$D_f^{(1,1,1)}(h) = 1 \cdot 1 \cdot (1 h_1 - 1 h_2 - 1 \cdot \ln(1) h_3) = \underline{\underline{h_1 - h_2}}$$

② $f(x,y) = 4\sqrt{1 - \frac{y}{x+1}}$

a) Def. obor: $x \neq -1$, $\frac{y}{x+1} \leq 1$

$\nearrow x+1 > 0 : y \leq x+1$

$\searrow x+1 < 0 : y \geq x+1$



$\hookrightarrow f$ je spojitá na celém $D(f)$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}} \cdot \frac{y}{(x+1)^2} = \frac{2y}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}} \cdot \frac{-1}{x+1} = \frac{-2}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y}{x+1}}}$

$x \neq -1$, $\frac{y}{x+1} < 1$ $\Rightarrow$ Definované a spojité na celém $D(f)$ kromě $y = x+1$.

c) TD v $(0,-3)$ ... spojité PD $\Rightarrow$ TD

$$D_f^{(0,-3)}(h) = \frac{-6}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+3}} h_1 + \frac{-2}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} h_2 = \underline{\underline{-3h_1 - h_2}}$$

d) $f(0,-3) = 4 \cdot \sqrt{1+3} = 8$ ✓

$\Rightarrow T_f^{(0,-3)}(x,y) = 8 - 3(x-0) - 1(y+3) = \underline{\underline{5 - 3x - y}}$ $\Rightarrow$ tečná rovina $3x + y + z = 5$

e) lineární aproximace f v okolí $(0,-3)$

$\Rightarrow$ přesně tohle dělá ta tečná rovina

Jakub Smolík
Coulesław

(3) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$

→ spojitost OK všude

$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4$ → spojitost OK všude

$T_f^{(a_1,a_2)}(x,y) = (-2a_1 + 2)(x - a_1) + (-2a_2 + 4)(y - a_2)$

$T_f^{(a_1,a_2)}(x,y) = (2 - 2a_1)x + (4 - 2a_2)y + a_1(2a_1 - 2) + a_2(2a_2 - 4)$

$z = -x - y - c$ ... plocha rovné na $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 2 - 2a_1 = -1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow 4 - 2a_2 = -1 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{2} \end{array}\right\} -c = \frac{3}{2}\cdot 1 + \frac{5}{2}\cdot 1 = 4$$

$\Rightarrow \underline{\underline{T_f^{(a_1,a_2)}(x,y) = -x - y + 4}}$

• $T \cap \{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ... $t = -0 - 0 + 4 = 4 \Rightarrow$ v bodě $\underline{\underline{(0,0,4)}}$.

(4) $f(u,v,w) = u + vw$, $r(x) = x^2$, $s(x) = x^3$, $t(x) = \ln(x)$

$h(x) := f(r(x), s(x), t(x))$, $g(x) = (r(x), s(x), t(x))$

$$D_h(x) = D_f(g(x)) \cdot Dg(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}(g(x)), \frac{\partial f}{\partial v}(g(x)), \frac{\partial f}{\partial w}(g(x))\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial t}{\partial x}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2x + t(x) \cdot 3x^2 + s(x) \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{2x + 3x^2 \ln(x) + x^2}}$$

podmínky:
r, s, t mají derivace ✓
f má totální diferenciál ✓

Kontrola:

$h(x) = x^2 + x^3 \ln(x)$

$\frac{\partial h}{\partial x}(x) = 2x + 3x^2 \ln(x) + x^2$ ✓

Průběžný test A – 11. 12. 2023

Jméno:

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{d}{dx}x \checkmark$$

$$\frac{d}{dx}|f(x)| = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot \frac{d}{dx}f(x) \checkmark$$

1. Mějme následující funkci:

$$f(x,y) = \ln\left|\frac{1}{y} - x\right|$$

(a) Najděte definiční obor D_f funkce f a načrtněte jej.
(b) Je D_f otevřená nebo uzavřená množina? Jde o kompaktní množinu? (Nemusíte formálně dokazovat, ale zdůvodněte!)
(c) Vypočítejte gradient ∇f pro všechny body, ve kterých existuje.
(d) Kde všude je funkce f diferencovatelná? Pokud totální diferenciál existuje v bodě $[1,2]$, určete ho!
(f) Pokud existuje tečná rovina ke grafu f v bodě $[1,2,?]$, napište její rovnici a určete normálový vektor.

Vše pečlivě zdůvodněte! (5 bodů)

2. Mějme následující funkci f a množinu M:

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2\ , \quad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$$

Najděte pro funkci f na množině M všechny body podezřelé z extrému; určete globální extrémy f na M.

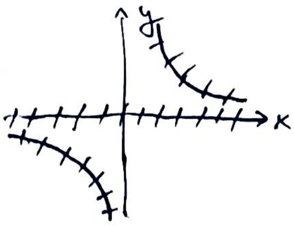
Postup zdůvodněte! (5 bodů)

Jakub Smolík
Coulestaw

$f(x,y) = \ln\left|\frac{1}{y} - x\right|$

(1b)

a) $y \neq 0$, $\frac{1}{y} - x \neq 0 \Rightarrow y \neq \frac{1}{x}$ ✓ ✓



$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \vee y = \frac{1}{x}\}$ ✓

b) D_f je otevřená protože $\mathbb{R}^2 \setminus D_f$ tedy $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \vee y = \frac{1}{x}\}$ je uzavřená ✓
D_f není kompaktní protože je otevřená a není omezená ✓ (1b)

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\left|\frac{1}{y} - x\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{y} - x\right) \cdot (-1) = \frac{-1}{\frac{1}{y} - x} = \frac{y}{xy - 1}$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\left|\frac{1}{y} - x\right|} \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{y} - x\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-1}{y^2\left(\frac{1}{y} - x\right)} = \frac{1}{xy^2 - y}$ ✓

definované na celém D_f
spojité na celém D_f ✓

(1b)

$\nabla f = \left(\frac{y}{xy - 1}, \frac{1}{xy^2 - y}\right)$ pro $\forall (x,y) \in D_f$ ✓

d) PD derivace spojité na celém $D_f \Rightarrow$ TD na celém D_f ✓

$D_f^{(1,2)}(h_1, h_2) = h_1 \cdot \frac{2}{2-1} + h_2 \cdot \frac{1}{4-2} = 2h_1 + \frac{1}{2}h_2$ ✓ (1b)

e) $f(1,2) = \ln\left|\frac{1}{2} - 1\right| = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ✓

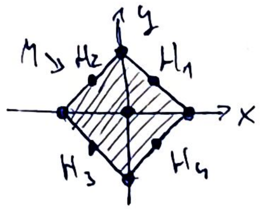
$T_f^{(1,2)} = -\ln(2) + (x-1) \cdot 2 + (y-2) \cdot \frac{1}{2} = 2x + \frac{1}{2}y - 2 - 1 - \ln(2) = z$

$\Rightarrow$ tečná rovina v bodě $(1, 2, -\ln(2))$ je $2x + \frac{1}{2}y - z = 3 + \ln(2)$ (1b)

$\rightarrow$ normálový v. $\vec{n} = (2, \frac{1}{2}, -1)$.

5b

② $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\}$



f je definovaná + spojitá na $\mathbb{R}^2$

PD f jsou taky def. + spoj na $\mathbb{R}^2$ ✓

1) Interiér M: $\nabla f=(2x-y,\ 2y-x)$

$\nabla f=(0,0) \iff 2x-y=0 \Rightarrow y=2x$
$\qquad\qquad\qquad 2y-x=0 \Rightarrow 4x-x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \Big\}$ $[0,0]$ ✓

2) Rohy M: $[1,0],[0,1],[-1,0],[0,-1]$ ✓

3) Hranice M:

- H_1: $y=1-x \Rightarrow g_1(x):=f(x,1-x)=x^2-\overbrace{x(1-x)}^{x^2-x}+1-2x+x^2=3x^2-3x+1$
  $g_1'(x)=6x-3=0 \iff x=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
- H_2: $y=1+x \Rightarrow g_2(x):=f(x,1+x)=x^2-x-x^2+1+2x+x^2=x^2+x+1$
  $g_2'(x)=2x+1=0 \iff x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$
- H_3: $y=-1-x \Rightarrow g_3(x):=f(x,-1-x)=x^2+x+x^2+1+2x+x^2=3x^2+3x+1$
  $g_3'(x)=6x+3=0 \iff x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]$
- H_4: $y=-1+x \Rightarrow g_4(x):=f(x,x-1)=x^2-x^2+x+x^2-2x+1=x^2-x+1$
  $g_4'(x)=2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]$ ✓

M je uzavřená a omezená ⇒ kompaktní ✓ $\Big\}$ f na M nabývá min. a max.
f je na M spojitá

- podezřelé body

$f(0,0)=0$

$f(1,0)=f(0,1)=f(-1,0)=f(0,-1)=1$

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

- globální extrémy na M ✓

g. maximum je v bodech $[1,0],[0,1],[-1,0],[0,-1]$ → 1

g. minimum je v bodě $[0,0]$ → 0 ✓

- lokální extrémy na M

56

$H_f=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix} \Rightarrow H_f^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=H_f^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=H_f^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=H_f^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ ✓

$\chi_H(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-1=(1-\lambda)(3-\lambda) \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=3$

⇒ H_f je pozitivně definitní ⇒ v bodech $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right],\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]$ jsou lokální minima $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$. ✓

Zápočtový test B – 8. 1. 2024

Jméno: Jakub Smolík

Počet listů: 2 + zadání

---

1. Buď dána funkce (10 bodů)

$$f : (x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

(a) Najděte definiční obor D_f funkce f a načrtněte jej.
(b) Pokud to lze, najděte fci F, která je spojitým rozšířením funkce f na R^2.
(c) Vypočítejte gradient $\nabla f(x, y)$ v bodě $[1, 2]$.
(d) Zjistěte, v jakých bodech má funkce f totální diferenciál.
Pokud má funkce f totální diferenciál v bodě $[1, 2]$, spočtěte ho.
(e) Aproximujte hodnotu funkce f v bodě $[1,02; 1,99]$ pomocí jejího totálního diferenciálu v bodě $[1, 2]$.

Vše pečlivě zdůvodněte!

2. Mějme následující vztahy: (10 bodů)

$$\begin{aligned} \exp(z) - xyz &= 0 \\ \ln(xy) - \tfrac{x}{z} &= 0 \end{aligned}$$

(a) Dokažte, že existují funkce $y = y(x)$ a $z = z(x)$ třídy C^∞, pro které platí $y(1) = e$, $z(1) = 1$, a které na jistém okolí bodu $[1]$ tyto vztahy splňují.
(Napište, co přesně vyplývá z věty o implicitních funkcích!)
(b) Vypočítejte $y'(1)$ a $z'(1)$.

3. Najděte všechny kandidáty na (lokální) extrémy funkce f na množině M: (12 bodů)

$$f(x, y) = \exp(x^2 - y^2 + y)\ ,\ M = \{[x, y] \in R^2;\ x^2 + y^2 \le 1\ \ \&\ 0 \le y\}$$

Nabývá tato funkce na dané množině globálního maxima, resp. globálního minima? V jakých bodech?
Pečlivě zdůvodněte!

4. Určete primitivní funkci na maximálních intervalech, kde existuje: (8 bodů)

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$$

:-)

1) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

✓ (2b)

a, $D_f: x+y \neq 0 \Rightarrow y \neq -x$ ✓

b, $f(x,-x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+x}{x-x}\right)$

$x>0$

$x>0$: $\lim_{y\to x^+} f(x,-y) = \lim_{y\to x^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \left\|\operatorname{arctg}\left(\frac{x+x^+}{0^-}\right)\right\| = \left\|\operatorname{arctg}(-\infty)\right\| = -\frac{\pi}{2}$ ✓

$\lim_{y\to x^-} f(x,-y) = \ldots = \left\|\operatorname{arctg}(+\infty)\right\| = \frac{\pi}{2}$ ✓

(2b)

$\Rightarrow$ funkci f <u>nelze</u> na přímce $y=-x$ spojitě dodefinovat

c, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2+(x-y)^2} = \frac{2y}{2x^2+2y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$ ✓ ... ~~$(x,y)\neq(0,0)$~~ na D_f

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \cdot \frac{-1(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{2x^2+2y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$ ✓ ... ~~$(x,y)\neq(0,0)$~~ na D_f

$\Rightarrow$ f spojitá na celém D_f ✓

PD definované a spojité na celém D_f ✓ $\Rightarrow \exists$ TD na celém D_f ✓

$[1,2]\in D_f \Rightarrow \nabla f(1,2) = \left(\frac{2}{1+4}, \frac{-1}{1+4}\right) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ✓

(2b)

d, TD na celém D_f

$D_f^{(1,2)}(h_1,h_2) = \frac{2}{5}h_1 - \frac{1}{5}h_2 = \frac{1}{5}(2h_1-h_2)$ ✓

(2b)

e, $f(1{,}02, 1.99) \approx f(1,2) + D_f^{(1,2)}(0.02, -0.01) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-2}{1+2}\right) + \frac{1}{5}(2\cdot 0.02+0.01)$

$= \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + 0.01 = 0.01 - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$ ✓

(2b)

(10b)

Jakub Smolík

1) $F_1(x,y,z) = e^z - xyz = 0$

$F_2(x,y,z) = \ln(xy) - \frac{x}{z} = 0$ chci $y = y(x)$ a $z = z(x)$

Implicitní funkce

i) $a = (1, e, 1)$, $F_1(a) = e - e = 0$, $F_2(a) = \ln(e) - 1 = 0$ ✓ ✓

ii) F_1 a F_2 spojité a spojité v okolí bodu a ~~Hledá spojitost~~ ~~$\frac{\partial F_1}{\partial x}$ $\frac{\partial F_2}{\partial x}$~~

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -xz$ ✓, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = e^z - xy$

$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{x}{z^2}$

PD definované a spojité v okolí bodu a

iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{e} & 1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{1}{e} \neq 0$ ✓

$\forall x \in U_{(1)}\ \exists!\ (y,z) \in V(e,1)$

$\Rightarrow \exists U(1), \exists V(e,1): \cancel{\forall (y,z) \in V : \exists!\ x \in U} \cdot$ $y = y(x)$, $F_1(x, y(x), z(x)) = 0$

$z = z(x)$, $F_2(x, y(x), z(x)) = 0$

Protože $U \times V$ je otevřené okolí bodu a & F_1 a F_2 jsou tam C^1, tak PD jsou tam taky C^1. ✓

$\frac{\partial F_1}{\partial x} = e^z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - yz - x \cdot \frac{\partial y}{\partial x} z - xy \frac{\partial z}{\partial x}$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1}{xy} \cdot \left(y + x \cdot \frac{\partial y}{\partial x}\right) - \frac{z - x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}$

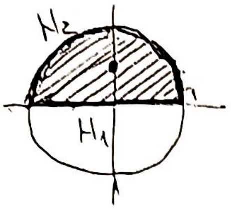
$\frac{\partial F_1}{\partial x}(a) = e \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - e - \frac{\partial y}{\partial x} - e \frac{\partial z}{\partial x} = -e - \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial y}{\partial x}(a) = -e}}$ ✓

$\frac{\partial F_2}{\partial x}(a) = \frac{1}{e}\left(e + \frac{\partial y}{\partial x}\right) - \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 1 + \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} - 1 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{e} \cdot (-e) + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(a) = 1$ ✓

9,5b

③ $f(x,y) = e^{x^2-y^2+y}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \ \& \ y \geq 0\}$



f je na M definovaná a spojitá a omezená ✓

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2+y} \cdot (2x)$, $\rightarrow$ PD def. a spojité ✓

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2+y}(1-2y)$

i) Interiér M:

$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff x e^{x^2-y^2+y} = 0 \Rightarrow x=0$
$(1-2y)e^{x^2-y^2+y} = 0 \Rightarrow 1-2y=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ $\Big\}$ $[0,\frac{1}{2}]$ ✓

ii) divné body: $[-1,0]$, $[1,0]$ ✓ "špicky"

iii) Hranica H_1: $y=0 \Rightarrow g(x) := f(x,0) = e^{x^2}$
$g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 0 \iff x=0$ $\Big\}$ $[0,0]$ ✓

iiii) Hranica H_2: $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow h(x) := f(x,\sqrt{1-x^2}) = e^{x^2-(1-x^2)+\sqrt{1-x^2}}$

$h(x) = e^{2x^2-1+\sqrt{1-x^2}}$ lepe: $x^2 = 1-y^2$!

$h'(x) = e^{2x^2-1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(4x - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \iff 4x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$4x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \iff x=0 \ \vee \ 4 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{4} \iff 1-x^2 = \frac{1}{16}$

$\iff x^2 = \frac{15}{16} \iff |x| = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\Rightarrow [0,1]$, $[\pm\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}]$ ✓

Protože M je kompakt & f je spojitá na M, tak tam nabývá min a max.

Podezřelé body: $[0,\frac{1}{2}]$, $[-1,0]$, $[1,0]$, $[0,0]$, $[0,1]$, $[\pm\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{1}{4}]$ ✓

$f(0,\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}$

$f(-1,0) = f(1,0) = e$

$f(0,0) = e^0 = 1$
$f(0,1) = e^{1-1} = 1$ $\Big\}$ minima

$f(\pm\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{1}{4}) = e^{\frac{15}{16}-\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} = e^{\frac{7}{8}+\frac{2}{8}} = e^{\frac{9}{8}}$ $\rightarrow$ maximum

12b

f nabývá globálního minima v bodoch $[0,0]$ a $[0,1]$ ... 1 ✓
globálního maxima v bodech $[\pm\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{1}{4}]$ ... $\exp(9/8)$

4. Série domácích cvičení – termín odevzdání 11. 12. 2023

1. Mějme množinu $M = \{(x, y, z) \in R^3;\ x \sin z + y \cos z - e^z = 0\}$. (1 bod)

(a) Ukažte, že tuto množinu lze na okolí bodu $a = (2, 1, 0)$ popsat jako graf funkce $z = z(x, y)$, kde $z(2, 1) = 0$.

(b) Spočtěte parciální derivace prvního řádu této funkce z v příslušném bodu a.

(c) Napište rovnici tečné roviny (pokud existuje) ke grafu funkce z v bodě a.

2. Najděte všechny globální a lokální extrémy následující funkce $f(x, y)$ (2 body)
na jejím definičním oboru: $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}$

3. Zjistěte pomocí Lagrangeových multiplikátorů lokální (2 body)
extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

4. Zjistěte maximální a minimální hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$
na množině $M = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$.
Využijte libovolných metod, ale detailně zdůvodněte. (1 bod)
BONUS: Vyšetřete, zda má tato funkce i lokální extrémy. (1 bod)

Pro zájemce o další procvičení (nejde o dom. úkol)

1. Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru):

$$f(x, y, z) = -x^3 + 3xz + 2y - y^2 - 3z^2$$

2. Najděte všechny body podezřelé z extrému, případně určete též lokální a globální extrémy následující funkce f (na celém definičním oboru

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokud byste potřebovali, můžete využít skutečnost, že funkce f je spojitá a má tot. diferenciál na $\mathbb{R}^2$ (bylo za domácí úkol).

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x\sin(z) + y\cos(z) - e^z = 0\}$ $\Rightarrow z = z(x,y)$

Jakub Smolík
Couleslaw

a, $a = (2,1,0)$, $f(x,y,z) = x\sin(z) + y\cos(z) - e^z$ $\rightarrow D_f = \mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ spojité na celém D_f

i, $f(a) = 2\cdot 0 + 1\cdot 1 - e^0 = 0$ ✓

ii, f spojité PD v okolí $(2,1,0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin(z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x\cos(z) - y\sin(z) - e^z \end{aligned}\right\} \text{spojité na celém } \mathbb{R}^3 \checkmark$$

iii, $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial z}(a)\right) = 2\cdot 1 - 1\cdot 0 - e^0 = 1 \neq 0$ ✓

$\Rightarrow \exists U(2,1)\ \exists V(0)$ t.ž. $\forall (x,y) \in U\ \exists! z \in V : z = z(x,y)$, $f(x,y,z(x,y)) = 0$

b, na $U\times V$: $f(x,y,z(x,y)) = 0$ na okolí $(2,1,0)$

$\hookrightarrow$ je to otevřená množina a f je nulová $\Rightarrow$ PD f jsou také nulové

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(z) + x\cdot\cos(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - y\sin(z)\frac{\partial z}{\partial x} - e^z\frac{\partial z}{\partial x}$

  $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \Rightarrow 2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(a) - 1\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(a) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial x}(a) = 0}}$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(z)\frac{\partial z}{\partial y} + \cos(z) - y\cdot\sin(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - e^z\frac{\partial z}{\partial y}$

  $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \Rightarrow 2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(a) + 1 - \frac{\partial z}{\partial y}(a) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial z}{\partial y}(a) = -1}}$

c, $T_z^{(2,1)} = z(2,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(a)\cdot(x-2) + \frac{\partial z}{\partial y}(a)\cdot(y-1) = -1(y-1) = \underline{\underline{1-y = z}}$

2 $\underline{f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + \frac{y^2}{2}}$ $\rightarrow$ extrémy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 - y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y - x \end{aligned}\right\} \text{f i PD jsou definované a spojité na celém } \mathbb{R}^2$$

$Df = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y$ & $x^2 - y = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$

$\Rightarrow$ podezřelé body $[0,0]$ a $[1,1]$

$\rightarrow$ pokud $y = 0$: $f(x,y) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow$ f není omezená $\Rightarrow$ f nemá globální extrémy

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_H(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 \Rightarrow \left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0\end{aligned}\right\}$ sedlo

$H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_H(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow$ min

$\Rightarrow$ v bodě $[0,0]$ má fce f sedlo a v bodě $[1,1]$ lokální minimum.

Jakub Smolík
Couleslaw

③ $f(x,y) = x + y$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1=0\}$ → extrémy

$g(x,y) = x^2+y^2-1$ → f, g definované + spojité na celém $\mathbb{R}^2$
PD také ——||——

Lagrangeovy multiplikátory

i, $\nabla g = (2x, 2y) \neq (0,0)$ na M

ii, $(\bar{x}, \bar{y})$ je extrém $\Rightarrow \exists \lambda : L = f + \lambda g$

nenastane

a, $0 = \frac{\partial L}{\partial x} \Rightarrow 1 + 2\lambda x = 0$
b, $0 = \frac{\partial L}{\partial y} \Rightarrow 1 + 2\lambda y = 0$ $\Big\}\ominus$ $2\lambda(x-y) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee x = y$

$x^2+y^2-1=0$ & $x = y \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

⇒ podezřelé body $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ a $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

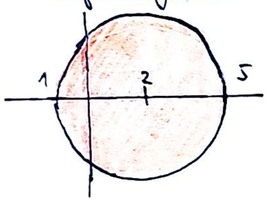
spojitá

→ M je omezená a uzavřená ⇒ kompaktní ⇒ f na ní nabývá min a max

- $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ ... maximum
- $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$ ... minimum

④ $f(x,y) = x^2+y^2-6x-4y+11$, $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-4x \leq 5\}$ → extrémy

$(x-2)^2+y^2 \leq 9$



↳ spojité PD, definované všude

a, Interiér M: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-6$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y-4$ ... $\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}$

↳ je to uvnitř? $9+4-12 = 1 \leq 5$ ✓ ⇒ podezřelý $[3,2]$

b, Hranice M: Lagrangeovy multiplikátory

$g(x,y) = x^2+y^2-4x-5$

i, $\nabla g = (2x-4, 2y) \neq (0,0)$ na hranici M

ii, (1) $0 = 2x-6+\lambda(2x-4) \Rightarrow 0 = x-3+\lambda(x-2)$

(2) $0 = 2y-4+\lambda \cdot 2y \Rightarrow 0 = y-2+\lambda y \Rightarrow \lambda = \frac{2-y}{y}$

(3) $0 = x^2+y^2-4x-5$

⇒ (1) & λ: $x-3+\frac{1}{y}(x-2)(2-y) = 0 \Rightarrow xy-3y+2x-xy-4+2y = 0$

$-y+2x-4 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2x-4}}$

⇒ (3) & y: $x^2+4x^2-16x+16-4x-5 = 0 \Rightarrow 5x^2-20x+11 = 0$

$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-220}}{10} = \underline{\underline{2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}}} \Rightarrow y_{1,2} = 2\left(2 \pm \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 4 = \underline{\underline{\pm \frac{6}{\sqrt{5}}}}$

- podezřelé body: $h_1 = [3,2]$, $h_2 = \left[2+\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right]$, $h_3 = \left[2-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{6}{\sqrt{5}}\right]$

$f(h_1) = 9+4-18-8+11 = -2$

$f(h_2) = 4+\frac{12}{\sqrt{5}}+\frac{9}{5}+\frac{36}{5}-12-\frac{18}{\sqrt{5}}-\frac{24}{\sqrt{5}}+11 = 3+\frac{45}{5}-\frac{30}{\sqrt{5}} = 12-6\sqrt{5} \approx -1.4$

$f(h_3) = 4-\frac{12}{\sqrt{5}}+\frac{9}{5}+\frac{36}{5}-12+\frac{18}{\sqrt{5}}+\frac{24}{\sqrt{5}}+11 = 3+9+\frac{30}{\sqrt{5}} = 12+6\sqrt{5} \approx 25.4$

→ M je kompaktní a f spojitá ⇒ max. je $\underline{12+6\sqrt{5}}$, min. je $\underline{-2}$