

Logika

Značení. Logické spojky a kvantifikátory značíme následovně:

- $\neg x$ **negace** není pravda, že platí x
- $x \wedge y$ **konjunkce** platí x a zároveň platí y
- $x \vee y$ **disjunkce** platí x nebo platí y
- $x \Rightarrow y$ **implikace** pokud platí x tak platí také y
- $x \Leftrightarrow y$ **ekvivalence** x platí právě tehdy když platí y
- $(\forall x) \varphi$ **univerzální kvantifikátor** pro všechna x platí formule φ
- $(\exists x) \varphi$ **existenční kvantifikátor** existuje x pro které platí formule φ
- $(\forall x \in M) \varphi$ značí „pro všechna x z množiny M platí φ .“ Obdobně $\exists x \in M$.

Příklad 1 (Exkluzivní OR). Uvažte logickou spojku **exkluzivní disjunkce** (XOR) značenou jako $x \oplus y$. Vyjádřete ji pomocí ostatních logických spojek.

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Pravdivostní tabulka XORu

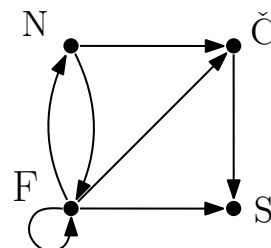
$x \oplus y$ platí právě když platí alespoň jedno z x a y , ale ne obě zároveň.

Výroky

V následujících úlohách uvažíme množinu států:

$$M = \{\text{Francie, Německo, Česko, Slovensko}\}.$$

Výrok „Stát x exportuje víno do státu y .“ budeme zkracovat jako $E(x, y)$. Vztah E je znázorněn na diagramu vpravo.



Příklad 2 (Překládání). Vyjádřete výroky v přirozeném jazyce pomocí matematických symbolů a naopak. Rozhodněte, zda jsou pravdivé, či lživé.

- (a) Slovensko vyváží víno do Francie.
- (b) $(\exists x \in M) : E(\text{Německo}, x)$.

Příklad 3 (Pořadí kvantifikátorů). Vyjádřete následující výroky slovy a určete, zda jsou pravdivé, či lživé.

- (a) $(\forall x \in M)(\exists y \in M) : E(x, y)$.
- (b) $(\forall x \in M)(\exists y \in M) : E(y, x)$.
- (c) $(\exists x \in M)(\forall y \in M) : E(x, y)$.
- (d) $(\exists x \in M)(\forall y \in M) : E(y, x)$.

Příklad 4 (Důkazy). O jiné množině států N jsme zjistili, že splňuje:

$$(1) (\forall x \in N)(\forall y \in N) : E(x, y) \implies \neg E(y, x).$$

$$(2) (\forall x \in N)(\forall y \in N)(\forall z \in N) : E(x, y) \wedge E(y, z) \implies E(x, z).$$

Formulujte podmínky vlastními slovy. Splňuje je i dříve zmíněná množina M ?

(a) Dokažte, že v M neexistuje stát, který exportuje víno sám do sebe.

(b) Dokažte, že v M neexistuje posloupnost států $x_0, x_1, \dots, x_n$ kde $x_0 = x_n$ a platí $E(x_0, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge E(x_{n-1}, x_n)$.

Množiny

Značení. Množinové operace značíme následovně: $A \cup B$ **sjednocení**, $A \cap B$ **průnik**, $A \setminus B$ **rozdíl**. Zápis $\{x \mid \varphi(x)\}$ značí množinu všech prvků splňujících podmínku φ .

Příklad 5 (Formální zápis). Vyjádřete sjednocení, průnik a rozdíl množin A a B pomocí zápisu $\{x \mid \varphi(x)\}$ kde φ nahradíte za vhodnou podmínku.

Příklad 6 (Symetrický rozdíl). **Symetrický rozdíl** $A \Delta B$ definujeme jako množinu všech prvků, které jsou buď v A anebo v B , ale ne v A i B zároveň.

Vyjádřete množinu $A \Delta B$ pomocí operací $\cap, \cup, \setminus$. Nemusíte použít všechny uvedené operace. Zkuste najít alespoň dva způsoby.

Příklad 7 (Podmnožina). Pokud je A **podmnožinou** množiny B , tak píšeme $A \subseteq B$. Vyjádřete tento vztah vhodnou matematickou formulí.

Příklad 8 (Potenční množina). Množinu všech podmnožin množiny A nazýváme její **potenční množinou** a značíme ji jako $\mathcal{P}(A)$ nebo 2^A .

(a) Zapište množinu $\mathcal{P}(A)$ pomocí zápisu $\{x \mid \varphi(x)\}$.

(b) Určete velikost množiny $\mathcal{P}(A)$ za předpokladu, že množina A je konečná.

Hádanky

Příklad 9 (Topinky). Smažíme topinky na pánvi a nechceme plýtvat časem. Opéci jednu stranu topinky trvá 5 minut. Na pánvi se současně vejdou nejvýš dva krajíce. Jak dlouho bude trvat opět 3 krajíce chleba? Jak dlouho n krajíců?

Příklad 10 (Rovnoramenná váha). Máme k dispozici rovnoramennou váhu a 9 mincí. Jedna z mincí je ovšem falešná, což se pozná tak, že je lehčí než ostatní mince, které váží všechny stejně. Na kolik nejméně vážení dokážeme zjistit, která z mincí je falešná?

Příklad 11 (Šachovnice a domino). Máme za úkol pokrýt celou šachovnici rozměrů $n \times n$ dominovými dílky rozměrů 2×1 . Všechny čtyři rohy této šachovnice ovšem chybí. Pro jaká n je možné takové pokrytí najít?