# Konečná Ramseyho věta

- $\binom{A}{n} \coloneqq \{B \subseteq A \,|\, |B| = n\}$ značí množinu všech $n$-prvkových podmnožin množiny $A$.
- **Obarvením** množiny $M$ pomocí $r$ barev máme na mysli rozklad $M = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r$.
- Když pak řekneme, že nějaká podmnožina $A \subseteq M$ je **jednobarevná**, myslíme tím, že $A \subseteq S_j$ pro nějakou barvu $j$.
- **Nezávislá množina** v grafu $G$ je množina vrcholů taková, že žádné dva z nich nejsou spojené hranou. Velikost největší nezávislé množiny v $G$ značíme jako $\alpha(G)$.

**Věta** (Konečná Ramseyho věta)**.** *Pro každou velikost $n$, počet barev $r$ a dimenzi $d$, existuje nějaké dost velké $N$ takové, že když $|A| = N$ a obarvíme $\binom{A}{d}$ pomocí $r$ barev, potom vždy najdeme podmnožinu $B \subseteq A$ velikosti $|B| = n$ takovou, že množina $\binom{B}{d}$ je jednobarevná.*

**Důsledek** (Konečná Ramseyho věta, grafová verze)**.** *Pro každé $n$ existuje nějaké $N$ takové, že každý graf na $N$ vrcholech obsahuje buď kliku velikosti $n$ nebo nezávislou množinu velikosti $n$.*

*Důkaz.* Barvíme dvojice vrcholů červeně, pokud tvoří hranu, a modře, pokud ne. □

**Příklad 1** (Hledáme úplný bipartitní podgraf)**.** Dokažte, že pro každé $k$ existuje $N$ takové, že pro každý graf $G$ na $N$ vrcholech platí, že buď $G$ nebo doplněk $G$ obsahuje $K_{k,k}$ jako podgraf.

**Příklad 2** (Body v rovině)**.** Dokažte, že pro každé $n$ existuje $N$ takové, že libovolných $N$ bodů v rovině obsahuje buď $k$ bodů na přímce nebo $k$ bodů v obecné poloze (žádné tři z nich neleží na stejné přímce). ... *Nápověda.* Použijte Ramseyho větu pro trojice bodů.

**Příklad 3** (Erdősova-Szekeresova věta o bodech v konvexní poloze)**.** Dokažte, že pro každé $n$ existuje $N$ takové, že libovolných $N$ bodů v rovině v obecné poloze obsahuje $n$ bodů, které tvoří vrcholy konvexního polygonu.

*Nápověda.* Nejprve si všimněte, že každých 5 bodů v obecné poloze obsahuje 4 body, které tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku. Poté použijte Ramseyho větu pro čtveřice bodů.

**Příklad 4** (Dobré kvaziuspořádání grafů bez velkých nezávislých množin)**.** Dokažte, že v každé nekonečné posloupnosti grafů $G_1, G_2, G_3, \ldots$ takových, že velikosti jejich nezávislých množin jsou omezené (tedy $(\exists c \in \mathbb{N})(\forall i \in \mathbb{N}) : \alpha(G_i) \leq c$) existují indexy $i < j$ takové, že $G_i \subseteq G_j$.

*Nápověda.* Uvědomte si, že pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|V(G_i)| \leq n$ pro všechna $i$, pak je to jednoduché. V opačném případě pomocí Ramseyho věty najdeme velkou kliku.

# Nekonečná Ramseyho věta

**Věta** (Nekonečná Ramseyho věta)**.** *Pro každou dimenzi $d$, a nekonečnou množinu $A$ platí, že když obarvíme $\binom{A}{d}$ konečným počtem barev, potom vždy najdeme nekonečnou podmnožinu $B \subseteq A$ takovou, že množina $\binom{B}{d}$ je jednobarevná.*

**Důsledek** (Nekonečná Ramseyho věta, grafová verze)**.** *Každý nekonečný graf buď obsahuje nekonečnou kliku nebo nekončnou nezávislou množinu.*

**Příklad 5** (Nekonečná verze věty o dlouhém a širokém)**.** Dokažte, že každá nekonečná částečně uspořádaná množina buď obsahuje nekonečný řetězec nebo nekonečný antiřetězec.

**Příklad 6** (Nekonečná verze Erdősovy-Szekeresovy věty o monotónních posloupnostech)**.** Dokažte, že každá nekonečná lineárně uspořádaná množina buď obsahuje nekonečnou rostoucí nebo nekonečnou klesající posloupnost.