Edmondsův algoritmus

Def: Párování M v grafu G je množina navzájem disjunktních hran.

Def: Párování M je maximální $\equiv \nexists$ párování M': $|M'| \leq |M|$.

Def: Vrchol $v \in V(G)$ je volný vůči $M \equiv$ není v žádné hraně z M.

Def: Střídavá cesta v G s párováním M je cesta, kde se střídají párové a nepárové hrany.

Def: Střídavá cesta je augmentující $\equiv$ začíná i končí volným vrcholem (ASC)

👁 ASC můžu alternovat a tím získám párování o 1 větší

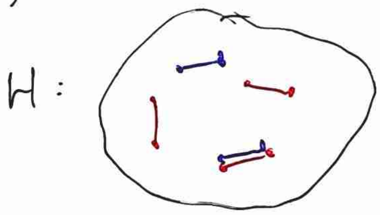
Lemma: Párování M v G je maximální $\Longleftrightarrow$ M nemá žádnou ASC.

Dk: $\Rightarrow$: kdyby $\exists$ ASC, tak by M nebylo maximální ↯

$\Leftarrow$: pro spor nechť M' je větší párování

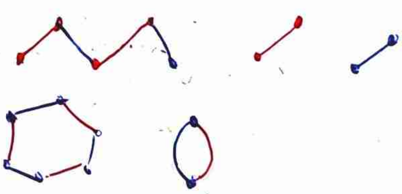
↳ uvažme graf $H := (V, M \cup M')$

M červené
M' modré



👁 H má stupně vrcholů nejvýše 2

$\Rightarrow$ H je disj. sjednocení / cest (střídavé) \ kružnic (sudé)



↳ protože kružnice jsou sudé, tak $\#$z M = $\#$z M'

↳ jelikož $|M'| > |M|$, tak alespoň 1 cesta musí začínat i končit hranou z M'

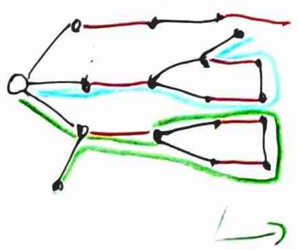
$\Rightarrow$ M má ASC ↯

nebo

∎

- Hledání ASC

→ začnu ve volném vrcholu a jedu BFS – funguje ve stromech, ale v obecném grafu může být cyklus



→ cyklus ale $\exists$ ASC (modrá)

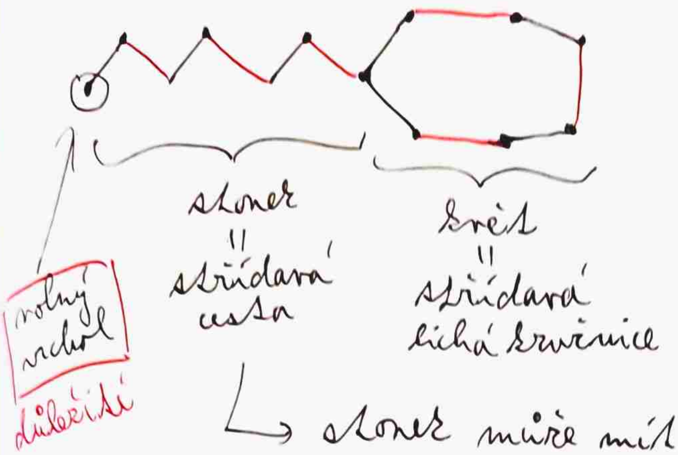
↳ jenže BFS ji nenajde ∵ není nejkratší cesta do cílového vrcholu

↳ řešení: navštívit každou hranu z obou směrů

↳ → ! problém: můžu najít ASC kde se opakuje hrana

⟹ jednoduchý přístup s BFS na obecné grafy nefunguje

• Kytičkový (Blossom) algoritmus



→ v grafu musí být nějaký takový obrázek aby to selhalo

⟹ BFS přístup funguje ve stromech a bipartitních grafech (nemají liché cykly)

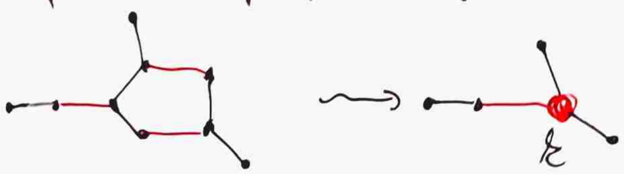
! kytka obsahuje právě 1 volný vrchol

↳ stonek může mít nulovou velikost

Lemma: Nechť G je graf, M párování, K květ kytky. Potom

G má ASC $\iff$ $G.K$ má ASC

Def: $G.K$ je graf vzniklý kontrakcí květu.



$V(G.K) := V(G) \setminus V(K) \cup \{k\}$

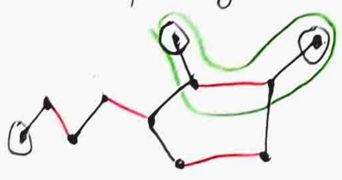
$E(G.K) := E(G) \setminus \binom{K}{2} \cup \{uk \mid \exists uv \in E(G): u \notin K, v \in K\}$

podobně lze z M vyrobit $M.K$ v $G.K$

Dk: ⟹: Nechť ∃ ASC v G

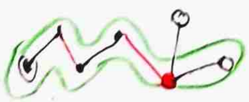
a) nedotýká se květu ⟹ stejná cesta funguje i v $G.K$

b) dotýká se květu



↳ do květu tedy vede nějaká ASC (v se na něj napojuje černou (nenapárovanou) hranou

→ ASC v $G.K$ je stonek spojený s touhle cestou = ocásek



! může se stát že ten ocásek jde kousek po stonku

↳ tady je pak potřeba dělat nějaký rozbor případů

⟸: Nechť ∃ ASC v $G.K$

a) nepoužívá květový vrchol ⟹ stejná cesta funguje v G

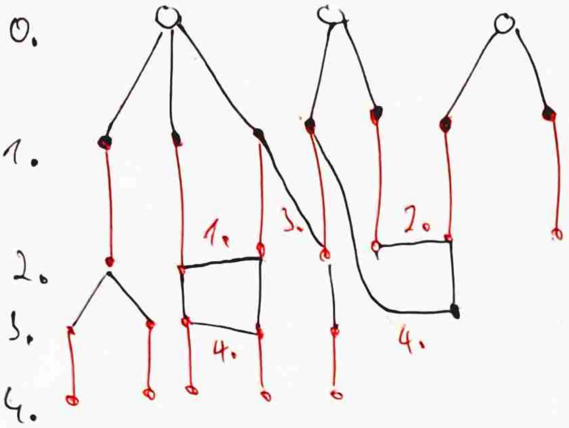
b) používá květový vrchol

↳ okopíruju část mimo květ a přidám cestu mezi vrcholy květu na které se napojují ty dva ocásky

→ tohle lze zjevně lineárně

• Edmondův les

→ dělám BFS ale dávám si pozor na kytky



volné vrcholy

a) hrany mezi sudými hladinami tvoří vždy buď 1. kytku
2. ASC

b) hrany mezi sudou a lichou hladinou 3. nikomu nevadí ale ani nepomohou protože mi nedají žádnou ASC

c) hrany mezi lichými hladinami 4. mohu také ignorovat → nedají ASC.

Algoritmus Max Matching

Vstup: Graf $G=(V,E)$

1. $M = \emptyset$
2. $P = ASC(G,M)$
3. Pokud $P \neq \emptyset$: vrať M
4. Jinak Alternate(P,M)
5. Goto 2.

ASC(Graf G, Matching M) BFS

1. P = NajdiASCneboKytku(G, M)
2. Pokud $P = \emptyset$: vrať P
3. Pokud P je ASC: vrať P
4. P je kytka → vyrob G.K, M.K kontrakcí květu
5. P' = ASC(G.K, M.K)
6. Pokud $P' = \emptyset$, vrať P'
7. Jinak vrať ASC v G vzniklou z P'

↳ tohle se zarekurzí nejvýše $|V|$-krát
↳ každá konstrukce Edmondova lesa je lineární

$\Rightarrow O(|V|\cdot(|V|+|E|))$

Najdi ASC nebo Kytku

$O(|V|+|E|)$

Max Matching

↳ přidat hranu stojí
↳ nejvýše $|V|$ hran

$\Rightarrow O(|V|^2\cdot(|V|+|E|))$

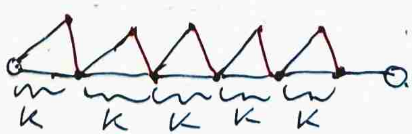
? Je to těsný odhad ?

1) # iterací Max Matching

→ pokud G má perfektní párování
→ přidám $|V|/2$ hran

$\Rightarrow$ # iterací $\in \Theta(|V|)$

2) hloubka rekurze ASC



$|V| = 2 + 2\cdot\#$ kytek

$\Rightarrow \#$ kytek $\in \Theta(|V|)$

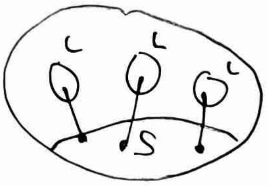
Def: Párování je **perfektní** $\equiv$ $\forall$ vrchol je v párové hraně.

Problém: Jak poznat perfektní párování?

Def: Pro graf G definujeme $ODD(G) := \#$ lichých komponent

Věta (Tutte): Graf G má PP $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\forall S \subseteq V(G) : ODD(G \setminus S) \leq |S|}_{\text{Tutteova podmínka}}$ ... TP

Dk: $\Rightarrow$:



$\rightarrow$ $\forall$ lichá komponenta $G \setminus S$ má v PP hranu do S

$\Rightarrow$ S musí mít dost vrcholů

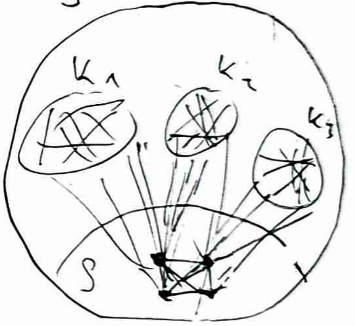
$\Leftarrow$: Indukcí podle počtu nehran. Note: $S = \emptyset$ dává: $\#$ lichých komponent $G = 0$

1) Pokud G je klika: TP $\Leftrightarrow$ $\#$ vrcholů je sudý $\Rightarrow$ mám PP

2) Pokud G není klika:

↳ $S := \{v \in V(G) \mid \forall u \in V(G), u \neq v : uv \in E(G)\}$

↳ univerzální vrcholy

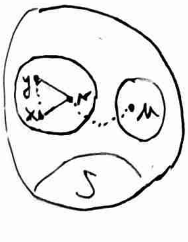


a) $\forall$ komponenta $G \setminus S$ je klika

1. spáruju sudé kliky $G \setminus S$
2. spáruju liché kliky tím, že použiju 1 vrchol z S ... to lze $\because$ TP & vrcholy S jsou univerzální
3. dopáruju vrcholy S (klika) ↳ má $\because$ $|V(G)|$ je sudý

↳ po 2. musí mít S sudý počet volných vrcholů

b) $G \setminus S$ má alespoň 1 komponentu co není klika ⊛

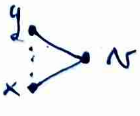


👁 Pokud H je souvislý & není klika, tak obsahuje

↳

👁 G obsahuje

↳ ⊛ nějaká komponenta $G \setminus S$ obsahuje



↳ u $\exists$ protože jinak $v \in S$ ↯

- Nechť: $e_1 := \{x, y\}$, $e_2 := \{v, u\}$ $\Rightarrow$ $G_1 := G + e_1$, $G_2 := G + e_2$

👁 G splňuje TP & $H = G + \text{hrana}$ $\Rightarrow$ H splňuje TP

$\Rightarrow$ G_1 i G_2 splňují TP & mají míň nehran $\Rightarrow$ mají PP $\begin{cases} G_1 \ldots M_1 \\ G_2 \ldots M_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ pokud $e_1 \notin M_1$ ... vezmu M_1 & pokud $e_2 \notin M_2$ ... vezmu M_2

%.

Worst case ... $e_1 \in M_1$ & $e_2 \in M_2$

↳ podívám se na graf $(V, M_1 \dot\cup M_2)$

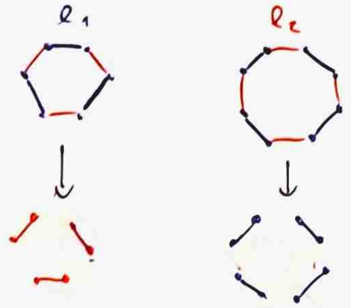
↳ podobně jako v důkazu lemmatu (M je maximální ⟺ G nemá ASC)

mi ve výsledném grafu vznikají sudé cykly

! ale nejsou tam cesty u — v

↳ jinak M_2 nepokryje u & M_1 nepokryje v ⟹ nejsou perfektní ↯

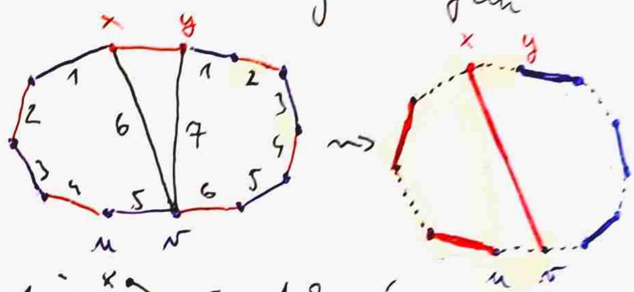
a) e_1 a e_2 v různých cyklech



→ je jedno jak vyřeším ostatní cykly

→ tady vezmu tu verzi bez e_1 nebo e_2

b) e_1 a e_2 ve stejném cyklu



→ protože x, y → v, tak mám 2 cykly

→ nechám si ten sudý

→ zbytek vrcholů pokryju cestou ∎

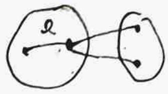
Věta (Peterson): Každý 3-regulární (kubický) 2-souvislý graf má PP.

↳ 2 souvislý ... hranově nebo vrcholově?

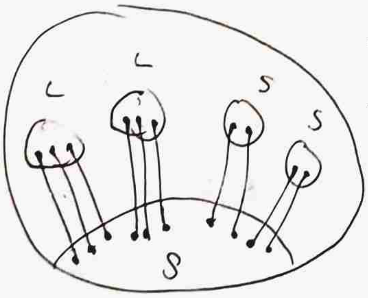
👁 Pokud je G 3-regulární, pak je vrcholově 2-souvislý ⟺ je hranově 2-souvislý

Dk: Vrcholově ⟹ hranově ... ano, protože vrcholová souvislost je silnější

Hranově ⟹ vrcholově

 v pohodě  nenastane ∵ e by byl most

Dk: Ukážeme že 3-regulární 2-souvislé grafy splňují Tutteovu podmínku



→ zvolme S libovolně a podívejme se na $G \setminus S$

→ G je 2 souvislý ⟹ z ∀ komponenty vedou do S alespoň 2 hrany

👁 Z lichých komponent vedou alespoň 3 hrany

↳ $\sum_{v \in L} \deg(v) = \underbrace{3 \cdot |V(L)|}_{\text{liché}} = \#$ hran mezi L a S $+ \underbrace{2 \cdot \#\text{ hran } L}_{\text{sudé}}$

⟹ # hran mezi L a S = liché & ≥ 2 ⟹ alespoň 3

⟹ G je 3 regulární ⟹ $|S| \geq \#$ lichých komponent $G \setminus S$ ∎

Věta (Peterson pro k): Každý k-regulární, (k−1)-souvislý graf má PP.

↳ funguje stejný argument s počítáním stupňů

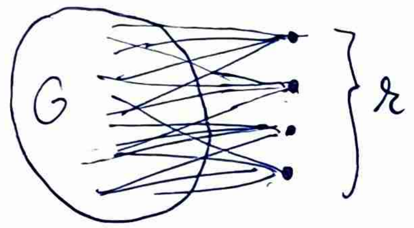
Věta (Tutte-Berge): Pro $\forall$ graf G je velikost největšího párování rovna

$$\frac{1}{2}(|V(G)| - \mathrm{defect}(G)) \quad , \quad \text{kde} \quad \mathrm{defect}(G) = \max_{A \subseteq V(G)} \{ODD(G-A) - |A|\}$$

Intuice: Pokud G má PP, pak jeho velikost je $|V|/2$. Tutteova podmínka se splní když $|A|$ je alespoň $ODD(G-a)$ a pokud ano (pro $\forall A \subseteq V$), tak G má PP. Tahle věta říká, že ty liché komponenty navíc jsou jediná překážka k PP.

Důkaz:

Nechť $\mathrm{defect}(G) = k$ a uvažme graf G', který vznikne z G přidáním k vrcholů spojených se všemi vrcholy G



Ukážeme, že G' splňuje Tutteova podmínka

$\Rightarrow$ tedy má PP velikosti $|V(G')|/2 = \frac{1}{2}(|V(G)| + k)$

Po odebrání přidaných vrcholů a hran získáme párování G o velikosti $\frac{1}{2}(|V(G)| + k) - k = \frac{1}{2}(|V(G)| - k)$

Proč G' splňuje TP?

$\rightarrow$ nechť $A \subseteq V(G')$, ukážeme $ODD(G'-A) \leq |A|$

① **všechny nové vrcholy jsou uvnitř A**

$\rightarrow$ potom rozdělme A jako $A = S \dot\cup N$, kde $\text{Staré} \subseteq V(G)$ a $N = \text{Nové}$

$ODD(G'-A) = ODD(G-S)$

$ODD(G'-A) - |A| = \underbrace{ODD(G-S) - |S|}_{\leq\, \mathrm{defect}(G) = k} - \underbrace{|N|}_{k} \leq k - k = 0 \Rightarrow ODD \leq |A|$

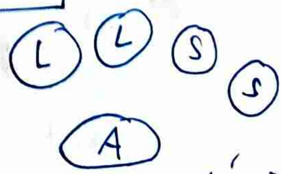
② **nějaký nový vrchol je mimo A**

$\rightarrow$ potom má $G-A$ pouze jednu komponentu (je souvislý), takže určitě $ODD \leq 1 \leq |A|$

Note: Pokud $|A| = 0$, tak $ODD = 0$ $\because$ G' má sudý počet vrcholů

G' má sudý počet vrcholů

- G sudý $\Rightarrow$ $ODD(G-A) - |A|$ vždy sudý $\rightarrow$
- G lichý $\Rightarrow$ $ODD(G-A) - |A|$ vždy lichý



↳ sudý $\Rightarrow \# L$ lichý

↳ lichý $\Rightarrow \# L$ lichý

Úloha: Tutteova věta ⇒ Hallova věta

Věta (Hall): Nechť $G=(X \dot{\cup} Y, E)$ je bipartitní a pro $\forall A \subseteq X: |N(A)| \geq |A|$. Pak $\exists$ párování nasycující X.

Důkaz: Z grafu G vyrobíme G' t. ž.

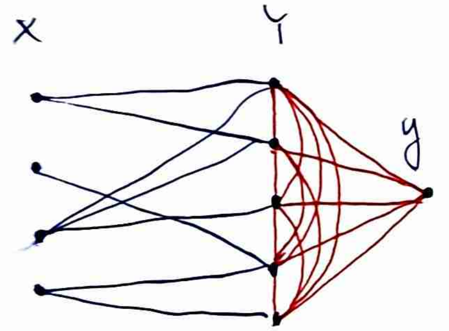
(*) G má párování nasycující X $\Leftrightarrow$ G' má PP

Potom ukážeme, že G' splňuje Tutteovu podmínku, tedy má PP.
↳ tedy podle (*) jsme vyhráli

Jak vyrobit G'?

→ potřebujeme sudý # vrcholů, tedy pokud $|V(G)|$ je lichý, tak do partity Y přidáme vrchol navíc

→ nyní z $G'[Y]$ uděláme úplný graf ... vše v Y propojujeme



👁 platí (*)

⇒ v G' zbude sudý počet nenapárovaných vrcholů, všechny v Y, a $G'[Y]$ je klika

⇐ nechám si hrany jdoucí z vrcholů X

Nechť G splňuje Hallovu podmínku $\forall A \subseteq X: |N(A)| \geq |A|$.

Tvrzení: Potom G' splňuje Tutteovu podmínku: $\forall S \subseteq V(G'): ODD(G'-S) \leq |S|$

Dk: Nechť $S \subseteq V(G')$. Pokud je $G'-S$ souvislý, tak určitě platí ↑.

⇒ taktéž $G'-S$ se rozpadl na několik komponent

👁 ty komponenty jsou nějaké $\underbrace{\text{osamocené vrcholy z } X}_{A \subseteq X}$ a $\underbrace{\text{zbytek}}_{Z = V(G'-S)-A}$

→ jelikož vrcholy v A jsou osamocené, tak všichni jejich sousedé jsou v S

$\Rightarrow N(A) \subseteq S \Rightarrow |S| \geq |N(A)| \geq |A|$

→ jediný problém teď by mohl být, kdyby byl $|Z|$ lichý

- pokud $|S| > |A|$: tak na paritě $|Z|$ nezáleží
- pokud $|S| = |A|$
  - $|A|$ lichá ⇒ $|S|$ lichá ⇒ $|Z|$ sudá ✓
  - $|A|$ sudá ⇒ $|S|$ sudá ⇒ $|Z|$ sudá

↳ $|V(G')| =$ sudá

∎

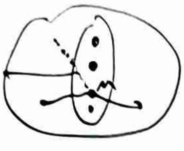
• Charakterizace vrcholově 3-souvislých grafů

Def: Souvislý graf G je k-souvislý $\equiv |V(G)| > k$ & zůstane souvislý po odebrání libovolných $k-1$ vrcholů

Lemma (o kontrahování hrany, LoKH): Nechť G je 3-souvislý a není K_4. Pak G obsahuje hranu e t.ž. $G.e$ je 3-souvislý. ↳ tedy $|V| \geq 5$

Dk: Sporem, nechť G je 3-souvislý, $G \ncong K_4$ & $\forall e \in E(G)$: $G.e$ není 3-souvislý.

Lemma: Pokud R je minimální řez nějakého grafu H, potom každá komponenta $H \setminus R$ má hranu do každého vrcholu R

Dk: 
→ kdyby tam nějaká hrana do $u \in R$ chyběla, tak $R \setminus \{u\}$ pořád bude řez, ale menší než R ↯

☼ Pro libovolnou hranu $e = \{x,y\} \in E(G)$ po její kontrakci vznikne $G.e$, který není 3-souvislý ⇒ obsahuje řez velikosti 2

↳ tento řez obsahuje ten kontrahovaný vrchol (jinak je to řez i v G)

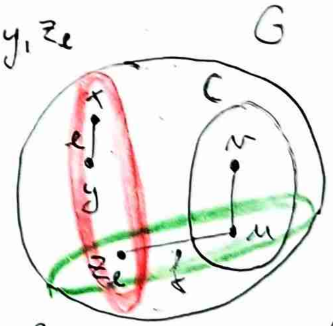
⇒ tu hranu zase od-kontrahuju ⇒ získám řez velikosti 3 v G

↳ důsledek: Pro $\forall \{x,y\} \in E(G)$ $\exists z \in V$ t.ž. $\{x,y,z\}$ tvoří řez G

↳ navíc podle lemmatu z $\forall$ komponenty $G \setminus \{x,y,z\}$ vede hrana do x, y i z.

⇒ Nechť $x, y, z_e \in V$ t.ž. $\{x,y\} \in E$ a $\{x,y,z_e\}$ je řez

Nechť C je nejmenší komp. $G \setminus \{x,y,z_e\}$ ze všech voleb C, x, y, z_e



→ z lemmatu $\exists u \in C$ spojující C s z_e.

⇒ nechť $f := \{u, z_e\}$ a $z_f \in V$ t.ž. $\{u, z_e, z_f\}$ je řez

⇒ nechť D je komponenta $G \setminus \{u, z_e, z_f\}$ neobsahující x ani y

↳ D existuje ∵ $G \setminus \{u, z_e, z_f\}$ má aspoň 2 komponenty & x, y jsou spojené hranou

claim: $D \subsetneq C$ → spor s minimalitou C

↳ z lemmatu $\exists v \in D$ t.ž. $\{u,v\} \in E$

↳ ☼ $v \in C$, protože uv je hrana kterou řez $\{x,y,z_e\}$ nerozbije

→ já ty řezy sjednotím ... D to nemohlo podrozdělit protože $x, y \notin D$

⇒ D je komponenta $G \setminus \{x, y, z_e, z_f, u\}$, tedy $D \subseteq C \setminus \{u\}$

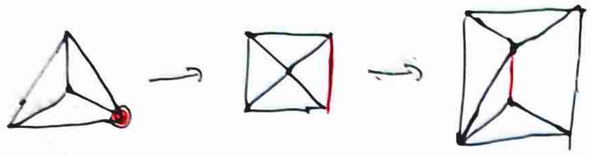
↳ kdyby v D bylo něco navíc, tak to můžu přidat do C

Věta (Tutteova charakterizace 3-souvislých grafů): G je 3-souvislý $\Leftrightarrow$

$\exists$ posloupnost grafů $K_4 = G_0, G_1, \dots G_m = G$ t.ž.

① $\forall G_i$ má minimální stupeň ≥ 3

② $\forall G_{i-1}$ vznikne z G_i kontrakcí hrany



Důsledek: Z K_4 lze takto vygenerovat všechny 3-souvislé grafy

Dk: $\Rightarrow$: Pokud G_i je 3 souvislý, tak aplikací LoKH dostanu

G_{i-1} který je taky 3-souvislý ... tedy musí mít min stupeň ≥ 3

↳ zastavím se až na K_4 ... nejmenší 3-souvislý graf

$\Leftarrow$: Indukcí ověříme že každý graf v posloupnosti je 3-souvislý

1) $G_0 = K_4$ je 3-souvislý

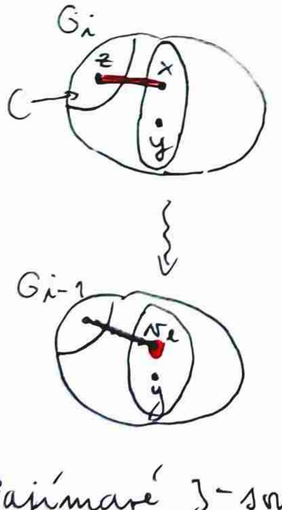
2) Nechť G_{i-1} je 3-souvislý a nechť pro spor G_i není. $G_{i-1} = G_i . e$

$\Rightarrow \exists$ řez $\{x,y\}$ grafu G_i

a) $e = \{x,y\}$ ... po kontrakci v_e je řez velikosti 1 v G_{i-1}

b) $e \cap \{x,y\} = \emptyset$ ... potom $\{x,y\}$ je řez velikosti 2 v G_{i-1}

c) $e = \{x,z\}$, $y \notin e$, $x \in e$



↳ podívám se na komponentu $G_i \setminus \{x,y\}$ obsahující z → C

↳ a co se stane s tím řezem po kontrakci hrany

1) $C = \{z\}$ ... potom $\deg_{G_i}(z) \leq 2$ ↯

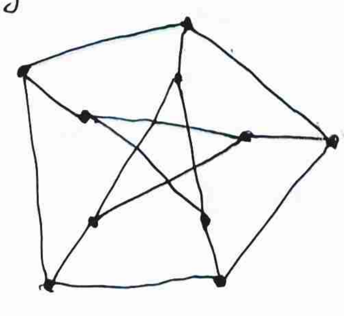
2) $|C| \geq 2$ ... potom po kontrakci hrany e komponenta C nezanikne

$\Rightarrow \{v_e, y\}$ je řez velikosti 2 v G_{i-1} ↯ ■

Zajímavé 3-souvislé grafy

K_4

minimální 3-souvislý graf



Petersonův graf

→ protipříklad na hodně věcí

• Minory grafů

Def: Graf G je minorem grafu H (H obsahuje G jako minor), $G \preccurlyeq H$
$\equiv$ G lze vyrobit z H posloupností operací
mazání vrcholů, mazání hran, kontrakce hran

👁 $\preccurlyeq$ je částečné uspořádání na třídě všech grafů
↳ reflexivní, antisymetrické, tranzitivní

Věta (Robertson - Seymour): $\preccurlyeq$ je well-quasi-ordering grafů

důkaz na stovky stránek

Def: Kvazi-uspořádání (reflexivní a tranzitivní) $\leq$ množiny X je dobré $\equiv$
v každé nekonečné $Y \subseteq X$ existují dva porovnatelné prvky

👁 Důsledek: Každá $Z \subseteq X$ má konečně mnoho minimálních prvků.
↳ kdyby neměla, tak vyrobím nekonečnou $Y := \{x \in Z \mid x$ je minimální v $Z\}$
↳ Y obsahuje samé minimální prvky $\Rightarrow$ nejsou porovnatelné

Intuice: Měli jsme větu G je rovinný $\Leftrightarrow$ neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$
↳ díky Graph minor theorem platí něco podobného obecně
→ nechť $\mathcal{T}$ je třída grafů uzavřená na minory (G rovinný $\Rightarrow H \preccurlyeq G$ rovinný)
⇒ Potom $\underbrace{\text{třída všech grafů}}_{\mathcal{G}}$ bez $\mathcal{T}$ má konečně mnoho $\underbrace{\text{minimálních prvků}}_{\text{zakázané grafy}}$
→ mám graf G a chci zkontrolovat zda $G \in \mathcal{T}$
⇒ zkontroluju jestli nějaký ze zakázaných grafů je minor G
↳ pokud ano ... potom $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, kde $\mathcal{G}$ je třída všech grafů
↳ pokud ne ... potom $G \notin \mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$, takže musí být $G \in \mathcal{T}$

Věta (Graph minor theorem): Každá třída grafů $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, uzavřená na minory, je určena konečným výčtem zakázaných minorů.
Tedy existuje konečná $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ t.ž. $\mathcal{H} = \{G \in \mathcal{G} \mid F \in \mathcal{F} \Rightarrow F \not\preccurlyeq G\}$

Minory a rovinnost

Pokud $G \leq H$ a H je rovinný, potom G je také rovinný

K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné

Věta (Kuratowského-Wagnerova): Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. Graf je rovinný
2. Graf neobsahuje $\overbrace{\text{dělení } K_5 \text{ ani } K_{3,3} \text{ jako podgraf}}^{\text{topologický minor}}$ ... Kuratowski
3. Graf neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor ... Wagner

Dk:

① ⇒ ②, ① ⇒ ③, ③ ⇒ ②: obměna: dělení je podgraf ⇒ minor ✓

② ⇒ ③ není triviální a ukážeme později

③ ⇒ ① indukcí podle # vrcholů

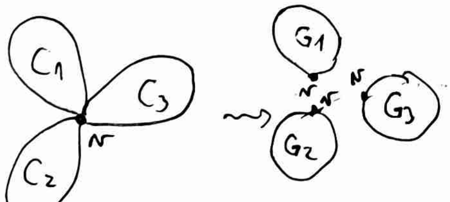
→ rozbor případů podle $k_v(G)$:= stupeň vrcholové souvislosti

1) $k_v(G) = 0$ ... G není souvislý & neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor

→ G se skládá z nějakých komponent, ty jsou menší než G a také neobsahují K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor

⇒ z indukčního předpokladu jsou rovinné ⇒ G je také rovinný

2) $k_v(G) = 1$ ... ∃ artikulace := vrchol po jehož odstranění se G rozpadne

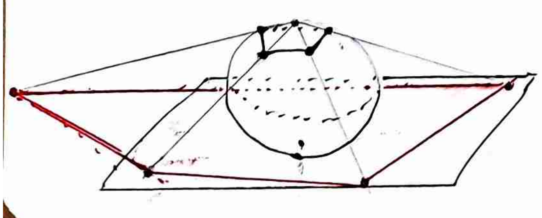


1. odstraníme v ⇒ komponenty $C_1, \dots C_k$
2. do komponent přidáme v zpět ⇒ $G_1, \dots G_k$
3. z I.P. ∃ rovinné nakreslení $G_1, \dots G_k$
4. recall: kruhovou inverzí je možné zvolit vnější stěnu nakreslení

   ⇒ všechny G_i nakreslíme tak aby v byl na okraji

   ↳ zvolíme libovolnou stěnu incidentní s v jako vnější
5. nakreslení $G_1, \dots G_k$ zase slepíme dohromady

Kruhová inverze

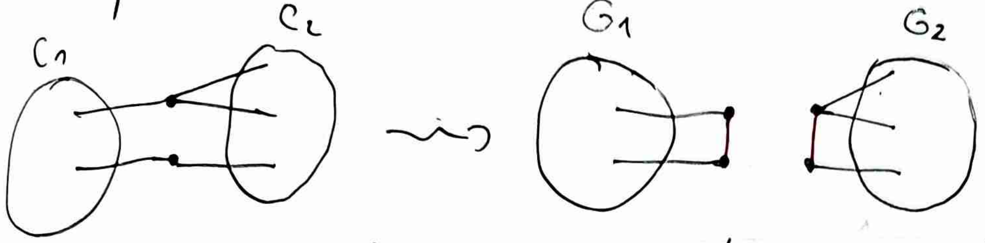


1. graf nakreslím na sféru tak, aby severní pól byl uvnitř stěny, co má být vnější
2. graf promítnu na plochu

3) $K_v(G) = 2$

→ $\exists\, x, y \in V(G)$ t.ž. po jejich odebrání se G rozpadne

→ pro jednoduchost zatím uvažme 2 komponenty



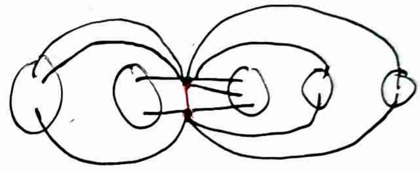
1. graf rozpadne na komponenty a do každé přidám hranu xy → G_i
2. G_i jsou menší než G ⇒ nakreslím je tak, aby xy byla na vnější stěně a mergnu dohromady

! nemůže se stát že po přidání xy do C_i vznikne $K_{3,3}$ nebo K_5?

↳ ne, protože $G_i = C_i + xy$ zjevně můžu rovinně nakreslit & 1 ⇒ 3 ↯

→ co když je komponent víc?

→ nic se nemění, trik funguje stejně



4) $K_v(G) \geq 3$

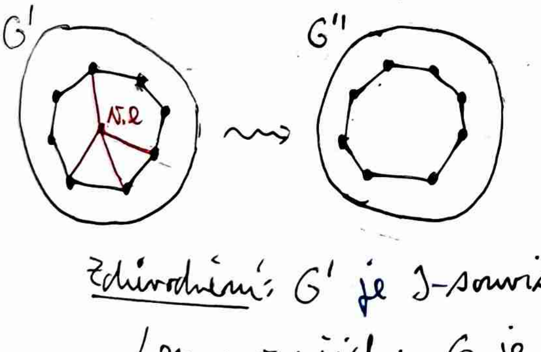
→ G 3-souvislý a neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor

↳ KH:
- $G = K_4$ ...  umíme nakreslit
- G má kontrahovatelnou hranu e t.ž. $G.e$ je také 3-souvislý

⇒ nechť $G' := G.e$ ... $G' \preccurlyeq G$ ⇒ G' neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor

→ zároveň $|V(G')| = |V(G)| - 1$ ⇒ G' umíme nakreslit → chceme nakreslit G

⇒ nechť G'' je G' po odstranění vrcholu $v.e$ = vrchol co vznikl kontrakcí e



vrchol $v.e$ je uzavřený v nějaké stěně

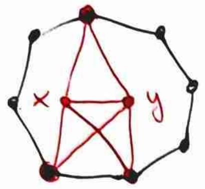
↳ pokud je to vnější stěna, tak z ní kruhovou projekcí udělám vnitřní stěnu

Zdůvodnění: G' je 3-souvislý, tedy G'' je 2-souvislý.

Lemma o uších: G je 2-souvislý ⇔ lze vyrobit z kružnice přidáváním uší

→ chceme dovnitř té kružnice nakreslit hranu $e = xy$

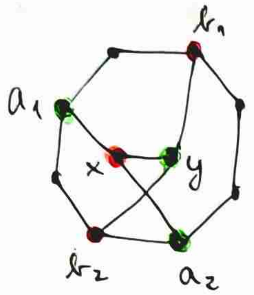
→ nechť $e = xy$, $N(x)$ = sousedi x, $N(y)$ = sousedi y



1) $|N(x) \cap N(y)| \geq 3$

→ nenastane ∵ to je podrozdělení K_5

→ 5 vrcholů stupně 4 & mezi všemi je hranově disj. cesta

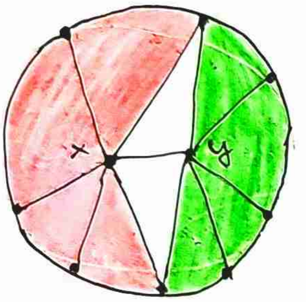


2) ∃ překřížení hran

↳ $\exists\, a_1, a_2 \in N(x)$, $b_1, b_2 \in N(y)$

t.ž. v pořadí po kružnici dostanu $a_1 b_1 a_2 b_2$

→ nenastane ∵ to je podrozdělení $K_{3,3}$ $(x, b_1, b_2) \times (y, a_1, a_2)$



3) poslední situace je že se sousedi nestřídají

1. nakreslím x a připojím $N(x)$ v pořadí podle kružnice

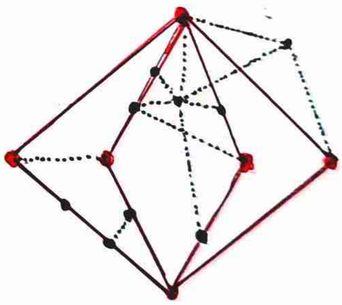
👁 y lze nakreslit uvnitř jedné stěny tohoto nakreslení ■

Minory × Topologické minory

Def: Graf H je topologickým minorem grafu G, $H \leq_T G$ ≡

G obsahuje podrozdělení H jako podgraf.

Věta: $H \leq_T G \Rightarrow H \leq G$



↳ mám podrozdělení H co je podgraf G

⇒ namatchuju vrcholy a vím, které množiny hran z G odpovídají hranám z H

→ chci minorovými úpravami udělat H z G

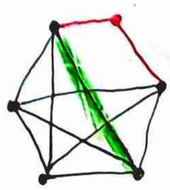
1. smažu nepoužité vrcholy G
2. smažu nepoužité hrany co vedou mezi zbylými vrcholy
3. zkontrahuju hrany

Věta: $H \leq G \not\Rightarrow H \leq_T G$ ... alespoň obecně ne

👁 kontrakcí —— dostanu K_5 ⇒ K_5 je minor

👁 když podrozdělím K_5 aby měla 6 vrcholů, tak s tímhle není izomorfní

⇒ K_5 není topo-minor



Věta: Ekvivalentní definice minoru. $H \leq G \iff$

① H lze získat z G kontrakcemi hran a mazáním vrcholů a hran

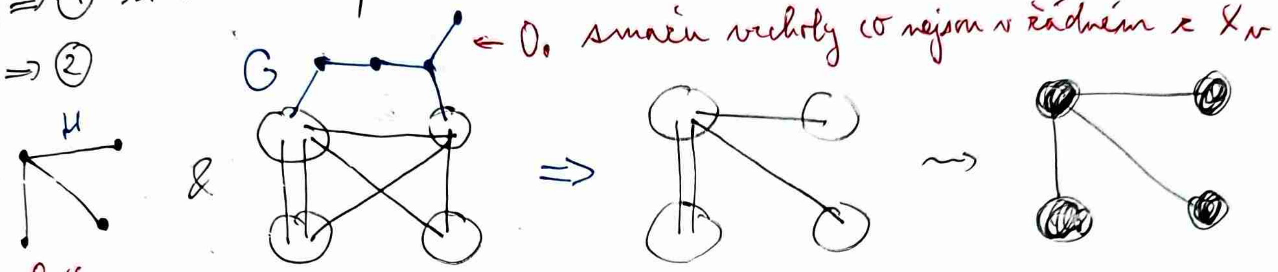
② H lze získat z podgrafu G kontrakcemi hran (nejprve mazání, potom kontrakce)

③ $\exists \{X_v \subseteq V(G) \mid v \in V(H)\}$ t.ž. $X_i \neq \emptyset$ & $X_i \cap X_j = \emptyset$ t.ž.
všechny $G[X_v]$ jsou souvislé & $uv \in E(H) \Rightarrow \exists$ hrana mezi X_u a X_v

Dk:

② ⇒ ① ... triviálně plyne

③ ⇒ ② ← 0. smažu vrcholy co nejsou v žádném z X_v



0.*

1. smažu hrany mezi X_v aby platilo: $uv \in E(H) \iff \exists$ hrana $X_u \leftrightarrow X_v$
2. kontrahuju všechny hrany uvnitř všech X_v

→ teď mám graf na stejném počtu vrcholů & • ⇒ je izomorfní s H

① ⇒ ③

→ máme posloupnost operací kterými jsme z G vyrobili H

→ vyrobíme rozklad G aby byla splněna podmínka ③

1. Pro $\forall v \in V(H)$: $X_v \leftarrow \{v\}$ ⇒ musím jen zachovat souvislost X_v
2. Pozpátku procházej operace .. tedy z H vyrábíme G
   - přidání hrany ... X_v se nemění
   - přidání vrcholu w ... nepřidám ho do žádné X_v
     ⇒ relace býti hranou je zachována a souvislost nerozbiju
   - roztažení vrcholu w na hranu uv → pokud w není v žádném X_v, nic nedělám
     ⇒ $X_w \leftarrow X_w \setminus \{w\} \cup \{u, v\}$

Poznámka: Vrcholově disjunktní souvislé podgrafy $\{X_v\}_{v \in V(H)}$ se nazývají branch sets.

Důsledek: Při práci s minory můžeme předpokládat že nejdřív proběhlo všechno mazání a až potom všechny kontrakce.

→ nahradíme G jeho podgrafem který jsme kontrahovali pro získání H

→ tento podgraf můžeme rozdělit na branch sets X_v

⓪ bude platit $uv \in E(H) \iff \exists$ hrana mezi X_u a X_v

↳ ref. důkaz ① ⇒ ③, ale děláme jenom roztažení vrcholu w na hranu uv

Věta: $(H \le G \iff H \le_T G) \iff \Delta(H) \le 3$ ... $\Delta(H) := \max_{v \in V(H)} \deg(v)$

Dk: Víme, že $H \le G \Leftarrow H \le_T G$. Stačí ukázat minor $\Rightarrow$ topo-minor

↳ $(H \le G \;\&\; \Delta(H) \le 3) \Rightarrow H \le_T G$

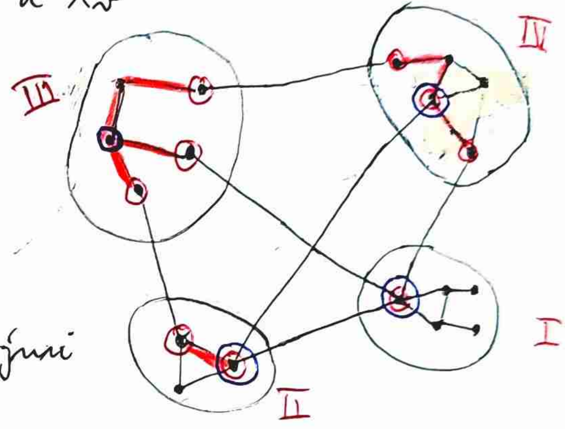
→ $H \le G$, tedy H lze získat z podgrafu G kontrakcemi hran, označme jej G'

→ vyrobíme F, podgraf G' t.ž. F je podrozdělení H, tedy $H \le_T F \le_T G' \le_T G$

1. najdi rozklad $R = \{X_v \subseteq V(G') \mid v \in V(H)\}$ grafu G' podle předchozí věty

   jelikož H vznikne z G' kontrakcemi jednotlivých X_v, tak platí

   $uv \in E(H) \iff \exists$ hrana mezi X_u a X_v



2. pro $\forall X_i$ označ všechny vrcholy $w \in X_i$, ze kterých vede hrana ven
3. pro $\forall X_i$ najdi minimální strom v X_i t.ž. obsahuje všechny označené vrcholy X_i
4. spojení těchto stromů hranami mezi jednotlivými X_i označme F. Zřejmě F je podgraf G'

$\Rightarrow$ ukážeme, že pokud $\Delta(H) \le 3$, tak F je podrozdělení H, tedy $H \le_T G$

→ pro $\forall X_v$ najdeme v jeho stromě centrální vrchol v^* t.ž. (jednoznačně určené) cesty z v^* do označených vrcholů jsou hranově disjunktní

$\Rightarrow$ nyní mezi $\forall$ dvěma centrálními vrcholy u^*, v^* t.ž. $uv \in E(H)$ vyrobíme cestu

tyto cesty jsou hranově disjunktní a dohromady tvoří podrozdělení H

Hledání centrálních vrcholů ... $\Delta(H) \le 3$, tedy $\forall X_v$: #označených vrcholů $\le \deg(X_v) \le 3$

I. • 1 vrchol: prostě vyberu tento jediný vrchol (#stromu = 1)

• 2 vrcholy: min strom = nejkratší cesta mezi nimi

a) $\deg(X_v) = 2$ ... vyberu libovolný vrchol na cestě

II. b) $\deg(X_v) = 3$ ... vyberu ten krajní vrchol, který byl označen dvakrát

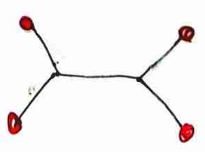
• 3 vrcholy: strom má nejvýše 3 listy (neoznačené listy lze smazat)

III a) # listů = 3:  $\exists!$ vrchol stupně 3 $\Rightarrow$ vyberu jeho

IV b) # listů = 2: vyberu označený vrchol co není listem

Co kdyby $\Delta(H) > 3$?

→ centrální vrchol nemusí existovat



Dodělání důkazu Kuratowski-Wagner

→ ještě potřebujeme ukázat ② ⇒ ③, tedy

G neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako topo-minor ⇒ G neobsahuje K_5 ani $K_{3,3}$ jako minor

obměna: $K_{3,3} \leq G \vee K_5 \leq G \implies K_{3,3} \leq_T G \vee K_5 \leq_T G$

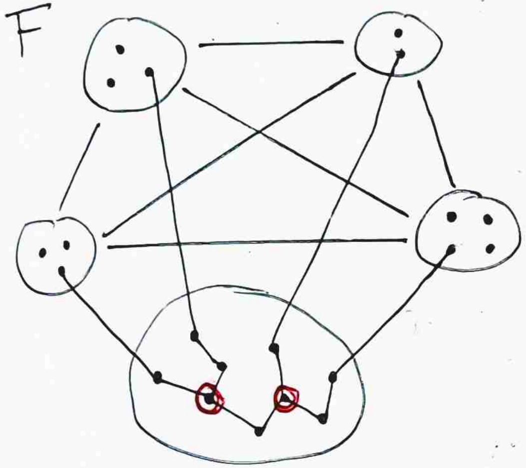
→ jelikož $\Delta(K_{3,3}) = 3$, tak podle předchozí věty máme $K_{3,3} \leq G \Rightarrow K_{3,3} \leq_T G$

⇒ stačí ukázat $K_5 \leq G \Rightarrow K_5 \leq_T G \vee K_{3,3} \leq G$ note: $K_{3,3} \leq G \iff K_{3,3} \leq_T G$

→ uděláme stejnou konstrukci jako v důkazu předchozí věty, s tím že $H = K_5$

→ najdeme rozklad vhodného podgrafu G' a v každém branch setu minimální strom

F

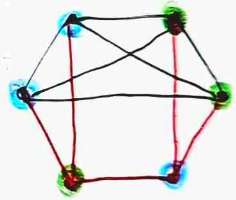


⇒ nechť F je sjednocení těch stromů a hran mezi nimi

→ pokud pro ∀ stromeček ∃ centrální vrchol,
tak stejnou logikou jako v minulém důkazu $K_5 \leq_T G$

⇒ pokud ∃ stromeček kde ∄ centrální vrchol, tak
musí obsahovat právě 2 vrcholy stupně 3

⇒ ukážeme, že potom $K_{3,3} \leq G$



1. tento zlobivý stromeček zkontrahujeme aby zůstaly pouze tyto dva vrcholy
2. ostatní stromy zkontrahujeme do jediného vrcholu
3. tímto získáme $K \leq F$ t.ž. $K_{3,3} \leq K$

⇒ tedy $K_{3,3} \leq K \leq F \leq G \implies K_{3,3}$ je minor G

∎

Kreslení grafů na plochy

→ nemáme topologii, takže všechno bude tak poloformálně & pouze v $\mathbb{E}_n$

Def: Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Funkce $f: X \to Y$ je homeomorfismus $\equiv$ f je bijekce a f i f^{-1} jsou spojité.

Def: X, Y jsou homeomorfní $\equiv$ mezi nimi $\exists$ homeomorfismus

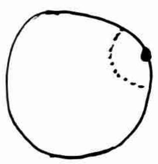
Fakt: Všechny topologicky důležité vlastnosti se v homeomorfních prostorech chovají stejně

Def: Plocha je neprázdná $P \subseteq \mathbb{R}^n$, která je

1. kompaktní ... uzavřená a omezená (jsme v $\mathbb{E}_n$)
2. obloukově souvislá ... pro $\forall a,b \in P$ $\exists$ křivka co je spojuje
   ↳ $\exists \varphi: [\alpha, \beta] \to P$ t.ž. φ je spojitá & $\varphi(\alpha) = a$ & $\varphi(\beta) = b$
3. 2-rozměrná varieta bez hranice ... dostatečně malé okolí $\forall a \in P$ je homeomorfní otevřenému kruhu v $\mathbb{R}^2$

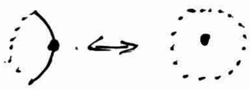
Příklady

- $\mathbb{R}^2$ není plocha $\because$ není omezená
- otevřený kruh v $\mathbb{R}^2$ není plocha $\because$ není uzavřená
- uzavřený kruh v $\mathbb{R}^2$ není plocha $\because$ není bez hranice



→ uvažme nějaký bod na hranici a jeho kruhové okolí

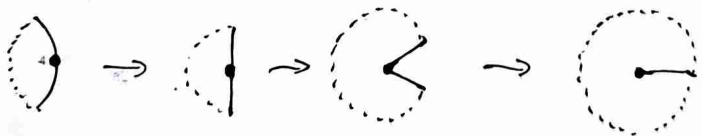
→ musíme udělat homeomorfismus s nějakým otevřeným kruhem



asi je jasné že problém bude s tím uzavřeným okrajem

↳ otevřený okraj zřejmě musím namapovat někam dovnitř

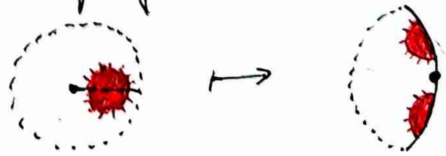
⇒ aby to bylo spojité, tak tu množinu musím rozříznout podél "švu"



→ problém je, že inverzní zobrazení nebude spojité

recall: $f: X \to Y$ je spojité $\iff$ $\forall B \subseteq Y$ otevřenou je $f^{-1}[B] \subseteq X$ otevřená

→ zkusíme zobrazit zpět nějakou otevřenou množinu co obsahuje kus švu



→ nezobrazí se to na otevřenou množinu, protože bude obsahovat kus té uzavřené hranice

Důsledek: Žádná $A \subseteq \mathbb{R}^2$ není plocha použitím stejné argumentace.

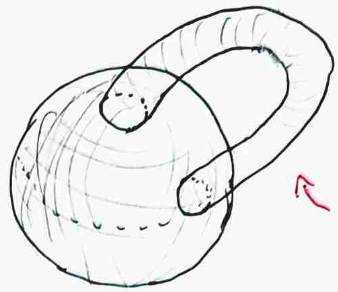
• sféra nebo torus v $\mathbb{R}^3$ jsou plochy

tohle není plocha :: buď není zavřený nebo není bez hranice

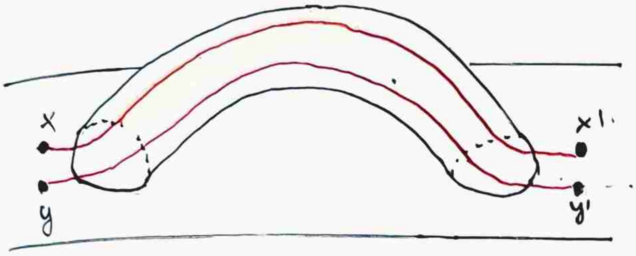
Operace s plochami

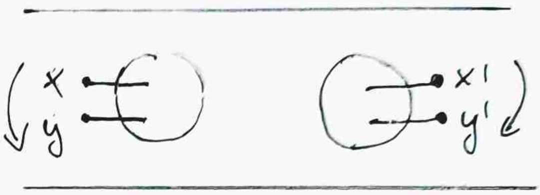
① přidání ucha (od hrnku)

1. vyříznu dva kruhy
2. vezmu „plášť“ válce bez dna a vrchu
3. ohnu a přilepím na díry po kruzích



↖ isomorfní torus

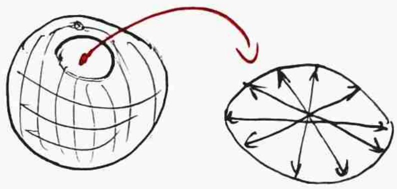




⇒ chová se to jako teleport, kde pořadí vrcholů na obou stranách je opačné

② přidání křížítka (cross cap)

1. vyříznu kruh
2. sešiju díru křížem

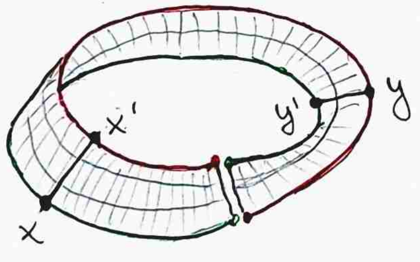


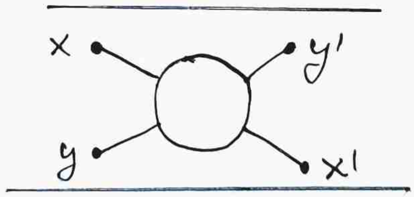
⇒ výsledek je že když vlezu do "kruhu", tak se rovnou ocitnu na druhé straně

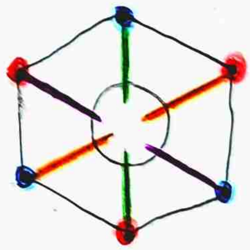
⇒ tohle je topologicky ekvivalentní tomu, kdybychom na hranici té díry přišili Möbiův proužek ... jeho hranice je top. ekviv. kružnici

když si vezmu Möbiův proužek s hranicí délky l, stoupnu si na jeho hranici a ujdu $l/2$, tak jsem na "opačné straně" proužku

⇒ při kreslení hrany grafu prostě jdu rovně a tím se "teleportuju" na druhou stranu

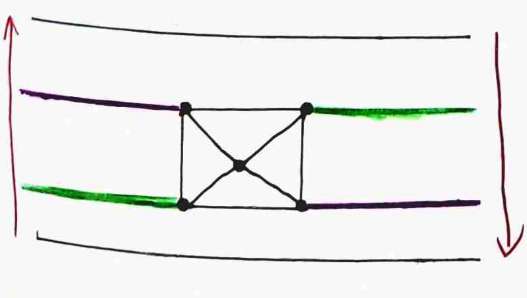






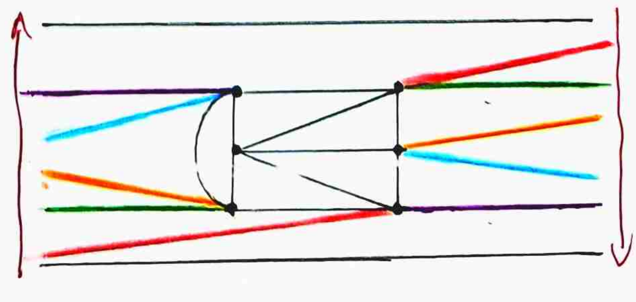
$K_{3,3}$

Möbiův pásek - obdélník, kde jsme slepili opačné hrany obráceně



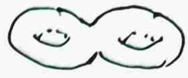
K_5

K_6



Charakterizace ploch

Def: Σ_g := plocha vzniklá ze sféry přidáním g uší, $g \geq 0$.

↳ Σ_0 = sféra, Σ_1 = torus, Σ_2 = dvojtorus 

Def: Π_g := plocha vzniklá ze sféry (Σ_0) přidáním g křížítek, $g \geq 1$.

↳ Π_1 = projektivní rovina, Π_2 = Kleinova láhev

Fakt: Každá plocha je homeomorfní právě jedné z ploch

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots \quad \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots$$

Fakt: Každá plocha vzniklá z Σ_0 přidáním $k \geq 1$ křížítek a $u \geq 0$ uší je Π_{k+2u}.

Def: Nakreslení grafu $G=(V,E)$ na plochu Γ je zobrazení $\varphi: V \cup E \to \Gamma \cup 2^{\Gamma}$ t.ž.

1. každému $v \in V$ přiřadí bod $\varphi(v) \in \Gamma$
2. každé hraně $xy \in E$ přiřadí prostou křivku $\varphi_{xy}: [\alpha, \beta] \to \Gamma$, $\varphi_{xy}(\alpha) = x$, $\varphi_{xy}(\beta) = y$.
3. $(\forall x, y \in V): x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$
4. $(\forall e \in E)(\forall v \in V): \varphi(v) \in \varphi(e) \Leftrightarrow v \in e$
5. $(\forall e, f \in E): \varphi(e) \cap \varphi(f) = \{\varphi(v) \mid v \in e \cap f\}$

Fakt: Existuje konečná množina M (která se nezná) grafů t.ž.

G nemá nakreslení na torus $\Leftrightarrow (\exists H \in M): H \leq G$.

Note: Tohle je důsledek Graph minor theorem $\because$ grafy nakreslitelné na torus jsou uzavřené na minory

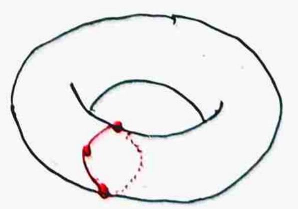
• Eulerova formule

Věta: Pokud je souvislý graf G nakreslitelný na Σ_0, pak $v(G) - e(G) + f(G) = 2$.

→ co kdybychom kreslili na torus?

Σ_0  $v = 3$, $e = 3$, $f = 2$

Σ_1  $v = 3$, $e = 3$, $f = 2$

 $v = 3$, $e = 3$, $f = 1$!

Def: Stěna nakreslení φ grafu $G=(V,E)$ na plochu Γ je souvislá komponenta množiny $\Gamma - \varphi[V] - \bigcup \varphi[E]$.

Def: Nakreslení grafu G na plochu Γ je buňkové $\equiv$ $\forall$ stěna je homeomorfní $\mathbb{R}^2$

Def (Eulerova charakteristika plochy): Pro plochu Γ definujeme

$$\chi(\Gamma)=\begin{cases}2-g, & \text{pokud } \Gamma\cong \Pi_g,\ g\ge 1\\ 2-2g, & \text{pokud } \Gamma\cong\Sigma_g,\ g\ge 0\end{cases} = 2-\#\text{křížítek}-2\#\text{uší}$$

Věta (Zobecněná Eulerova formule): Pro každé nakreslení grafu G na plochu Γ platí $v(G)-e(G)+f(G)\ge\chi(G)$. Pro buňkové nakreslení platí rovnost.

Dk: indukcí podle $\chi(\Gamma)$ $\rightarrow$ klesající indukce, $\max\chi=2$

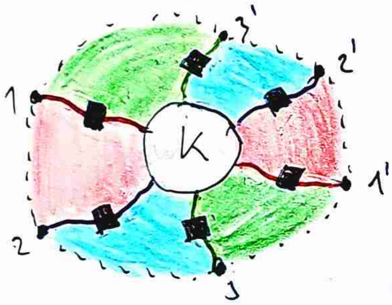
1) $\Gamma\cong\Sigma_0$ ... základní Eulerova formule ... $\chi(\Sigma_0)=2$

2) přidání křížítka

Nechť $\mathcal{G}$ je buňkové nakreslení grafu $G=(V,E)$ na Γ a K je křížítko v $\mathcal{G}$

1) Nechť $G', \mathcal{G}'$ vzniknou z $G, \mathcal{G}$ podrozdělením $\forall$ hrany procházející K – před i za K

$\mathcal{G}'$



$\rightarrow$ něco takového tam musí být, aby to bylo buňkové

$\hookrightarrow$ stěny homeomorfní $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ musím nějak přestřihnout ten Möbiův proužek schovaný v tom křížítku

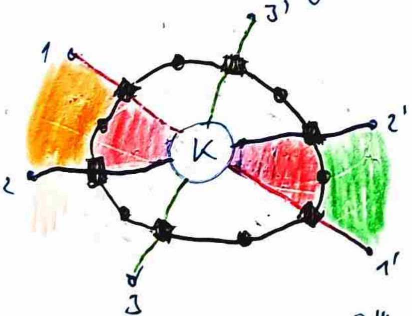
$\Rightarrow k := \#$ hran procházejících K $\rightarrow$ na obrázku $k=3$

$v(G')=v(G)+2k$ $\quad f(G')=f(G)$

$L(G):=v(G)-e(G)+f(G)$

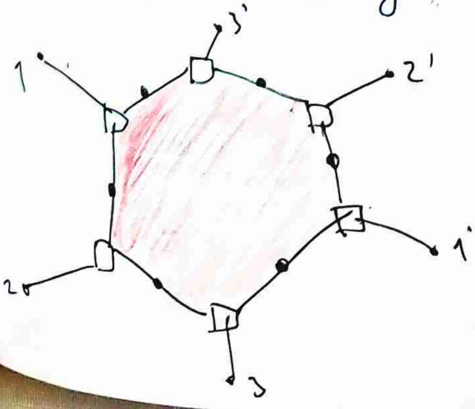
$e(G')=e(G)+2k$ $\quad L(G')=L(G)$

2) Nechť $G'', \mathcal{G}''$ vzniknou z $G', \mathcal{G}'$ přidáním kružnice na těch nových vrcholech a následným podrozdělením hran této kružnice



$$\left.\begin{aligned} v(G'')&=v(G')+2k\\ e(G'')&=e(G')+4k\\ f(G'')&=f(G')+2k\end{aligned}\right\}\ L(G'')=L(G')$$

3) Nechť $G''', \mathcal{G}'''$ vzniknou z $G'', \mathcal{G}''$ smazáním všech vnitřků nové kružnice a odebráním křížítka (revers. operace přidání)



stále buňkové nakreslení & jsme přišli o křížítko

$\Rightarrow \chi$ stoupla o 1 $\Rightarrow$ můžeme použít indukční předpoklad

IP: $L(G''')=\chi(\Gamma''')=\chi(\Gamma)+1$

$$\left.\begin{aligned} v(G''')&=v(G'')\\ e(G''')&=e(G'')-k\\ f(G''')&=f(G'')+1-k\end{aligned}\right\}\ L(G''')=L(G'')+1$$

$$L(G'')=\chi(\Gamma) = L(G') = L(G)$$

3) Přidání ucha

→ úplně stejná konstrukce, ale museli bychom jej provést dvakrát

↳ chceme vystřihnout si dvě místa kde se ucho napojuje na Γ

⇒ na konci bychom dostali $L(G''') = L(G'') + 2$

⇒ proto je $\chi(\Sigma_g) = 2-2g$ … po odebrání ucha χ vzroste o 2 ■

Důsledek: Pokud graf G jde nakreslit na plochu Γ, pak $|E| \leq 3|V| - 3\cdot\chi(\Gamma)$

Dk: Máme $e(G) \leq v(G) + f(G) - \chi(\Gamma) \leq v(G) + \frac{2}{3}e(G) - \chi(\Gamma)$

👁 $\forall$ stěna má minimálně 3 brany & $\forall$ brana je ve 2 stěnách ⇒ $2e \geq 3f$ ■

Tvrzení: Nechť $\Gamma \neq \Sigma_0$ je plocha, G je nakreslitelný na Γ, potom

$$\exists v \in V(G) \text{ t.ž. } \deg(v) \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\chi(\Gamma)}}{2} \right\rfloor$$ Heawoodova formule

Dk: Průměrný stupeň vrcholu je

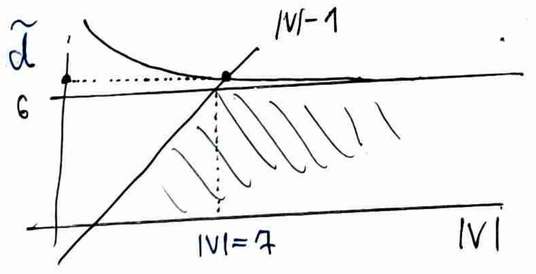
$\tilde{d} := \frac{2|E|}{|V|} \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|}$ podle tohoto důsledku nahoře

Nyní rozbor případů

1) $\chi(\Gamma) = 1$: $\tilde{d} < 6$ ⇒ ∃ vrchol stupně ≤ 5 … $5 \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{25}}{2} \right\rfloor = 5$ ✓

2) $\chi(\Gamma) = 0$: $\tilde{d} \leq 6$ ⇒ ∃ vrchol stupně ≤ 6 … $6 \leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{49}}{2} \right\rfloor = 6$ ✓

3) $\chi(\Gamma) < 0$: $\tilde{d} \leq 6 + \frac{\text{něco} > 0}{|V|}$



→ zafixujme $|V| =: n$

→ v nejhorším případě je $\tilde{d} = |V| - 1$

⇒ celkem

$\tilde{d} \leq 6 - \frac{6\chi(\Gamma)}{|V|}$ & $\tilde{d} = |V| - 1$

$$\Rightarrow \tilde{d} \leq 6 - \frac{6\cdot\chi}{\tilde{d}+1} \Rightarrow \tilde{d}^2 + \tilde{d} \leq 6\tilde{d} + 6 - 6\chi$$
$$d^2 - 5\tilde{d} + 6\chi - 6 \leq 0$$
$$\tilde{d}_{1,2} \leq \frac{5 \pm \sqrt{25-24\chi+24}}{2}$$

Note: $\chi \leq -1 \Rightarrow \sqrt{\ } > 5 \Rightarrow \tilde{d}_2 < 0$ což nejde

$$\Rightarrow \tilde{d} \leq \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2}$$

⇒ min deg $\leq \tilde{d}$ & min deg $\in \mathbb{N}$ ⇒ min deg $\leq \left\lfloor \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2} \right\rfloor$ ■

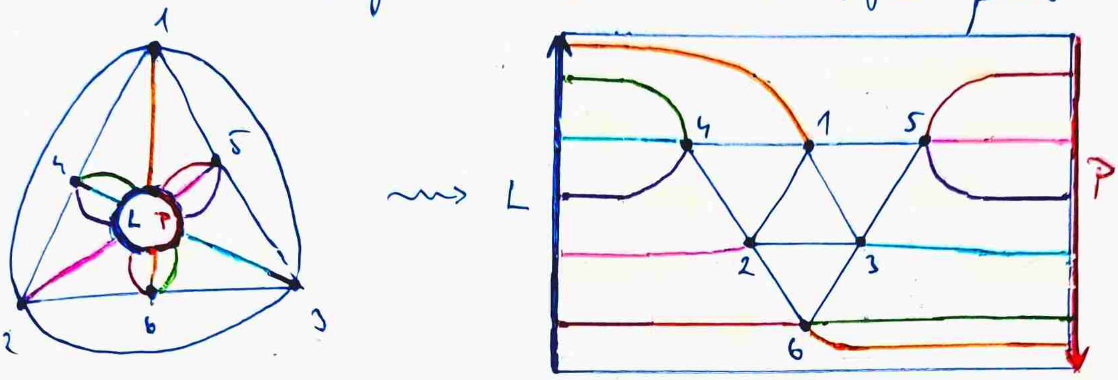
Dodatek: Pro Σ_0 touto metodou dostaneme min deg ≤ 5.

↳ $\hat{d} = \frac{2|E|}{|V|} \le 6 - \frac{6\chi(\Sigma_0)}{|V|} \le 6 - \frac{12}{|V|} < 6$

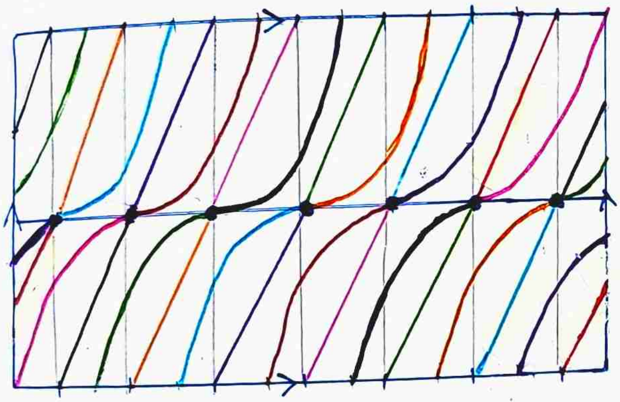
Úlohy

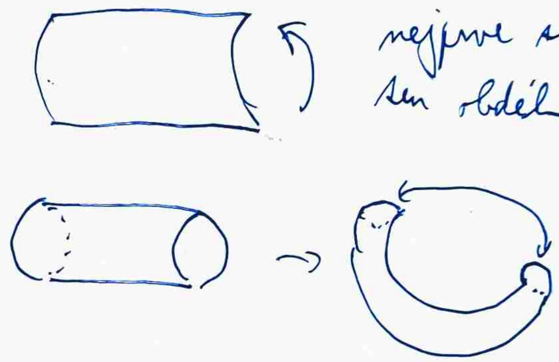
(1) K_6 na projektivní rovinu Π_1.

→ kreslení na Π_1 je ekviv. kreslení na Möbiově pásce



(2) K_7 na torus Σ_1





nejprve slepím tam obdélník takto

a pak takto

Recall: Pokud G lze nakreslit na Γ $\Rightarrow$ $|E| \le 3\cdot|V| - 3\cdot\chi(\Gamma)$

Lemma: Rovnost nastane $\Leftrightarrow$ nakreslení je buňková triangulace

↳ triangulace $\Leftrightarrow$ $2e = 3f$ & $e = v + f + \chi$ $\Rightarrow$ $e = v + \frac{2}{3}e + \chi$

↳ buňkové nakreslení

Lemma: G nemá trojúhelníky $\Rightarrow$ $|E| \le 2\cdot|V| - 2\cdot\chi(\Gamma)$

↳ $\forall$ stěna min. 4 hrany & $\forall$ hrana ve 2 stěnách $\Rightarrow$ $2e = 4f$ $\Rightarrow$ $e = v + \frac{1}{2}e + \chi$

(3) Jakou největší kliku lze nakreslit na Σ_1 a Π_1?

☼ je to buňková triangulace

Torus: $e = 3v - 3\chi(\Sigma_1) = 3v - 3\cdot 0 = 3v$ $\Rightarrow$ $3v = e = \frac{v(v-1)}{2}$ $\Rightarrow$ $v^2 - 7v = 0$ $\Rightarrow$ $v = 7$

↳ teoretické maximum je 7 což jsme nakreslili $\Rightarrow$ K_7

P. rovina: $e = 3v - 3\chi(\Pi_1) = 3v - 3$ $\Rightarrow$ $\frac{v(v-1)}{2} = 3v - 3$ $\Rightarrow$ $v^2 - 7v + 6 = 0$ $\Rightarrow$ $v = \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$

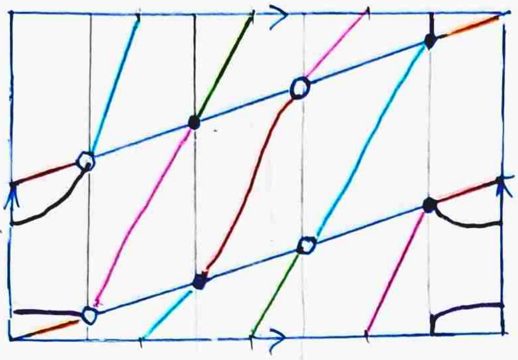
↳ teoretické max. je 6 což jsme nakreslili $\Rightarrow$ K_6

(4) Pro jaké největší n lze na torus nakreslit $K_{n,n}$? $\chi(\Sigma_1) = 0$

bip. graf ⇒ bez △ ⇒ platí $e \le 2v - 2\chi(\Gamma) = 2v$

$e = n^2$, $v = 2n$ ⇒ $n^2 \le 4n$ ⇒ $n(n-4) \le 0$ ⇒ $n \le 4$

⇒ teoretické max. je $n=4$, jde to nakreslit?



$K_{4,4}$

BARVENÍ GRAFŮ

Def: Vrcholové obarvení grafu $G=(V,E)$ je fce $c: V \to [k]$ t.ž. $uv \in E \Rightarrow c(u) \ne c(v)$.

↳ vrcholová barevnost $\chi(G) :=$ min. k pro které ∃ takové obarvení

Def: Hranové obarvení je fce $c: E \to [k]$ t.ž. $e, f \in E$ & $e \cap f \ne \emptyset \Rightarrow c(e) \ne c(f)$.

↳ hranová barevnost $\chi'(G) :=$ min. k pro které ∃ takové obarvení

Def: $\Delta(G)$ = max. stupeň, $\delta(G) :=$ min. stupeň

Pro ∀ graf platí $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$.

↳ seřadím vrcholy libovolně a barvím ⟼   Hladové obarvení

↳ ať je to vlevo obarvené jakkoliv, tak tam z vrcholu v vede max. $\deg(v)$ hran ⇒ $\deg(v)$ zakázaných barev ⇒ vyberu první nezakázanou

Pro ∀ graf platí $\chi'(G) \le 2\cdot\Delta(G) - 1$ G^* = line graf G

→ převedu barvení hran na barvení vrcholů

$G = (V,E) \rightsquigarrow G^* = (V^* = E, E^*)$, $ef \in E^* \equiv e \cap f \ne \emptyset$

→ G^* obarvím podle předchozího pozorování

⇒ $\chi'(G) = \chi(G^*) \le \Delta(G^*) + 1 = 2(\Delta(G) - 1) + 1 = \underline{2\Delta(G) - 1}$

Věta (Brooks): Pokud G souvislý, není K_n ani C_{2n+1}, tak $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Věta (Vizing): Pro ∀ graf G platí $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.

Def: $\alpha(G) :=$ velikost největší nezávislé množiny G
$\mu(G) :=$ velikost největšího párování v G

👁 vrcholová obarvení G ~ rozklady $V(G)$ na (jednobarevné) nez. m.
$\Rightarrow$ $\chi(G)$ má nějaké obarvení ~ rozklad na nz. m. $\Rightarrow \chi \cdot \alpha \geq n$

👁 hranová obarvení G ~ rozklady $E(G)$ na (jednobarevná) párování
$\Rightarrow$ $\chi'(G)$ má nějaké obarvení ~ rozklad na párování $\rightarrow \chi' \cdot \mu \geq m$

Tvrzení: Pro $\forall$ graf G platí: $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$, $\chi'(G) \geq m/\mu(G)$.

Tvrzení: Pro $\forall$ graf G platí $|E| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

Dk: Nechť $\chi(G) = k$, $c_1 \neq c_2$ barvy ... $c_1, c_2 \in [k]$ zvolené libovolně
👁 $\exists uv \in E$ t.ž. $c(u) = c_1$ & $c(v) = c_2$ ... jinak jedna z těch barev nepotřebujem
$\Rightarrow$ těchle výběrů $c_1 \neq c_2$ je $\binom{k}{2}$.

Def: Graf G je d-degenerovaný $\equiv$ $\forall$ (neprázdný) podgraf $H \subseteq G$ má $\delta(H) \leq d$.

👁 G je d-degenerovaný $\Leftrightarrow$ má uspořádání vrcholů $v_1, \dots v_n$ t.ž.
$\forall i$: #levých sousedů $= |\{j < i \mid v_i v_j \in E\}| \leq d$

$\Rightarrow$: trháním vrcholů s min. stupněm stavím z prava doleva $\leftarrow$
$\Leftarrow$: podgraf H ... koukmu na nejpravější vrchol $\rightarrow$ doleva (do H) $\leq d$ hran

👁 Pokud G je d-degenerovaný, pak $\chi(G) \leq d+1$ $\rightarrow$ Speciálně: $\forall G: \chi \leq \Delta + 1$
↳ obarvím hladově $\mapsto$ podle toho uspořádání

Věta (Heawoodova formule): Pokud je G nakreslený na plochu Γ, potom

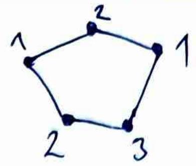
$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Gamma)}}{2} \right\rfloor =: D$$

Dk: Předtím jsme dokázali že pro $\Gamma \neq \Sigma_0$, $\exists v \in V$: $\deg(v) \leq \left\lfloor \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2} \right\rfloor = D - 1$
Zároveň 👁 když utrhnu vrchol tak to nakreslení nerozbiju
$\Rightarrow$ G je $(D-1)$-degenerovaný
↳ libovolný podgraf $H \subseteq G$ ... pořád nakreslený na Γ, pořád věta platí
$\Rightarrow \exists v \in V(H)$: $\deg(v) \leq D-1$ $\Rightarrow \delta(H) \leq D-1$
$\rightarrow$ podle posledního pozorování věta platí pro $\Gamma \neq \Sigma_0$
Co když $\Gamma = \Sigma_0$? $\Rightarrow \chi(\Gamma) = 2$
$\rightarrow$ dostaneme $\chi(G) \leq \lfloor \frac{7+1}{2} \rfloor = 4$ což platí podle věty o 4 barvách

Recall: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$

Otázka: Kdy $\chi(G) = \Delta(G)+1$?

lichá kružnice C_{2m+1}



☼ $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n)+1$

☼ $\chi(C_{2m+1}) = 3 = \Delta(C_{2m+1})+1$

Věta (Brooks): Pokud je G souvislý, $G \not\cong K_n$, $G \not\cong C_{2m+1}$ $\Rightarrow$ $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Důkaz (Lovász - důležitý žijící Maďarský matematik)

Lemma: Pokud je G' souvislý & $\delta(G') < \Delta(G)$, potom $\chi(G') \le \Delta(G)$.

Dk: G' je $(\Delta-1)$-degenerovaný

→ když utrhnu vrchol s min. deg. tak ze spojitosti zmizela nějaká hrana

$\Rightarrow$ v tom novém grafu opět $\exists$ vrchol s deg $< \Delta(G)$

$\Rightarrow$ postupuju trháním postavím zprava to obarvující uspořádání ∎

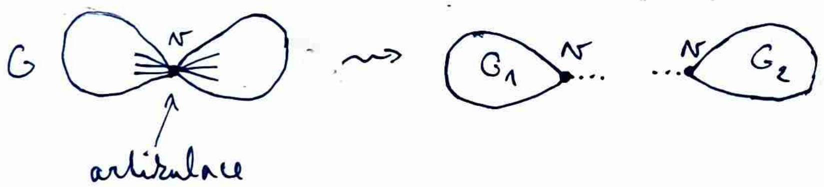
Důkaz věty: Rozborem případů ... G souvislý, $G \not\cong K_n$, $G \not\cong C_{2m+1}$

① $\Delta(G)=0$: • $\approx K_1$ $\Rightarrow$ nenastane

② $\Delta(G)=1$: •—• $\approx K_2$ $\Rightarrow$ nenastane

③ $\Delta(G)=2$: •—•—•, □ $\Rightarrow$ cesta (délka ≥ 3), (sudé) kružnice $\Rightarrow$ $\chi=2$ ✓

④ $\Delta(G)\ge 3$ & κ_v = stupeň vrcholové souvislosti $= 1$



kdyby víc, tak stejný argument ale složitější obrázek

Nechť $G-v$ má 2 komponenty jako na obrázku

→ vyrobíme G_1 a G_2 obsahující v

☼ G_1, G_2 splňují předpoklad lemmatu $\because$ v chybí hrana

$\Rightarrow$ aplikuji lemma a získám

jinak přejmenuju barvy

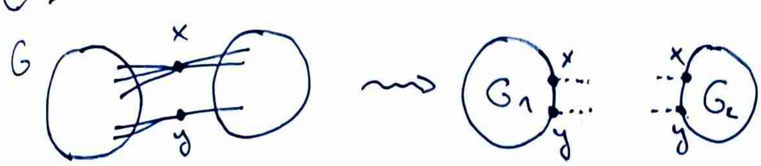
b_1 ... Δ-obarvení G_1 }
b_2 ... Δ-obarvení G_2 } beru $b_1(v) = b_2(v)$ $\Rightarrow$ spojením vznikne Δ-obarvení G

Kde jsme v ⑥ použili 3-souvislost?

→ ty hladiny $N_1, N_2, \dots$ mohu udělat pro libovolný graf,
ale my potřebujeme aby x, y tvořily minor, abychom je mohli dát na začátek, tedy dostanou stejnou barvu a můžeme obarvit z

→ jinak $x, y \in N_1$ a vše by nemusely dostat stejnou barvu

⑤ $\Delta(G) \geq 3$ & $K_v(G) = 2$

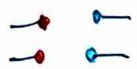


⇒ podobně jako minule pomocí lemmatu obarvím G_1 a G_2

⇒ jak slepit obarvení b_1 a b_2?

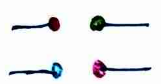
2-řez ↗

a) $b_1(x) = b_1(y)$ & $b_2(x) = b_2(y)$



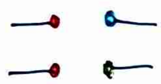
⇒ bíno $b_1(x) = b_2(x)$ ✓

b) $b_1(x) \neq b_1(y)$ & $b_2(x) \neq b_2(y)$



→ bíno $b_1(x) = b_2(x)$ & $b_1(y) = b_2(y)$ ✓

c) $b_1(x) = b_1(y)$ & $b_2(x) \neq b_2(y)$

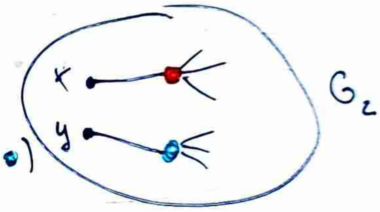


I) pokud $\deg(x)$ nebo $\deg(y)$ v $G_1 < \Delta(G)-1$, potom přidám hranu xy do G_1 a podle lemmatu obarvím znovu ⇒ dostanu obarvení kde $b_1(x) \neq b_1(y)$ ⇝ b)

II) x i y mají v G_1 $\deg = \Delta(G)-1$

⇒ do G_2 vede z x i y právě 1 hrana

→ ti dva sousedi jsou v b_2 nějak obarvení (●, ●)



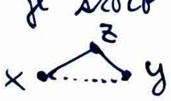
Recall: $\Delta(G) \geq 3$ ⇒ mám alespoň 3 barvy

→ $b_2(x)$ a $b_2(y)$ změním na nějakou třetí barvu ●

⇒ tedy mám nové obarvení b_2' kde $b_2'(x) = b_2'(y)$ ⇝ a)

⑥ $\Delta(G) \geq 3$ & $K_v(G) \geq 3$ … G je skoro $(\Delta-1)$-degenerovaný

Lemma: G obsahuje obrázek

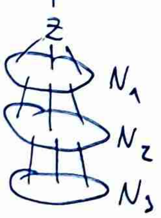


↙ $\Delta(G) \geq 3$ ⇒ alespoň 3 vrcholy

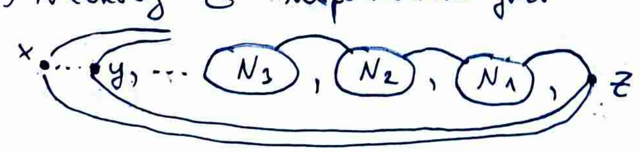
Dk: G souvislý ⇒ uvažme všechny cesty délky 2 v G, alespoň 1 z nich musí netvořit trojúhelník, jinak $G \approx K_n$ ↯

→ Ze 3-souvislosti G má $\forall u \in V \setminus \{x,y,z\}$ cestu do z bez x a y ($G - \{x,y\}$ je pořád souvislý)

⇒ pomocí BFS rozdělím vrcholy $G - \{x,y\}$ do hladin podle vzdálenosti od z



⇒ vrcholy G uspořádám jako



↗ degenerované chování

→ obarvím hladově ⟼

👁 z ∀ vrcholu kromě z vede alespoň 1 hrana doprava ⇒ max. $\Delta(G)-1$ sousedů vlevo

→ Jak obarvím z? z je spojen s x i y, ale mezi x a y není hrana a jsou na začátku

⇒ x, y dostanou stejnou barvu ⇒ jednu barvu jsme ušetřili – použijeme na z ▨

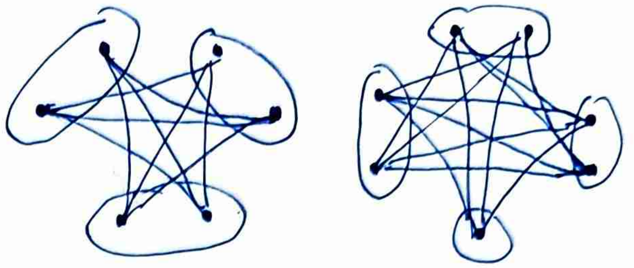
Úlohy

① Barevnost anticyklu: kolik je $\chi(C'_n)$ kde C'_n je doplněk C_n?

Recall: $\chi \geq \frac{n}{\alpha} = \frac{n}{2}$

$\chi \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$

$\Big\}\ \chi = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

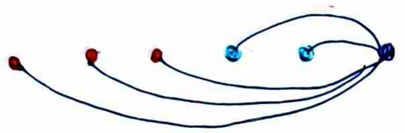


② Dokaž že ∀ graf G s m hranami obsahuje b.p. podgraf H s alespoň $m/2$ hranami.

a) obarvíme vrcholy G postupně

→ recall: G bipartitní <=> G 2-obarvitelný

→ nejprve vrcholy libovolně uspořádáme a pak zleva doprava barvíme



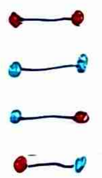
← jak ho obarvit?

→ v ∀ kroku chci vyhodit nejvýše polovinu hran z daného vrcholu

⇒ obarvím ho modře ∵ modrých sousedů je méně

b) obarvíme vrcholy G náhodně

∀ hrana 4 možná obarvení



} nefunguje

} funguje

⇒ ∀ hrana funguje s pstí $1/2$, tudíž

$\mathbb{E}[\#\text{ fungujících hran}] = \frac{m}{2}$

⇒ tedy ∃ obarvení kde funguje alespoň $\frac{m}{2}$ hran

Věta (Vizing): Pro ∀ graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ ... grafy Vizingovy třídy 1

$\chi'(G) = \Delta(G)+1$ ... grafy Vizingovy třídy 2 ↗ i pro grafy s $\Delta(G)=3$

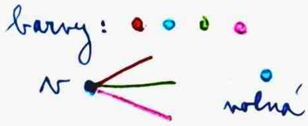
Fakt: Rozhodnout Vizingovu třídu grafu je NP-úplný problém

Důkaz: Zjevně $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, tedy dokazujeme ∀G: $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$

→ Nechť $H \subseteq G$ je max. podgraf (co do # hran) t.ž. má hranové obarvení b pomocí $\Delta(G)+1$ barev

→ pokud $H = G$, máme vyhráno

→ jinak předpokládejme že $\exists e \in E(G) \setminus E(H)$ a ukážeme, že z b lze vytvořit obarvení b' grafu $H+e$ pomocí $\Delta(G)+1$ barev.



Def: Barva β je volná ve vrcholu v vůči obarvení b $\equiv$
$\nexists e \in E$, $v \in e$ t.ž. $b(e) = \beta$

Množinu volných barev vrcholu v značíme $VB(v)$

(👁) jelikož $\chi'(G) \geq \Delta(G)+1$, tak $\forall v: |VB(v)| \geq 1$ pro libovolné obarvení b

Značení: pokud je volná barva vrcholu důležitá, tak ho namaluju tou barvou

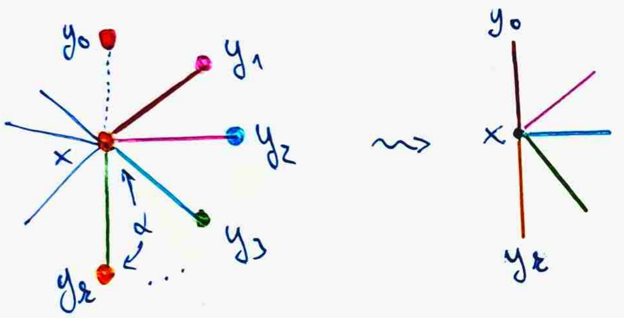
$\Rightarrow$ Předpokládejme že $\exists e_0 = xy_0 \in E(G) \setminus E(H)$ ... (👁) $VB(x) \cap VB(y_0) = \emptyset$

$\rightarrow$ zkoumejme hrany incidentní s x a vytvoříme z nich nejdelší možnou posloupnost

$e_1 = xy_1$, $e_2 = xy_2$, $e_3 = xy_3$, ... $e_k = xy_k$ $\subset \{e \in E(H) \mid x \in e\}$

t.ž. $\forall i = 1, \dots k$: barva $b(e_i)$ je volná u y_{i-1} a žádná hrana se neopakuje

① x a y_k mají společnou volnou barvu α



$\rightarrow$ α je volná u x i y_k

$\Rightarrow$ $e_k = xy_k$ lze přebarvit na α

$\Rightarrow$ pak postupně pro $\forall i = k-1, \dots 0$ přebarvíme $b'(e_i) := b(e_{i+1})$

② $VB(x) \cap VB(y_k) = \emptyset$, $\alpha \in VB(y_k)$, $\beta \in VB(x)$

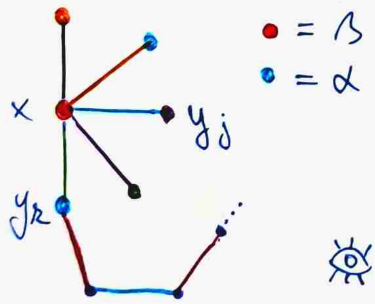
a) $\exists f \in E(H)$ incidentní s x, $b(f) = \alpha$, ale $f \notin \{e_1, \dots e_k\}$

$\Rightarrow$ posloupnost lze prodloužit o $e_{k+1} = f$ ↯

b) $\exists j \in \{1, \dots k-1\}$ t.ž. $b(e_j) = \alpha$

$\rightarrow$ nechť H' je podgraf H tvořený hranami barev α a β

(👁) H' dvoubarevný $\Rightarrow$ komponenty H' jsou cesty a sudé kružnice



- β není volná v y_k $\Rightarrow$ $\exists$ červená hrana z y_k
- α je volná v y_k $\Rightarrow$ $\nexists$ modrá hrana z y_k

$\Rightarrow$ komponenta H' obsahující y_k je cesta se začátkem v y_k

(👁) pokud je poslední hrana č/m ···—·, tak je m/č volná v koncovém vrcholu – jinak by cesta pokračovala

$\Rightarrow$ cestu lze alternovat a nerozbiju obarvení $\rightarrow$ udělám to

I) cesta obsahuje y_j: potom končí v x, jelikož je v něm červená volná

$\rightarrow$ po alternaci je v x volná modrá & modrá volná v y_{j-1}

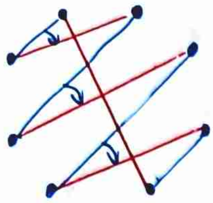
$\Rightarrow$ udělám to stejné přebarvení hran jako v ①, ale začnu v e_{j-1} místo e_k

II) cesta neobsahuje y_j: po alternaci červená volná v y_k $\Rightarrow$ ① ■

Úloha: Kolik je $\chi'(K_n)$?

Recall: hranové obarvení ~ rozklad hran na (jednobarevná) párování

a) n sudé



$\chi'(K_n) \le n-1$

$\chi'(K_n) \ge \Delta(K_n) = n-1$

$\Big\}$ $\chi'(K_{2k}) = \Delta(K_{2k})$

n sudé $\Rightarrow$ Vizing 1

b) n liché ... přidám vrchol navíc ... w

$\rightarrow$ to první (modré) obarvení w neobsahuje

$\rightarrow$ abych w spojil s každým tak potřebuju alespoň $n-1$ dalších párování

$\Rightarrow \chi'(K_n) \ge n = \Delta(K_n)+1$

Vizing: $\chi'(K_n) \le \Delta(K_n)+1$

$\Big\}$ $\chi'(K_{2k+1}) = \Delta(K_{2k+1})+1$

n liché $\Rightarrow$ Vizing 2

PERFEKTNÍ GRAFY

Značení

- $\alpha(G)$:= velikost největší nezávislé mn. v G
- $\omega(G)$:= klikovost = velikost největší kliky v G

Pro $\forall$ graf G platí že $\chi(G) \ge \omega(G)$

Def: Graf G je perfektní $\equiv$ pro $\forall$ jeho indukovaný podgraf H platí $\chi(H) = \omega(H)$

Množina perfektních grafů je uzavřená na indukované podgrafy

Příklady p.g.

$\rightarrow$ úplné grafy  ... $\chi(H) = \omega(H) = |V(H)|$

$\rightarrow$ bipartitní grafy $<$ $E(H) = \emptyset \Rightarrow \chi = \omega = 1$; $E(H) \neq \emptyset \Rightarrow \chi = \omega = 2$

$\rightarrow$ stromy – protože jsou bipartitní

Příklady neperfektních grafů

! delší než 5 !

$\rightarrow$ liché cykly ... $\chi = 3$, $\omega = 2$

$\rightarrow$ liché anticykly ... v nějaké předešlé úloze jsme ukázali: $\chi = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ale $\omega = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Anticyklus $\equiv$ doplněk cyklu

Silná věta o perfektních grafech

Věta: G je perfektní $\Leftrightarrow$ neobsahuje žádný $\overbrace{\text{lichý cyklus}}^{\text{díra}}$ ani $\overbrace{\text{lichý anticyklus}}^{\text{antidíra}}$ o velikosti ≥ 5 jako indukovaný podgraf.

Tvrzení: Bipartitní grafy jsou Vizing 1 ... $\chi' = \Delta$.

Dk: Pokud je Δ-regulární, tak podle Hallovy věty existuje perfektní párování

⇒ odečtu tyto hrany (obarvím stejnou barvou)

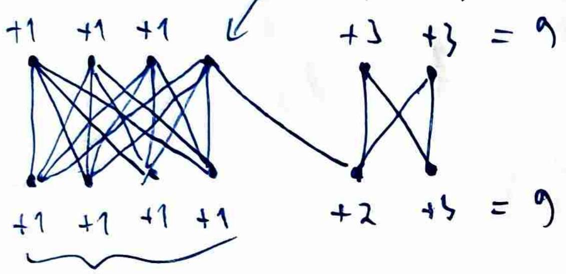
⇒ teď mám $(\Delta-1)$-reg b.p. graf ⇒ indukcí obarvím zbytek

Co když není Δ-regulární?

→ chtěl bych nějak přidat vrcholy a hrany aby byl Δ-reg

↳ pak obarvím a zase je smažu

Pokus #1 $\quad \Delta = 5$



oba potřebují přidat 3 hrany

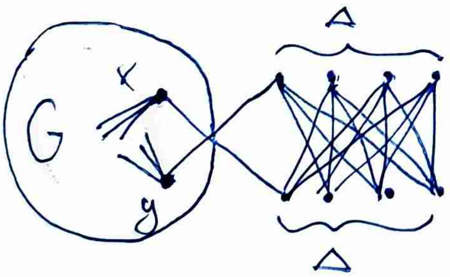
ať to udělám jakkoli, vznikne mi tu vrchol s deg = $6 > \Delta$

⇒ bez přidávání vrcholů to nepůjde

⇒ chce to nějaký způsob, jak vybrat libovolný vrchol zezhora a zezdola a oboum zvýšit deg o 1, i když už jsou spojení hranou

Pokus #2

→ nechť G má max deg $\Delta = 4$ a chci zvýšit stupeň x a y o 1



$\Delta(G') = \Delta(G)$, všechny nové vrcholy mají deg $= \Delta$ a deg x a y stoupl o 1

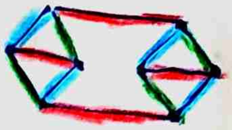
⇒ postupně přidávám pružinky až mám Δ-reg. G'

→ obarvím a smažu pružinky

∎

Hranová barevnost kubických grafů ... kubický ≡ 3-regulární

👁 Pokud G kubický má $\chi' = 3$, potom ∀ barva je PP (*)

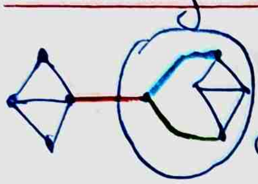


① G kubický & má H. kružnici ⇒ Vizing 1

→ hrany na HC obarvím ● a ● ... 👁 $|V(G)|$ je sudý

→ ten zbytek obarvím pomocí ● ... z ∀ vrcholu zbývá 1 hrana

② G kubický & má most ⇒ Vizing 2



G_1

👁 most dělí G na dvě liché části

$$\sum_{v \in G_1} \deg(v) = 3 \cdot |V(G_1)| - 1 = \underbrace{2|E(G_1)|}_{\text{sudé}} \Rightarrow |V(G_1)| \text{ je liché}$$

→ kdyby G byl Vizing 1 tak podle (*) ∀ barva vytváří PP v G

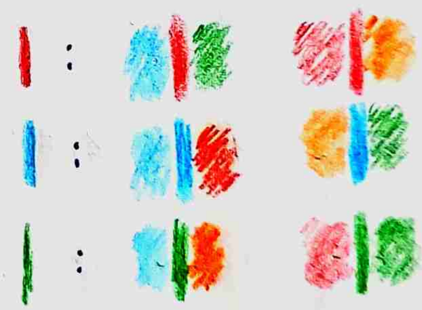
→ búno most ●, pak ● i ● vytváří PP v G_1. ↯

Věta (o 4 barvách): Pro ∀ rovinný G platí $\chi(G) \leq 4$.

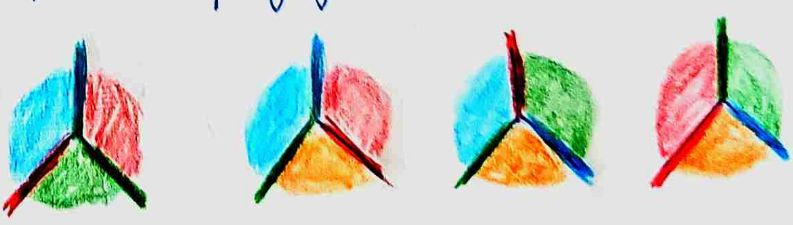
③ G kubický & rovinný ⇒ Vizing 1

→ stěny G (včetně té vnější) obarvím podle věty o 4 barvách

→ hranové obarvení definuju jako



→ proč to funguje ?



Fakt: Tohle in fact je ekvivalentní větě o 4 barvách.

Def: Rozsáhlá nezávislá množina (RNM) v grafu G je nz. m. protínající $\forall$ kliku velikosti ω v G.

Lemma 1: G je perfektní $\iff$ $\forall$ indukovaný $H \subseteq G$ obsahuje RNM.

Dk: $\Rightarrow$: G perfektní $\Rightarrow$ G obsahuje RNM, z toho "$\Rightarrow$" kvůli uzavřenosti p.g. na indukt. podgr.

→ G perfektní $\Rightarrow \chi(G) = \omega(G) \Rightarrow \forall$ klika velikosti ω používá všechny barvy

$\Rightarrow$ pro $\forall$ barvu je nz. m. určená touto barvou RNM

$\Leftarrow$: Nechť $H \subseteq G$ je ind. podgraf, najdeme $\omega(H)$-obarvení

→ najdu RNM, vrcholy obarvím barvou 1 a smažu je

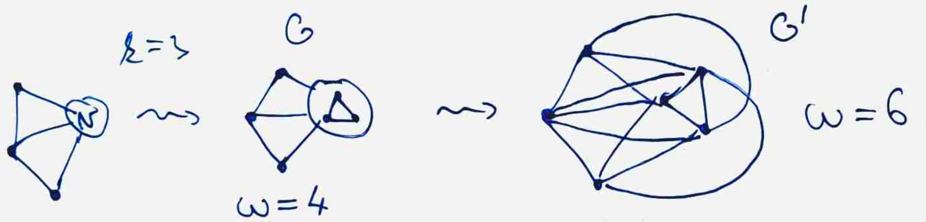
→ dostanu menší ind. $H' \subseteq H \subseteq G$, který obarvím indukcí

↳ opět najdu RNM, ... ■

Důsledek: Odebráním RNM z perf. grafu vznikne perfektní graf.

Lemma 2: Pro $\forall$ perfektní graf G, vrchol $v \in V(G)$, $k \geq 2$ je graf vzniklý nafouknutím v do kliky K_k také perfektní.

Dk:



☉ Stačí dokázat pro $k=2$, větší kliky postupným nafukováním

(1) nafouknutí zvětší ω ... $\omega(G') = \omega(G) + 1$

↳ prostě přidám pro ten nový vrchol novou barvu

(2) nafouknutí nezvětší ω

↳ nemohu přidat novou barvu, ani to bezpečně ničím obarvit

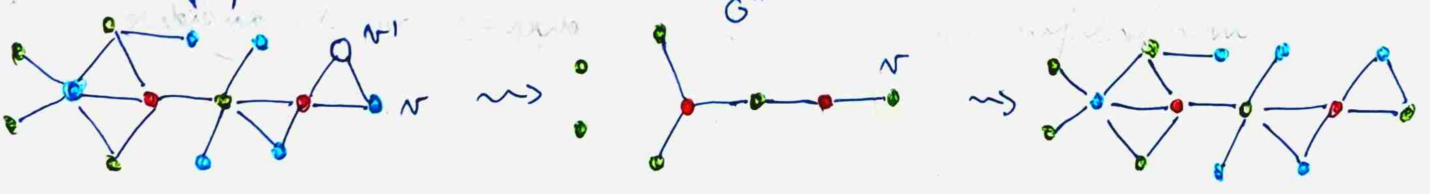
$\Rightarrow$ z G vyrobím graf G'' smazáním všech vrcholů s barvou $b(v)$ kromě v

→ podle důsledku předchozího lemmatu je G'' také perfektní - smazali jsme RNM

↳ jelikož ind. $H \subseteq G''$ je také ind. $H \subseteq G$ $\because$ $G'' \subseteq G$ ind.

☉ $\omega(G'') = \omega(G) - 1 \Rightarrow$ najdeme $(\omega(G)-1)$-obarvení G''

→ přidáme tam zpátky ty odebrané vrcholy a v' (nový vrchol) a obarvíme je původní barvou $b(v)$



■

Slabá věta o perfektních grafech (Lovász)

Věta: G je perfektní $\iff$ $\overline{G}$ je perfektní. $\leftarrow$ doplněk

Důkaz: Stačí "$\Rightarrow$" jelikož $\overline{\overline{G}} = G$

$\rightarrow$ pro spor nechť G je nejmenší (co do # vrcholů) perfektní t.ž. $\overline{G}$ není perfektní

$\Rightarrow$ podle lemma 1 $\exists$ ind. $H \subseteq \overline{G}$ t.ž. nemá RNM

Z minimality G je $H = \overline{G}$ ... jinak $\overline{H}$ je menší a nesplňuje větu ↯

Klíčové pozorování: Nezávislé mn. G ~ kliky $\overline{G}$ a naopak

$\Rightarrow$ $\overline{G}$ nemá RNM ... každá NM netrefí nějakou max. kliku (velikosti $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$)

$\Rightarrow$ pro $\forall$ kliku Q v G $\exists$ max. NM I_Q (velikosti $\alpha(G)$) disjunktní s Q (*)

Nechť $Q_1, \dots Q_k$ je seznam všech klik v G a $I_1, \dots I_k$ jsou odpovídající max. NM

$\Rightarrow$ pro $v \in V(G)$ definujeme $f(v) := |\{ i \mid v \in I_i \}|$

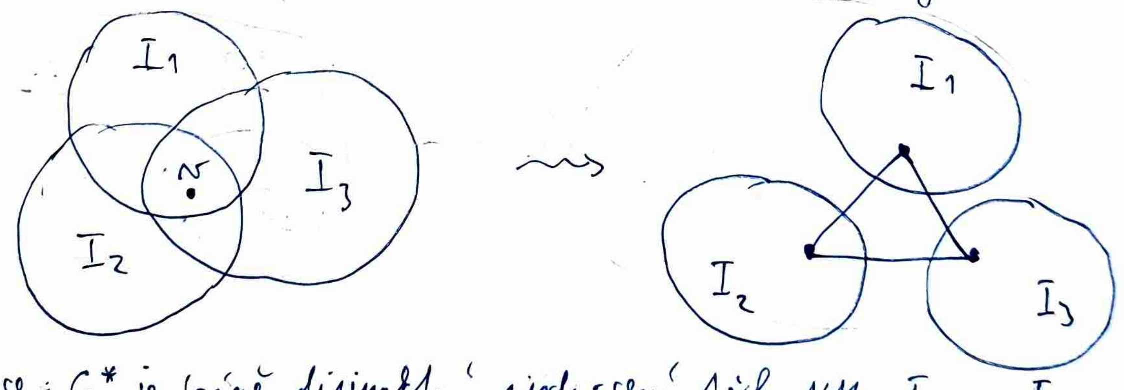
Nechť G^* je graf vzniklý z G nafouknutím $\forall v \in V(G)$ na kliku velikosti $f(v)$

a) $f(v) = 0$ $\Rightarrow$ vrchol jsme smazali $\Rightarrow$ ind. podgraf $\Rightarrow$ zachovává perfektnost

b) $f(v) = 1$ $\Rightarrow$ nic se nezměnilo

c) $f(v) \geq 2$ $\Rightarrow$ podle lemma 2 zachovává perfektnost

Tedy G^* je také perfektní a navíc jsme "rozmotali" ty max. NM $I_1, \dots I_k$



Dokonce: G^* je právě disjunktní sjednocení těch NM $I_1, \dots I_k$,
jelikož pokud nějaký v nebyl v žádné z nich, tak $f(v) = 0 \Rightarrow$ je smazaný.

$|V(G^*)| = k \cdot \alpha(G)$, $\alpha(G^*) = \alpha(G)$ ... žádný nezávislý vrchol jsme nepřidali

Recall: $\forall G: \chi \cdot \alpha \geq n$ $\Rightarrow$ $\chi(G^*) \geq \frac{|V(G^*)|}{\alpha(G^*)} = \frac{k \cdot \alpha(G)}{\alpha(G)} = k$

Kolik je $\omega(G^*)$? $\Rightarrow$ nechť max. klika v G^* vznikla nafouknutím vrcholů kliky $Q_j \rightsquigarrow Q^*$

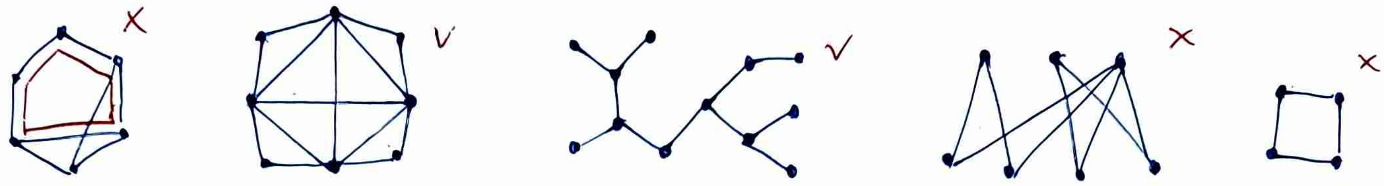
$\omega(G^*) = |Q^*| = \sum_{v \in Q_j} f(v) \leq k - 1$ $\rightarrow$ žádnou $I_1, \dots I_k$ nezapočítám dvakrát
navíc I_j nezapočítám vůbec $\because$ $I_j \cap Q_j = \emptyset$ (*)

Tedy $\chi(G^*) \geq k > \omega(G^*)$ $\Rightarrow$ G^* není perfektní ↯ ∎

CHORDÁLNÍ GRAFY

Def: Graf G je <u>chordální</u> $\equiv$ neobsahuje $\underbrace{\text{indukovaný cyklus}}_{\text{díra}}$ velikosti > 3

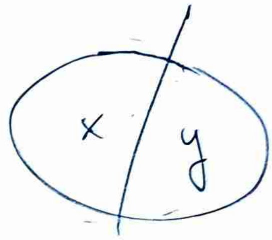
$\iff \forall$ cyklus ≥ 4 má chordu



nejmenší nechordální

Příklady

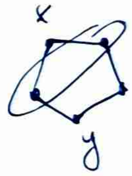
- úplné grafy jsou chordální
- acyklické grafy jsou chordální ... nemají cykly $\Rightarrow$ stromy, lesy
- bipartitní grafy jsou chordální $\iff$ jsou acyklické
  ↳ když má b.p. graf cyklus, tak je sudý $\Rightarrow \geq 4$



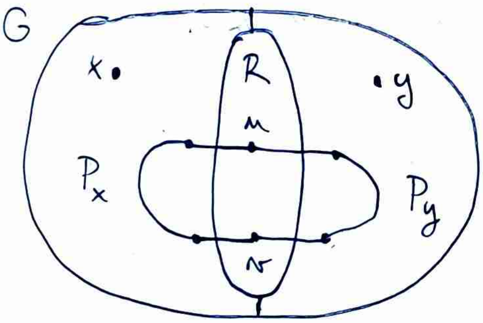
Def: Pro dva nesousední vrcholy x, y v grafu G je <u>x-y řez</u> libovolný vrcholový řez, kde x a y připadnou do různých komponent po rozříznutí

Tvrzení: G je chordální $\iff$ pro $\forall$ dva nesousední x, y $\exists$ x-y řez, který je klika.

Dk: $\Leftarrow$: Pokud G není chordální, tak obsahuje díru > 3 a nesousední vrcholy té díry nejde oddělit klikou - protože díra nemá chordy.



$\Rightarrow$: Nechť G je chordální a x, y nesousední



→ nechť R je nejmenší x-y řez a pro spor předpokládejme, že není klika

→ pokud $|R| = 0$ nebo $|R| = 1$, tak to klika je ↯

$\Rightarrow$ nechť $|R| \geq 2$ a $u, v \in R$ netvoří hranu

z u i v vede hrana do komponenty obsahující x

→ kdyby ne, tak ten vrchol nezajišťuje žádnou komunikaci mezi komponentami $G - R$ a je v řezu zbytečný $\Rightarrow$ R není minimální ↯

koncové vrcholy těch dvou hran jsou v komponentě x spojené cestou

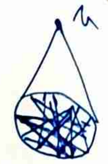
↳ protože je to komponenta, takže je souvislá

$\Rightarrow$ nechť P_x je nejkratší u-v cesta s vnitřními vrcholy pouze z komponenty x

$\Rightarrow$ obdobně vyrobíme P_y

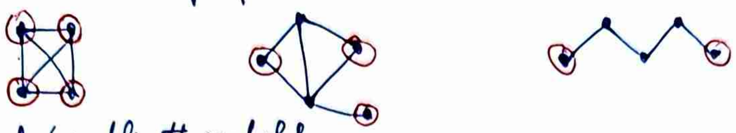
$P_x \cup P_y$ tvoří díru velikosti ≥ 4 v G $\Rightarrow$ G není chordální ↯

Def: Vrchol v grafu G je <u>simpliciální</u> $\equiv$ jeho okolí $G[N(v)]$ je klika.



Věta: <u>Každý chordální graf má simpliciální vrchol.</u>

Příklady:



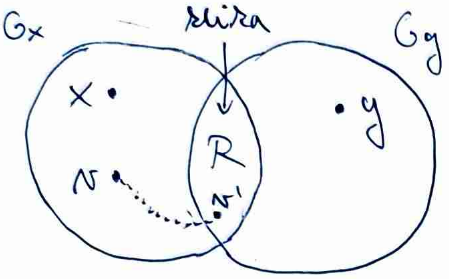
listy jsou simpliciální

Důkaz: Indukcí podle # vrcholů

① Pokud je G úplný, pak je $\forall$ vrchol simpliciální ✓

② Pokud G není úplný, tak najdeme dokonce 2 <u>nesousední</u> (*) simpl. vrcholy

$\Rightarrow$ nechť G je chordální a obsahuje dva nesousední vrcholy x, y



→ podle předchozího tvrzení $\exists$ x-y řez R co je klika

→ graf rozřízneme podle R a vyrobíme grafy G_x a G_y

↳ G_x = podgraf G indukovaný komponentou X a R

a) G_x je klika, potom x je simpliciální

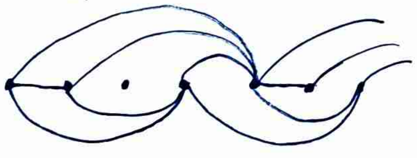
b) G_x není klika, potom podle I.P. má G_x dva simpl. vrcholy v, v'

👁 aspoň jeden z nich musí být v $G_x - R$ $\because$ jsou nesousední (*) & R je klika

↳ tento vrchol je simpliciální i v G

Obdobně najdeme druhý (nesousední) simpl. vrchol pomocí G_y. ■

Def: <u>Perfektní eliminační schéma</u> (PES) grafu G je uspořádání vrcholů $v_1, v_2, \dots v_n$ t.ž. levé okolí každého vrcholu tvoří kliku

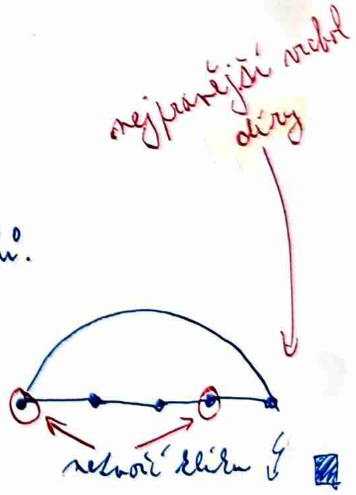


Věta: <u>Graf je chordální $\Leftrightarrow$ má PSA</u>

Dk: $\Rightarrow$: stavíme zprava doleva trháním simpliciálních vrcholů.

👁 chordální grafy jsou uzavřené na indukované podgrafy

$\Leftarrow$: pokud G obsahuje díru >3, tak není PES



■

Důsledky:

↗ dokonce $\exists$ lineární alg.

① Chordální grafy lze poznat v <u>polynomiálním čase</u> trháním simpl. vrcholů

↳ triviální alg. je $O(n^4)$

② <u>Chordální grafy jsou perfektní</u>

↳ hladové obarvení ↦ podle PSA má vlastnost $\chi \leq \omega$, tedy $\chi = \omega$

↳ navíc ind. $H \subseteq G$ chordálního G je chordální, tedy H má PSA a opět $\chi = \omega$

Úlohy:

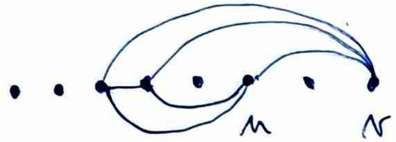
① vzádu sešitu úkol 10 o klikách max. vzhledem k inkluzi

↳ trik: často se hodí dívat se na nejpravější vrchol podle PSA

② Policajt a Zloděj hrají hru na souvislém grafu G. Nejdříve P vybere počáteční vrchol, pak Z a pak P začíná. Tah = posunutí se hranou / zůstane stát. P vyhraje, pokud chytí Z = je ve stejném vrcholu.

Dokaž, že pokud je G chordální, tak P má vítěznou strategii.

→ indukcí podle # vrcholů



nejpravější vrchol PSA

⇒ z indukce vím P umí vyhrát na G−v

Pokud Z nevleze nikdy do v, P vyhraje

Co když Z vleze do v?

⇒ P předstírá, že Z je v u := nejpravější soused v

→ když si P myslí že chytil Z

1) Z není ve v ... opravdu ho chytil

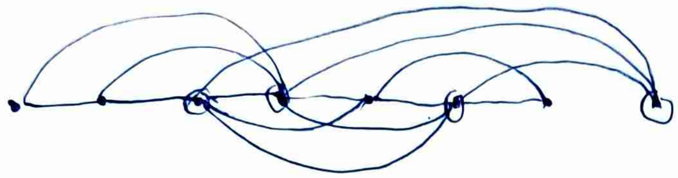
2) Z je ve v ... P je v u

⇒ ať Z půjde z v kamkoliv, tak ho P příště chytí, protože sousedi v tvoří kliku

Úkol 10

Úloha I: Def: Klika v grafu G je max. vzhledem k inkluzi ≡ do ní nelze přidat žádný vrchol, aby zůstala klikou

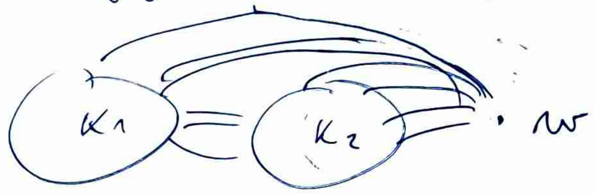
↳ Tvrzení: Chordální G na n vrcholech může mít nejvýše n max. klik.



← PES 

Každý vrchol může být nejpravější v nejvýše jedné klice

→ kdyby byly 2 různé kliky, kde v je nejpravější:



PES ⇒ levé sousedé v tvoří kliku

⇒ je to celé jedna velká klika ↯

Najděte všechny grafy G na n vrcholech co má n max. klik.

Tvrzení: Jediný takový G je paseka na n vrcholech ... $E = \emptyset$

Dk: Potřebujeme aby $\forall$ vrchol byl nejpravější v nějaké klice

↳ začneme zleva podle PSA

↳ nejlevější vrchol musí být nejpravější v nějaké max. klice

⇒ klika velikosti 1

⇒ ten vrchol nesmí mít žádnou hranu doprava, jinak by to šlo rozšířit na kliku velikosti 2

→ stejným argumentem druhý vrchol bude mít stupeň 0

↳ má být nejpravější v nějaké max. klice, ale všechny vrcholy nalevo mají stupeň 0

⇒ indukcí má každý vrchol stupeň 0 ⇒ G je paseka (les bez stromů) ∎

HAMILTONOVSKÉ GRAFY

Def: G je hamiltonovský $\equiv C_{|V|} \subseteq G$ ... obsahuje H. kružnici jako podgraf.

Věta (Bondy-Chvátal): Nechť x, y jsou nesousední v $G=(V,E)$ a $G^+ = G + xy$.

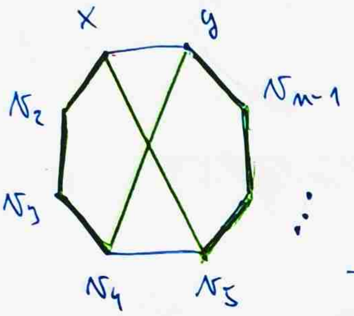
Pokud $\deg(x) + \deg(y) \geq n$, potom G je hamilton $\iff$ G^+ je hamilton

Důkaz: $\Rightarrow$ triviální

$\Leftarrow$: Nechť C je H. kružnice grafu G^+:

1) Pokud $xy \notin C$ $\Rightarrow$ C je H. i v G ... hotovo

2) Pokud $xy \in C$, tak očíslujeme vrcholy C jako $x = v_1, v_2, \dots v_n = y$



→ chceme vyrobit H. k. co nepoužívá xy

$\Rightarrow$ najdeme nějakou vhodnou hranu $v_j v_{j+1}$ a uděláme smyčku

$$C' := C - xy - v_j v_{j+1} + x v_{j+1} + y v_j \quad (*)$$

→ do jakých vhodných vrcholů C (a tedy G) vede z x, y hrana?

$E_x := \{v_i \mid v_i \neq y, v_2 \ \& \ x v_i \in E(G)\}$ ... kam může vést hrana z x

$E_y := \{v_i \mid v_i \neq x, v_{n-1} \ \& \ y v_i \in E(G)\}$ ... kam může vést hrana z y

Nyní se pokusíme najít vrchol v_j který můžeme použít na (*)

$D_x := \{v_{i-1} \mid v_i \in E_x\}$ ... vrcholy dobré z pohledu x

$D_y := \{v_i \mid v_i \in E_y\}$ ... vrcholy dobré z pohledu y

$|D_x| = |E_x| = \deg_G(x) - 1$ ... všechny kromě v_2

$|D_y| = |E_y| = \deg_G(y) - 1$ ... všechny kromě v_{n-1}

$|D_x| + |D_y| \geq n-2$ ... použili jsme předpoklad

$|D_x \cup D_y| \leq n-3$ ... chybí určitě x, y, v_{n-1}

Tedy $|D_x| + |D_y| > |D_x \cup D_y| \Rightarrow \exists v_j \in D_x \cap D_y$ ■

Věta (Dirac): Pokud $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, potom je G hamiltonovský.

Dk: Vezmu si úplný graf K_n a najdu triviální H. kružnici.

Pak postupně odebírám hrany abych vytvořil G a podle B-CH tu H. k. zachovám ■

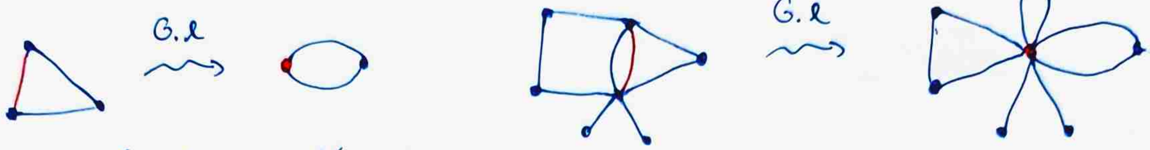
↳ tohle dává polynomiální alg. jak tu H. kružnici najít

TUTTEŮV POLYNOM

smyčky ↘ ← hrany

Def: Multigraf je dvojice $G=(V,E)$, kde $E \subseteq V \cup \binom{V}{2}$ je multimnožina.

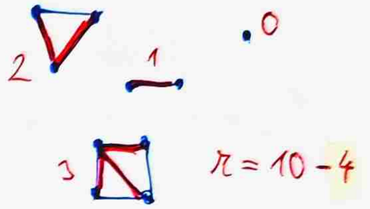
- → dovolujeme smyčky a hrany se mohou opakovat
- → mazání hran / vrcholů funguje intuitivně
- → kontrakce hrany nezahazuje žádné hrany!



Def: $k(G) = k(V,E)$ značí # komponent

Def: Hrana $e \in E$ je most $\equiv$ $k(G-e) < k(G)$

Def: Hodnost (rank) multigrafu G je $r(G) := |V| - k(G)$



☼ $r(G) =$ velikost (lesové) kostry G

☼ přidávání izolovaných vrcholů rank nemění

Def: Pro $F \subseteq E(G)$ definujeme ↳ tedy $r(G) = r(E)$

- rank • $r(F) := r(G[F])$, kde $G[F]$ je graf tvořený pouze hranami F
- nulita • $n(F) := |F| - r(F) =$ # hran navíc − nepoužili jsme je v té kostře

Note: Tohle je prostě klasický rank matroidu

→ $M_G =$ CycleMatroid(G), $M_F :=$ CycleMatroid$(G[F])$

duální matroid

$\Rightarrow r(G) = \mathrm{rank}(M_G)$, $r(F) = \mathrm{rank}_{M_G}(F) = \mathrm{rank}(M_F)$, $n(F) = \mathrm{rank}(M_F^*)$

Def: Tutteův polynom grafu $G=(V,E)$ je $T_G(x,y) := \sum_{F \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(F)} \cdot (y-1)^{n(F)}$

Příklad: $G = \triangle$

F	rank	nulita
∴	0	0
⁄ .	1	0
Λ	2	0
△	2	1

započítám automorfismy

$T_\triangle(x,y) = T(\therefore) + 3\cdot(/\,.) + 3\cdot T(\wedge) + T(\triangle)$; $r(E) = 2$

$= (x-1)^{2-0}\cdot(y-1)^0 + 3\cdot(x-1)^{2-1}(y-1)^0 + 3(x-1)^{2-2}\cdot(y-1)^0 + (x-1)^{2-2}\cdot(y-1)^1$

$= (x-1)^2 + 3(x-1) + 3 + (y-1) =$

$= (x-1)^2 + 3x + y - 1 = \underline{x^2 + x + y}$

Intuice: Tutteův polynom je v podstatě OGF weighted komb. struktury definované na G

→ struktura $\mathcal{G} := \{F \subseteq E\}$, size function $|F| := r(E) - r(F)$, váha $w(F) := y^{n(F)}$

$OGF(\mathcal{G}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|} \cdot w(\alpha) = \sum_{F \subseteq E} x^{r(E)-r(F)} \cdot y^{n(F)} = T_G(x+1, y+1)$

tag variable

Tvrzení: Nechť $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$ a $G=(V_1\cup V_2, E_1\cup E_2)$ jsou multigrafy.
Pokud $E_1\cap E_2=\emptyset$, potom $T_G(x,y)=T_{G_1}(x,y)\cdot T_{G_2}(x,y)$.

Intuice: $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$ jsou disj. komb. struktury $\Rightarrow OGF(\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2)=OGF(\mathcal{G}_1)\cdot OGF(\mathcal{G}_2)$

Důkaz: 👁 $E=E_1\dot\cup E_2 \Rightarrow$ pokud $F\subseteq E$, tak $F=F_1\dot\cup F_2$, kde $F_1\subseteq E_1$ a $F_2\subseteq E_2$ (*)

👁 $r(F)=r(F_1)+r(F_2)$, $n(F)=n(F_1)+n(F_2)$

→ tohle by šlo asi rozepsat z definice, ale to je ošklivé

Def: Pro dvě weighted comb. structures $\mathcal{G}_1,\mathcal{G}_2$ s váhami w_1,w_2 definujeme strukturu $\mathcal{G}:=\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\in\mathcal{G}_1,\beta\in\mathcal{G}_2\}$, $|(\alpha,\beta)|:=|\alpha|+|\beta|$
s váhou $w(\gamma):=w_1(\gamma)\cdot w_2(\gamma)$

👁 $OGF(\mathcal{G})=OGF(\mathcal{G}_1)\cdot OGF(\mathcal{G}_2)$

↳ $\sum_{\gamma\in\mathcal{G}}x^{|\gamma|}w(\gamma)=\sum_{(\alpha,\beta)}=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}x^{|\alpha|+|\beta|}w_1(\alpha)w_2(\beta)=\overbrace{\sum_{\alpha}x^{|\alpha|}w_1(\alpha)}^{OGF(\mathcal{G}_1)}\overbrace{\sum_{\beta}x^{|\beta|}w_2(\beta)}^{OGF(\mathcal{G}_2)}$ (*)

👁 Pokud $\mathcal{G}_1\cap\mathcal{G}_2=\emptyset$, pak můžeme v definici $\mathcal{G}_1\times\mathcal{G}_2$ místo (α,β) použít $\alpha\dot\cup\beta$

Recall: $OGF(\mathcal{G})=T_G(x+1,y+1)$

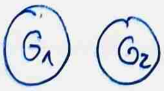
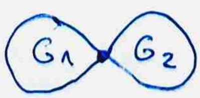
Tedy $OGF(\mathcal{G})=OGF(\mathcal{G}_1)\cdot OGF(\mathcal{G}_2)\Rightarrow T_G(x+1,y+1)=T_{G_1}(x+1,y+1)\cdot T_{G_2}(x+1,y+1)$ ■

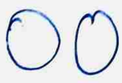
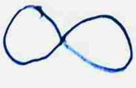
Věta: Tutteův polynom $T_G(x,y)$ multigrafu $G=(V,E)$ lze určit rekurencí

1. $E=\emptyset \Rightarrow T_G(x,y)=1$
2. $e\in E$ je most $\Rightarrow T_G=x\cdot T_{G-e}=x\cdot T_{G.e}$ ... (+)
3. $e\in E$ je smyčka $\Rightarrow T_G=y\cdot T_{G-e}=y\cdot T_{G.e}$ ... mazání a kontrakce smyčky jsou identické operace
4. $e\in E$ jinak $\Rightarrow T_G=T_{G-e}+T_{G.e}$

Důkaz

→ Klíčové pozorování: Tutteův polynom záleží jenom na hranách

- přidávání izolovaných vrcholů nic nemění & $T_\emptyset(x,y)=1 \Rightarrow$ ①
  ↳ prázdná suma
- T pro  $=$ T pro  (+)
  ↳ G_1 a G_2 jsou v obou případech hranově disjunktní $\Rightarrow$ platí minulé tvrzení

👁  a  se chovají identicky vůči ranku

Důkaz věty: nechť $e \in E$

$$T_G(x,y) = \underbrace{\sum_{\substack{F \subseteq E \\ e \notin F}} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{\substack{F \subseteq E \\ e \in F}} (x-1)^{r(E)-r(F)} (y-1)^{n(F)}}_{S_2}$$

Pozorování:

→ co se stane když e smažeme / zkontrahujeme? Jak se změní rank a nulita?

A) e je smyčka

→ kontrakce a mazání smyčky jsou identické – smažme ji

- počet ani velikost komponent se nezmění ⇒ rank se nezmění
- pokud $e \in F$, tak $n(F-e) = n(F) - 1$ ∵ smyčky v kostře nejsou

$$\Rightarrow S_2 = (y-1) \cdot T_{G-e} = (y-1) \cdot T_{G.e}$$

B) e je most

→ z hlediska ranku je mazání a kontrakce (+) mostu identická operace – smažeme

- počet komponent stoupne o 1 ⇒ rank (velikost kostry) klesne : $r(E-e) = r(E) - 1$
- pokud $e \notin F$, tak se nulita nezmění

$$\Rightarrow S_1 = (x-1) \cdot T_{G-e} = (x-1) \cdot T_{G.e}$$

C) e není smyčka – hranu zkontrahujeme

- velikost komponenty klesne o 1 ⇒ rank klesne : $r(E.e) = r(E) - 1$
  ↳ pokud $e \in F$, tak také $r(F.e) = r(F) - 1$
  ⇒ ty jedničky se v mocnině $(x-1)$ v S_2 vyruší ⇒ žádná změna
- co se stane s nulitou když $e \in F$?

⇒ nulita F se nezmění

3 hrany navíc — 3 (zbytečné) smyčky

$$\Rightarrow \text{v } S_2 \text{ žádná změna} \Rightarrow S_2 = T_{G.e}$$

D) e není most – hranu smažeme

- velikost/počet komponent se nezmění ⇒ rank stejný
- pokud $e \notin F$, tak se nulita nezmění

$\Big\}\ S_1 = T_{G-e}$

Celkem: B & C ⇒ 2 , A & D ⇒ 3 , C & D ⇒ 4

Vlastnosti Tutteova polynomu

① $T_G(1,1) = \#$ koster grafu G → ! $0^0 := 1$

$$T_G(1,1) = \sum_{F \subseteq E} 0^{r(E)-r(F)} \cdot 0^{n(F)} = \left|\{F \subseteq E \mid r(E)=r(F) \ \& \ n(F)=0\}\right|$$

$r(E) = r(F) \iff F$ je spanning edge set
$n(F) = 0 \iff F$ je forrest
$\Big\}$ F je spanning forrest

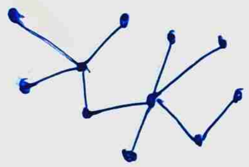
② $T_G(1,2) = \#$ spanning podgrafů → stačí $r(E) = r(F)$

③ $T_G(2,1) = \#$ acyklických podgrafů

④ $T_G(2,2) = 2^{|E(G)|}$ → $\sum_{F \subseteq E} 1 \cdot 1 = \# F \subseteq E = |2^E| = 2^{|E|}$

Úlohy

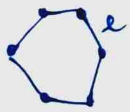
① Tutteův polynom stromu na n vrcholech – T_n



→ mají listové hrany – všechny jsou mosty

$$T_{T_n} = x T_{T_{n-1}} = \ldots = x^{|E|} = \underline{\underline{x^{n-1}}}$$

② Tutteův polynom kružnice – C_n, $n \geq 3$



→ e není ani most ani smyčka

cesta na n vrcholech = strom

$$T_{C_n} = T_{C_n - e} + T_{C_n . e} = T_{P_n} + T_{C_{n-1}} = x^{n-1} + T_{C_{n-1}}$$

Base case: $T_{\triangledown} = T_{\vee} + T_{\circ} = x^2 + T_{|} + T_{\circ} = x^2 + x + y$

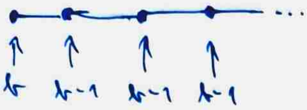
$$\Rightarrow \text{celkem } T_{C_n} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + y$$
$$= x(1 + x + \ldots + x^{n-2}) + y$$
$$= \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} \cdot x + y = \underline{\underline{y + \frac{x^n - x}{x - 1}}}$$

CHROMATICKÝ POLYNOM

Def: Pro multigraf G definujme fci $\chi_G(k) :=$ # vrcholových obarvení pomocí barev $\{1, \dots k\}$

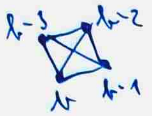
Příklady

- **Cesta P_n**



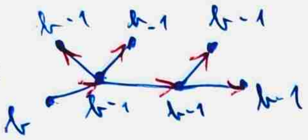
$\chi_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$

- **Úplný graf K_n**



$\chi_{K_n}(k) = k^{\underline{n}}$

- **Strom T_n**



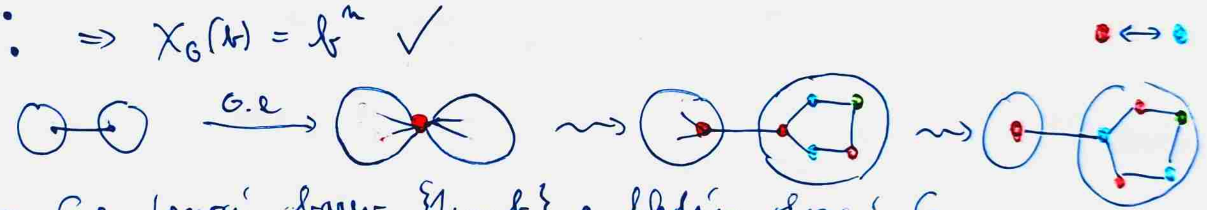
$\chi_{T_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$

Tvrzení: Funkce χ_G splňuje rekurzi:

1. $E(G) = \emptyset \Rightarrow \chi_G(k) = k^{|V(G)|}$
2. $e \in E$ je most $\Rightarrow \chi_G(k) = (k-1)\,\chi_{G.e}(k)$
3. $e \in E$ je smyčka $\Rightarrow \chi_G(k) = 0$
4. $e \in E$ jinak $\Rightarrow \chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G.e}(k)$

Důkaz:

1. $E = \emptyset$: $\therefore$ $\Rightarrow \chi_G(k) = k^n$ ✓
2. e je most

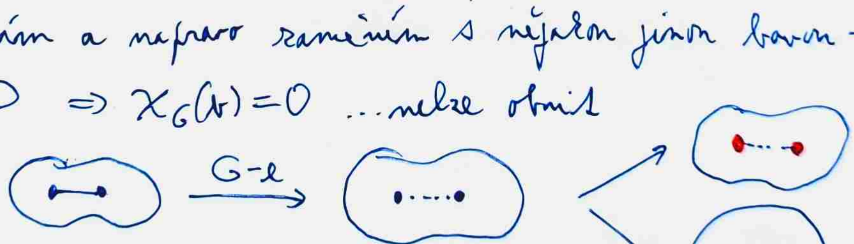


↳ obarvím $G.e$ pomocí barev $\{1, \dots k\}$ a hledám obarvení G

→ po roztáhnutí v.e zpět na e musím přebarvit jeden z těch vrcholů

→ nalevo nechám a napravo zaměním s nějakou jinou barvou → $k-1$ možností

3. e je smyčka  $\Rightarrow \chi_G(k) = 0$ … nelze obarvit
4. e není ani jedno



→ obarvím $G-e$, $e = xy$

$b(x) = b(y) \Rightarrow$ vrcholy lze sjednotit $\sim G.e$

$b(x) \neq b(y) \Rightarrow$ lze sám přidat e $\sim G$

$\Big\}\ \chi_{G-e} = \chi_G + \chi_{G.e}$ ■

Věta: Pro $\forall$ graf G velikosti n je $\chi_G(k)$ polynom stupně nejvýše n s celočís. koef.

Dk: Pokud v G je smyčka $\Rightarrow \chi_G(k) = 0$

Jinak mažu hrany a vznikne mi nějaký strom výrazu, kde listy jsou buď

a) k^n … kvůli ① b) 0 … kvůli ③

a vnitřní vrcholy obsahují pravidla ② a ④ ■

Věta: Chromatický polynom lze vyjádřit pomocí Tutteova polynomu jako

$$\chi_G(k) = (-1)^{r(G)} \cdot k^{k(G)} \cdot T_G(1-k, 0) \quad =: \tilde{T}_G(k)$$

Dk: Indukcí podle # hran

→ **base case**: $E(G) = \emptyset$: $\chi_G(k) = k^{|V(G)|} = k^{k(G)}$

$\tilde{T}_G(k) = (-1)^0 \cdot k^{k(G)} \cdot 1 = k^{k(G)}$ ✓

→ nechť $e \in E$, nastane jedna ze tří situací & note: pro $G.e$, $G-e$ platí I.P.

① **e je most**: $\chi_G(k) = (k-1)\,\chi_{G.e}(k) = (k-1) \cdot (-1)^{r(G.e)} \cdot k^{k(G.e)} \cdot T_{G.e}(1-k,0)$

$= (k-1) \cdot (-1)^{r(G)-1} \cdot k^{k(G)} \cdot T_{G.e}(1-k,0) = (-1)^{r(G)} \cdot k^{k(G)} \cdot T_G(x,y)$ ✓

e most $\Rightarrow T_G(x,y) = x \cdot T_{G.e}(x,y)$

② **e je smyčka**: $\chi_G(k) = 0$, $\quad T_G(1-k,0) = \overset{0}{y} \cdot T_{G.e}(1-k,0) = 0$ ✓

③ **e není ani jedno**: $T_G(x,y) = T_{G-e}(x,y) + T_{G.e}(x,y)$

$$\chi_G(k) = \chi_{G-e}(k) - \chi_{G.e}(k) = \tilde{T}_{G-e}(k) - \tilde{T}_{G.e}(k) = (-1)^{r(G)} \cdot k^{k(G)} \cdot T_G(1-k,0)$$

$$\tilde{T}_{G-e}(k) = (-1)^{r(G-e)} k^{k(G-e)} \cdot T_{G-e}(1-k,0) = (-1)^{r(G)} k^{k(G)} \cdot \left(T_G(1-k,0) - T_{G.e}(1-k,0)\right)$$

$$\tilde{T}_{G.e}(k) = (-1)^{r(G)-1} k^{k(G)} \cdot T_{G.e}(1-k,0) = -(-1)^{r(G)} k^{k(G)} \cdot T_{G.e}(1-k,0)$$

∎

Formální mocninné řady

Def: Pro posloupnost čísel $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ definujeme formální mocninnou řadu FMŘ jako zápis $A(x) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Fakt: Množina všech reálných FMŘ značená $\mathbb{R}[[x]]$ tvoří komutativní okruh

→ neutrální prvek pro +: $0 + 0x + 0x^2 + \dots$

→ neutrální prvek pro $\cdot$: $1 + 0x + 0x^2 + \dots$

→ opačná hodnota pro +: $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} -a_i x^i$

Tvrzení: Multiplikativní inverz $B(x) = 1/A(x)$ existuje $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$, a pak je jednoznačný.

Dk: řešíme rovnici $A(x) \cdot B(x) = 1 \Rightarrow a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = 1/a_0$

$$\forall n \geq 1 : [x^n]\, A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \Rightarrow b_n = -\frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

∎

Věta: Skládání FMŘ $A(B(x))$ je definované intuitivně a je volichní $\Leftrightarrow$

① pokud je A polynom ... $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0): a_n = 0$

$$A(B(x)) = a_0 B(x)^0 + a_1 B(x)^1 + \dots + a_{n_0-1} B(x)^{n_0-1}$$

② pokud je $b_0 = 0$

→ sice nekonečně mnoho sčítanců, ale $[x^k]\, A(B(x))$ je pro $\forall k$ konečné

☼ pro $\forall n > k$ je $[x^k]\, B(x)^n = 0$

Obyčejné generující fce

Def: Kombinatorická struktura je dvojice $(\mathcal{G}, |\cdot|)$, kde $\mathcal{G}$ je množina a $|\cdot| : \mathcal{G} \to \mathbb{N}_0$ je fce t.ž. $\forall n$ je jen konečně mnoho prvků velikosti n.

ground set

size function

↳ $\mathcal{G}_n$ je konečná

Značení: $\mathcal{G}_n := \{\alpha \in \mathcal{G} \mid |\alpha| = n\}$, $a_n := |\mathcal{G}_n|$

Def: Obyčejná generující fce (OGF) struktury $\mathcal{G}$ je

$$OGF(\mathcal{G}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{G}} x^{|\alpha|} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

☼ $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow OGF(\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B}) = OGF(\mathcal{A}) + OGF(\mathcal{B})$

☼ $OGF(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = OGF(\mathcal{A}) \cdot OGF(\mathcal{B})$, $|(\alpha, \beta)| = |\alpha| + |\beta|$ ... skalární součin

Příklady:

① Jídelní lístek: hlavní jídla $H = \{$Guláš : 300, Řízek : 400, Rizoto : 600$\}$; polévky $P = \{$Vývar : 100, Kulajda : 150$\}$

$$\left.\begin{aligned} OGF(H) &= x^{300} + x^{400} + x^{600} \\ OGF(P) &= x^{100} + x^{150} \end{aligned}\right\} \quad OGF(J) = OGF(H) + OGF(P)$$

→ ceny jednoho celého oběda: $OGF(H) \cdot OGF(P)$

→ ceny zakoupení právě k jídel: $OGF(J)^k$

→ ceny všech možných nákupů – může koupit jakoukoli kombinaci jídel

$$OGF(Seq(J)) = 1 + OGF(J) + OGF(J)^2 + \dots = \frac{1}{1 - OGF(J)}$$

↳ člen součtu $15 \cdot x^{1050}$ ... existuje 15 způsobů jak utratit 1050 Kč.

(2) Přirozené číslo n je ve tvaru $n = p^2 \cdot q^3$, p, q prvočísla

a) kolik dělitelů má n? $1, p, p^2$, $1, q, q^2, q^3$ $\to 3 \cdot 4 = 12$

b) kolik je součet dělitelů? $(1+p+p^2)(1+q+q^2+q^3)$

c) $T(d) :=$ # dělitelů čísla d ... $T(6) = 4$ $\Rightarrow \sum_{d|n} T(d) = ?$

$$\sum_{d|n} T(d) = (1+2+3)(1+2+3+4) = 6 \cdot 10 = 60$$

(3) Generující fce stringu písmen

$$\text{MATH} \longrightarrow \underset{M}{(1+x)}\,\underset{A}{(1+x)}\,\underset{T}{(1+x)}\,\underset{H}{(1+x)} = (1+x)^4$$

$$\text{SEQUENCES} \longrightarrow \underset{S}{(1+x+x^2)}\,\underset{E}{(1+x+x^2+x^3)}\,\underset{Q,U,N,C}{(1+x)^4}$$

$[x^n] f$ = # způsobů jak ze stringu vybrat n-tici písmen, nezáleží na pořadí

$$\text{ABBA} \xrightarrow{n=3} \text{ABB},\ \text{AAB}$$

Exponenciální generující fce

Def: Labeled komb. struktura je množina $\mathcal{G}$ t.ž. $\forall \alpha \in \mathcal{G}$ má konečný vertex set $V(\alpha) \subseteq \mathbb{N}_0$ a

(1) pro $\forall$ konečnou $V \subseteq \mathbb{N}_0$ $\exists$ konečně mnoho $\alpha \in \mathcal{G}$ t.ž. $V(\alpha) = V$

(2) pro $\forall\, V, W \subseteq \mathbb{N}_0$, $|V| = |W|$ platí: $|\{\alpha \in \mathcal{G} \mid V(\alpha) = V\}| = |\{\alpha \in \mathcal{G} \mid V(\alpha) = W\}|$

↳ tedy nezáleží na pojmenování vrcholů

Def: Exponenciální generující fci EGF definujeme jako

$$EGF(\mathcal{G}) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, \quad a_n := |\{\alpha \in \mathcal{A} \mid V(\alpha) = [n]\}|$$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow EGF(\mathcal{A} \dot\cup \mathcal{B}) = EGF(\mathcal{A}) + EGF(\mathcal{B})$

$EGF(\mathcal{A}) \cdot EGF(\mathcal{B}) = \sum_n c_n \frac{x^n}{n!}$, kde c_n = # dvojic (α, β), kde $V(\alpha)$ a $V(\beta)$ tvoří rozklad $[n]$

↳ $\frac{c_n}{n!} = \sum_k \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \Rightarrow c_n = \sum_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$

$EGF(\mathcal{A})^k = \sum_n d_n \frac{x^n}{n!}$, kde d_n = # k-tic $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, kde $\{V(\alpha_i)\}_i$ tvoří rozklad $[n]$

! důležité: $a_0 = 0$, jinak více α_i může být stejných – nic nepřispívají do $[n]$

$\Rightarrow \frac{1}{k!} EGF(\mathcal{A})$ ... $\frac{d_n}{k!}$ = # množin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ kde $\{V(\alpha_i)\}_i$ tvoří rozklad $[n]$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{EGF(\mathcal{A})^k}{k!} = \sum_n s_n \frac{x^n}{n!}$, kde s_n = # množin $\{\alpha_i\}_i$ kde $\{V(\alpha_i)\}_i$ tvoří rozklad $[n]$

Příklad: počítáme lesy na n vrcholech

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{x^n}{n!}$, s_n = # stromů na n vrcholech = n^{n-2}

$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \frac{x^n}{n!}$, k_n = # kružnic na n vrcholech

→ $[x^n]\, S(x)\cdot K(x)$ = # grafů na n vrcholech s $\overbrace{2}^{\text{labeled}}$ komp., kde $\begin{cases} \text{1. komp.: strom} \\ \text{2. komp.: kružnice} \end{cases}$

→ $[x^n]\, S(x)^2$ = # grafů na n vrcholech s $\overbrace{2}^{\text{labeled}}$ komp., kde $\begin{cases} \text{1. komp.: strom} \\ \text{2. komp.: strom} \end{cases}$

→ $[x^n]\, \frac{S(x)^2}{2!}$ = # grafů na n vrcholech s 2 komp., kde obě jsou strom

→ $[x^n]\, \frac{S(x)^k}{k!}$ = # grafů na n vrcholech s k komp., kde všechny jsou stromy

→ $[x^n] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S(x)^k}{k!} = [x^n] \exp(S(x))$ = # lesů na n vrcholech

↳ komponent můžeme mít kolik chci, ale

① všechny to musí být stromy

② dohromady musí mít n vrcholů

BURNSEIDOVO LEMMA

Def: Grupa Γ je množina s bin. operací $\circ$ t.ž.

i) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

ii) $\exists\, 1 \in \Gamma: \ a \circ 1 = 1 \circ a = a$

iii) $\forall a\ \exists a^{-1}: \ a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1$

Příklady konečných grup

- permutace množiny $[n]$ se skládáním
- grafy na množině V se sym. rozdílem hran
- automorfismy grafu G

$Aut(G)$ $\uparrow$ $\quad V(G)$ $\uparrow$

Def (akce grupy): Nechť A je množina, Γ grupa, potom akce Γ na A je bin. operace $\bullet\ \Gamma \times A \to A$ t.ž.

i) $\forall x \in A: \ 1_\Gamma \bullet x = x$

ii) $\forall \gamma, \delta \in \Gamma: \ \gamma \bullet (\delta \bullet x) = (\gamma \cdot \delta) \bullet x$

Intuice: Automorfismus někam zobrazí vrchol
Permutace někam přesune prvek

$\gamma \bullet x = y \iff x = \gamma^{-1} \bullet y \quad \dots \quad \Rightarrow: \ \gamma^{-1} \bullet y = \gamma^{-1} \bullet (\gamma \bullet x) = (\gamma^{-1} \cdot \gamma) \bullet x = x$

Def Množina pevných bodů pro $\gamma \in \Gamma$ je $Fix(\gamma) := \{x \in A \mid \gamma \bullet x = x\}$

Def: Stabilizátor pro $x \in A$ je $Stab(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \bullet x = x\}$

$Fix(1_\Gamma) = A, \quad \forall x: \ 1_\Gamma \in Stab(x)$

$\gamma \in Stab(x) \iff x \in Fix(\gamma) \iff x = \gamma \bullet x$

Tvrzení: $Stab(x)$ je podgrupa grupy Γ

Dk: asociativita se dědí, neutrální prvek tam je $\because 1_\Gamma \in Stab(x)$

inverzní prvek: $\gamma \bullet x = x \Rightarrow \gamma^{-1} \bullet x = \gamma^{-1} \bullet (\gamma \bullet x) = (\gamma^{-1} \cdot \gamma) \bullet x = x$ ✓

uzavřenost: $\gamma, \delta \in Stab(x)$, chceme $\gamma \circ \delta \in Stab(x)$

$$\left.\begin{matrix} \gamma \bullet x = x \\ \delta \bullet x = x \end{matrix}\right\} (\gamma \circ \delta) \bullet x = \gamma \bullet (\delta \bullet x) = \gamma \bullet x = x \quad ✓$$

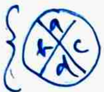
Def (orbita): Prvky $x, y \in A$ jsou ekvivalentní (vůči akci $\bullet$ grupy Γ) $\equiv$

$$\exists \gamma \in \Gamma : \gamma \bullet x = y \quad \dots \quad x \sim_\Gamma y$$

Orbita je třída ekvivalence $\sim_\Gamma$. Množina všech orbit je A/Γ

Značení: $[x]_\Gamma := \{\gamma \bullet x \mid \gamma \in \Gamma\}$ ... orbita obsahující x

Příklad: koláčky

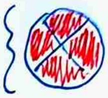
$K = \{$  $\mid a, b, c, d \in \{T, P, M\}\}$, $\Gamma = \{1_\Gamma, \dots\}$

Stab() $= \{1_\Gamma, \dots\}$

Stab() $= \Gamma$

Stab() $= \{1_\Gamma\}$

$\mathrm{Fix}(1_\Gamma) = K$

Fix( ) $= \{$  $\mid \bullet \in \{T, M, P\}\}$

Fix( ) $= \{$  $\mid \bullet, \bullet \in \{T, M, P\}\}$

Lemma (o orbitě a stabilizátoru): Nechť Γ je konečná grupa s akcí $\bullet$ na A, potom

$$\forall x \in A : \quad |\mathrm{Stab}(x)| \cdot |[x]_\Gamma| = |\Gamma|$$

Dk: Nechť x je dané a definujme $\mathrm{Map}(y) := \{\gamma \mid \gamma \bullet x = y\}$

$$|\Gamma| \overset{(*)}{=} \sum_{y \in [x]} |\mathrm{Map}(y)| \overset{(+)}{=} \sum_{y \in [x]} |\mathrm{Stab}(x)| = |[x]| \cdot |\mathrm{Stab}(x)|$$

(*): $\geq$: $\forall \gamma \in \Gamma$ je v nejvýše jedné $\mathrm{Map}(y)$ ... protože nejde $\gamma \bullet x = y_1 \neq y_2$

$\leq$: $\forall \gamma \in \Gamma$ je v nějaké $\mathrm{Map}(y)$ ... $\forall \gamma$: $\gamma \bullet x \in [x]$ $\to$ vezmu $y := \gamma \bullet x$

(+) $y \in [x] \Rightarrow |\mathrm{Map}(y)| = |\mathrm{Stab}(x)|$ ... nechť $y = \delta \bullet x$ $\because$ $y \in [x]$

$\leq$: $\gamma \bullet x = y \Rightarrow \gamma \bullet x = \delta \bullet x \Rightarrow (\delta^{-1} \circ \gamma) \bullet x = x$ ... vyrobil jsem stab

$\geq$: $\gamma \bullet x = x \Rightarrow \delta \bullet (\gamma \bullet x) = \delta \bullet x = y \Rightarrow (\delta \circ \gamma) \bullet x = y$ ... vyrobil jsem mapu

Věta (Burnsideovo lemma 1897, Cauchy (1845) - Frobeniova (1887) formule):

Nechť Γ je konečná grupa s akcí $\bullet$ na A, potom

① Jednodušší verze: $|A/F| = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\mathrm{Fix}(\gamma)|$ ... # orbit = průměr velikosti Fix

② Nechť w přiřazuje orbitám váhy: $w : A/F \to R$ ← okruh

$$\sum_{\sigma \in A/\Gamma} w(\sigma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(\gamma)} w([x])$$

... celková váha orbit je průměrná váha orbit Fix

Věta: Nechť Γ je konečná grupa s akcí $\bullet$ na A.

Nechť má každá orbita σ váha $w(\sigma) \in$ Okruh. Potom

$$\sum_{\sigma \in A/\Gamma} w(\sigma) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{g \in \Gamma} \sum_{x \in Fix(g)} w([x]) =: \frac{1}{|\Gamma|} \cdot S$$

Dk: Počítání dvěma způsoby ... místo Fix použijem Stab

$$S = \sum_{\substack{(g,x)\\ g \bullet x = x}} w([x]) = \sum_{x \in A} \sum_{g \in Stab(x)} w([x]) =$$

idea: spočítáme to efektivněji

$$= \sum_{\sigma \in A/\Gamma} \sum_{x \in \sigma} \sum_{g \in Stab(x)} = \sum_{\sigma} \sum_{x \in \sigma} |Stab(x)| \cdot w(\sigma)$$

použijeme lemma: $$= \sum_{\sigma} \sum_{x \in \sigma} \frac{|\Gamma|}{|\sigma|} \cdot w(\sigma) = |\Gamma| \cdot \sum_{\sigma} \frac{1}{|\sigma|} \sum_{x \in \sigma} w(\sigma) = |\Gamma| \cdot \sum_{\sigma} w(\sigma)$$ ▨

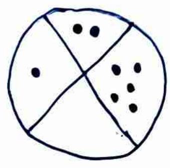
Příklad: Zpět ke kolíčkům $\to$ rotací nedostanu nový typ kolíčku

$\to$ # orbitů K s akcí Γ = # různých variant kolíčků co jde vyrobit

g	1_Γ		
$Fix(g)$	$3^4 = 81$	3	$3 \cdot 3 = 9$

... # orbitů $= \frac{1}{4}(81 + 3 + 3 + 9) = 24$

Příklad: rozinkové kolíčky



$R = \{ (a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}_0 \}$

cíl: generující fce $A(x) = \sum a_n x^n$, kde a_n = # variant kolíčků s n rozinkách = # orbit kolíčků s n rozinkách

↳ $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 3, \dots$

myšlenka: Burnside s váhami – recall: váha $\in$ Okruh & $R[[x]]$ tvoří okruh

$w([k]) := x^{\#\text{ rozinek kolíčku v } g}$ $\quad \to \quad w([\ ]) = x^3$

$\Rightarrow$ pro $\forall g \in \Gamma$ musíme najít $\sum_{x \in Fix(g)} w([x])$

- $g = 1_\Gamma \Rightarrow Fix(g) = K \sim (a, b, c, d) \Rightarrow \sum_{a,b,c,d \in \mathbb{N}_0} x^{a+b+c+d} = \left(\sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^a \right)^4 = \frac{1}{(1-x)^4}$
- $g = \ ;\ \Rightarrow Fix(g) \sim (a, a, a, a) \Rightarrow \sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^{4a} = \frac{1}{1-x^4}$
- $g = \ \Rightarrow Fix(g) \sim (a, b, a, b) \Rightarrow \sum_{a,b \in \mathbb{N}_0} x^{2a+2b} = \left(\sum_{a \in \mathbb{N}_0} x^{2a} \right)^2 = \frac{1}{(1-x^2)^2}$

Burnside: $A(x) \overset{👁}{=} \sum_{\sigma \in K/\Gamma} w(\sigma) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-x)^4} + 2 \cdot \frac{1}{1-x^4} + \frac{1}{(1-x^2)^2} \right)$

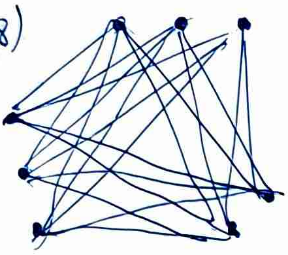
EXTREMÁLNÍ TEORIE

Def: Pro graf H je $ex(n,H) :=$ max. m t.ž. $\exists G \begin{cases} |V|=n \\ |E|=m \end{cases}$ t.ž. H není podgraf G.

- $ex(n, K_3) = |E(K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor})| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \in \Theta(n^2)$
- $ex(n, C_4) \in O(n\sqrt{n})$ ... viz kombinatorika 1

Def (Turán graph): Pro $k, n \in \mathbb{N}$ je $T_k(n)$ úplný k-partitní graf na n vrcholech, jehož všechny partity mají velikost $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ nebo $\lceil \frac{n}{k} \rceil$. Označíme $t_k(n) := |E(T_k(n))|$.

$T_3(8)$



k-partitní $\iff$ k-obarvitelný

$\forall k \geq 2: ex(n, K_k) \geq t_{k-1}(n) \because K_k \nsubseteq T_{k-1}(n)$

Věta: $\forall k \geq 2: ex(n, K_k) = t_{k-1}(n)$

Lemma 1: Každý k-partitní graf na n vrcholech má nejvýše $t_k(n)$ hran.

Intuice: $T_k(n)$ vyrobí partity nejefektivněji – všechny "skoro stejnou" velikost.

Dk: Nechť $G = (P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k, E)$ je k-partitní, búno $|P_1| \leq |P_2| \leq \dots \leq |P_k|$.

$\to$ pokud $|P_k| \leq |P_1| + 1$, potom $G \cong T_k(n)$ ... hotovo

$\to$ jinak pro spor nechť $|P_k| \geq |P_1| + 2$ $\to$ idea: vrchol z P_k přesuneme do P_1

$\Rightarrow$ nechť $x \in P_k$ a vyrobíme G' s partitami $P_1 \cup \{x\}, P_2, \dots P_k - \{x\}$

- stupně pro $P_2, \dots P_{k-1}$ se nemění – vrcholy stále vidí x, jen je jinde
- stupeň pro $y \in P_1$ klesne o 1
- stupeň pro $y \in P_k - \{x\}$ vzroste o 1
- stupeň pro x vzroste alespoň o 1 : x přestane vidět P_1, začne vidět $P_k - \{x\}$

$\Rightarrow$ celkem změna deg $\geq -|P_1| + |P_k| - 1 + 1 \geq 2$ $\Rightarrow$ vznikla hrana navíc ■

Lemma 2: Nechť $G=(V,E)$ neobsahuje K_k jako podgraf. Potom $\exists H = (V, E_H)$, který je $(k-1)$-partitní t.ž. $\forall x \in V: deg_H(x) \geq deg_G(x)$ ... a tudíž $|E(H)| \geq |E(G)|$.

Intuice: Pro $ex(n, K_k)$ jsou $(k-1)$-partitní grafy nejlepší

Dk: Indukcí podle k. Base case: $k=2 \Rightarrow G$ nemá hrany $\Rightarrow G$ je 1-partitní ✓

Pro $k \geq 3$ nechť $K_k \nsubseteq G$ a nechť $x \in V(G)$ je vrchol s max. deg.

$\Rightarrow$ označme $S := N_G(x)$ ... sousedé ... a zkoumejme $G[S]$

$G[S]$ neobsahuje K_{k-1}, jinak $K_k \subseteq G$ $\Rightarrow$ I.P. nám dá $(k-2)$-partitní $H_S = (S, E_{H_S})$

$\Rightarrow$ vyrobíme H tím, že do H_S přidám vrcholy $V \setminus S$ jako poslední (úplnou) partitu

① $y \in V \setminus S$: $deg_H(y) = |S| = deg_G(x) \geq deg_G(y)$ ② $y \in S$: $deg_H(y) = deg_{H_S}(y) + |V \setminus S| \overset{I.P.}{\geq} deg_{G_S}(y) + |V \setminus S| \geq deg_G(y)$

Věta (Turán, 1941): Pro $\forall r \geq 2$: $ex(n, K_r) = t_{r-1}(n)$

Poznámka: $t_r(n) = \frac{r-1}{r}\binom{n}{2} + O(n) = \frac{r-1}{2r} n^2 + O(n)$

Důkaz: Nechť G je graf co neobsahuje K_r

→ podle pozorování výše víme, že $T_{r-1}(n)$ funguje $\Rightarrow ex(n, K_r) \geq t_{r-1}(n)$

→ lemma 2: $\exists$ $(r-1)$-partitní H t.ž. je lepší než G

→ lemma 1: $T_{r-1}(n)$ je alespoň stejně dobrý jako H $\Rightarrow ex(n, K_r) \leq t_{r-1}(n)$ ∎

Extremální teorie pro minory

Def: Pro graf H je $ex_{\leq}(n, H) :=$ max. m t.ž. $\exists G$ $\left(|V| = n,\ |E| = m\right)$ t.ž. H není minorem G.

- $ex_{\leq}(n, K_3) = n - 1$ ... dostáváme acyklické grafy $\Rightarrow$ lesy

$ex_{\leq}(n, H) \leq ex(n, H)$ ... $H \not\leq G \Rightarrow H \not\subseteq G$

Věta: Pro $\forall r \geq 3$ existuje $\alpha_r > 0$ t.ž. $\forall n$: $ex_{\leq}(n, K_r) < \alpha_r \cdot n$

Intuice: Grafy, kterým zakážeme K_r jako minor mají lineární počet hran

Důkaz: ukážeme pro $\alpha_r = 2^{r-3}$, indukcí podle r

- base case: $r = 3 \Rightarrow$ lesy a víme $ex_{\leq} = n - 1$ ... $\alpha_3 = 1 = 2^0$ ✓
- $r > 3$ → spor

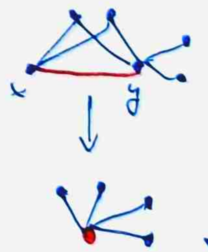
→ nechť $\exists G = (V, E)$, $K_r \not\leq G$, ale $|E| \geq \alpha_r \cdot |V|$

↳ ze všech těchto grafů vybereme ten s minimálním $|V| + |E|$

pokud $G' < G$, tak $|E(G')| < \alpha_r \cdot |V(G')|$, jinak bychom zvolili G' (*)

Pomocné tvrzení (**): $\forall e = xy \in E$ platí $|N_G(x) \cap N_G(y)| \geq \alpha_r$

Dk: Podívám se na $G' := G.e$ ... mám 2 nerovnosti



- $|E| \geq \alpha_r |V|$ ... G je protipříklad
- $|E'| < \alpha_r |V'|$ ... $G' < G$, tedy není protipříklad $\because$ (*)

$\Rightarrow |E| - |E'| > \alpha_r |V| - \alpha_r |V'| = \alpha_r(|V| - |V'|) = \alpha_r$

Navíc $|E| - |E'| = 1 + |N(x) \cap N(y)|$ ... zanikají hrany do společných sousedů

celkem máme žádanou nerovnost

Nyní vyberu libovolný $x \in V(G)$, $\deg_G(x) \geq 1$, $S := N_G(x)$, $G_S := G[S]$

$K_{r-1} \not\leq G_S$, jinak po přidání x a jeho hran máme $K_r \leq G$ ... ↯

👁 podle (**) použité na x, pro $\forall y \in S$: $|N_G(x) \cap N_G(y)| \geq \alpha_k$

↳ ale všichni sousedé x leží v S $\Rightarrow |N_{G_S}(x) \cap N_{G_S}(y)| \geq \alpha_k$

$\Rightarrow$ tedy $\deg_{G_S}(y) \geq \alpha_k$

$$|E(G_S)| = \frac{1}{2}\sum \deg \geq \frac{1}{2}\cdot|V(G_S)|\cdot \overset{2^{k-3}}{\overset{\parallel}{\alpha_k}} = \alpha_{k-1}\,|V(G_S)|$$

! Ale jelikož $K_{k-1} \not\subseteq G_S$, tak podle I.P. je $|E(G_S)| < \alpha_{k-1}\cdot|V(G_S)|$ ↯ ∎

Note: Odhad byl dost hrubý, dokonce platí $\alpha_k \in O(k \log k)$.

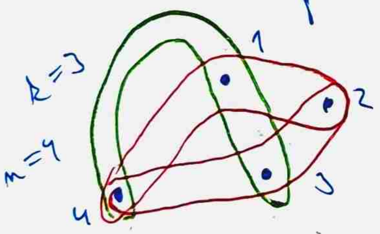
Pronikající systémy množin

Def: k-uniformní hypergraf je dvojice (V, E), kde $E \subseteq \binom{V}{k}$.

Def: Množinový systém E je pronikající systém množin $\equiv \forall e, f \in E: e \cap f \neq \emptyset$

Def: Pro $k \geq 2$ definujeme $f(k,n) :=$ max. m t.ž. $\exists$ k-unif H $\begin{cases} |V| = n \\ |E| = m \end{cases}$, E je PSM.

- $n < k$: $f(k,n) = 0$ ... neumíme vyrobit hrany
- $k \leq n < 2k$: $f(k,n) = \binom{n}{k}$ ... když vezmeme úplný graf, tak E je PSM
- $n \geq 2k$: $f(k,n) \geq \binom{n-1}{k-1}$ ... slunečnicová konstrukce



$$E := \left\{ e \cup \{n\} \;\middle|\; e \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\}$$

Věta: $f(k,n) = \binom{n-1}{k-1}$

Def: Cyklické pořadí množiny $[n]$ je nějaká 1-cyklová permutace prvků $[n]$

→ k-intervaly cyklického pořadí C jsou k-prvkové $A \subseteq [n]$ obsahující po sobě jdoucí prvky C

Příklad: $C = (3,1,5,4,2,7,6,8)$ je c.p. $[8]$, její 3-intervaly jsou 315, 154, 542, 427, 276, 768, 683, 831

👁 #cyklických pořadí $[n]$ je $(n-1)!$ ... $\frac{n!}{n}$ → musím zvolit první prvek

↳ $(3,2,4,1) \sim (1,3,2,4)$

👁 pro $\forall k$: #k-intervalů je n

Věta (Erdős-Ko-Rado): Pro $n \geq 2k$ platí $f(k,n) = \binom{n-1}{k-1}$.

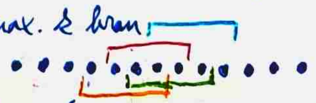
Dk: Nechť $E \subseteq \binom{[n]}{k}$ je PSM pro $n \geq 2k$, důkaz počítáním dvěma způsoby

$\Rightarrow$ budeme počítat #dvojic (C, e), kde C je c.p. $[n]$ a $e \in E$ je interval C

① vezmu $e \in E$ a chci vytvořit C: e zpermutuji $k!$ způsoby a $V \setminus e$ $(n-k)!$ způsoby

$\Rightarrow$ tohle pro všechny $e \in E$: $\#(C,e) = |E|\cdot k!\cdot(n-k)!$ $\Rightarrow$ max. k hran

② vezmu C: k-intervalů je n, kolik z nich je hranou? E je PSM:



$\Rightarrow$ pro všechny intervaly: $\#(C,e) \leq (n-1)!\cdot k$ $\Rightarrow$ celkem: $|E| \leq \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$. ∎