

Modulární aritmetika

- Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ říkáme, že a **dělí** b pokud $\exists r \in \mathbb{Z} : b = a \cdot r$. Píšeme $a \mid b$.
- Čísla $a, b \in \mathbb{Z}$ jsou **kongruentní modulo** n pokud $n \mid (a - b)$. Píšeme $a \equiv b \pmod{n}$.

Příklad 1 (Kongruence jinak). Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní pro $a, b \in \mathbb{Z}$. Abychom ukázali že dvě podmínky jsou ekvivalentní, musíme ukázat, že z první vyplývá druhá, a zároveň, že z druhé vyplývá první.

- (1) $a \equiv b \pmod{n}$.
- (2) $\exists r \in \mathbb{Z} : a = rn + b$ z a lze přejít na b postupným přičítáním (odečítáním) čísla n .
- (3) a i b mají stejný celočíselný zbytek po dělení číslem n .

Příklad 2 (Vlastnosti kongruence). Dokažte základní vlastnosti kongruence z přednášky. Pokud $a \equiv a' \pmod{n}$ a $b \equiv b' \pmod{n}$, potom

- (a) $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$... $10 + 3 \equiv 4 + (-3) \equiv 1 \pmod{6}$
- (b) $a \cdot b \equiv a' \cdot b' \pmod{n}$... $17 \cdot 16 \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{5}$
- (c) $a^k \equiv (a')^k \pmod{n}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$... $10^4 \equiv 1^4 \equiv 1 \pmod{9}$

Příklad 3 (Zbytek po dělení). Kolik je zbytek po dělení čísla 2706 číslem 8? A co číslem 13?

Příklad 4 (Poslední číslice). Najděte poslední číslici čísla 7^{100} .

Kombinatorické počítání

- Faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}$ je číslo $n! = \prod_{k=1}^n k$. Například $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Příklad 5 (Šachoví králové). Kolika způsoby lze rozestavit černého a bílého krále na šachovnici 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali? (Tedy nestáli na sousedních políčkách).

Příklad 6 (Přípitek). Na oslavě sedí okolo velkého kulatého stolu n hostů. Během přípitku si každý s každým ťukne skleničkou. Kolik celkem ťuknutí zazní?

Příklad 7 (Sportovní tým). Třída ve které je 30 studentů si volí 5 reprezentantů na sportovní akci. Kolik různých týmů může vyslat? Co kdyby velikost týmu nebyla nijak omezena?

Příklad 8 (Věž z kostek). Kolik je způsobů, jak postavit věž z 5 zelených, 4 červených a 3 modrých kostek? Kostky jedné barvy jsou vzájemně nerozlišitelné.

Příklad 9 (Pexeso). Kolik různých výchozích pozic má hra Pexeso? Čili kolika způsoby lze do čtverce 8×8 rozložit 64 karet, v nichž je 32 identických párů?

Hádanky

Příklad 10 (Placení mincemi). Dá se každý celočíselný obnos vyplatit dvoukorunami a pětikorunami? Pokud ne, které částky se dají vyplatit a které ne?

Příklad 11 (Dlážďení). Na šachovnici $2^n \times 2^n$ chybí jedno náhodně vybrané políčko. Ukažte, že zbylou plochu vždy lze vydláždit dílky, které mají tvar „L“ zabírající 3 políčka.