

## Kombinatorické počítání

- $k$ -tá klesající mocnina čísla  $n$  je  $n^{\underline{k}} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$ . Například  $20^{\underline{4}} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$ .
- Kombinační čísla či binomické koeficienty jsou čísla ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Reprezentují vybírání  $k$ -prvkových podmnožin množiny  $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

- Multinomické koeficienty jsou čísla ve tvaru

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}, \quad \text{kde } k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Reprezentují rozklady množiny  $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  na  $m$  částí o velikostech  $k_1, k_2, \dots, k_m$ .

**Věta** (Binomická věta). Pro všechna  $x, y \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

**Příklad 1** (Opakování). Označme  $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  a  $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ . Určete

- |                                                 |                                                          |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| (1) počet všech podmnožin $[n]$ .               | (3) počet všech prostých zobrazení $[n] \rightarrow [m]$ |
| (2) počet všech zobrazení $[n] \rightarrow [m]$ | (4) počet všech bijekcí $[n] \rightarrow [m]$            |

*Řešení.* (1)  $2^n$     (2)  $m^n$     (3)  $m^n$     (4)  $n!$  pokud  $n = m$ .

**Příklad 2** (Přesmyčky). Kolik různých (i nesmyslných) slov lze získat přeházením písmen ve slově COCACOLA?

*Řešení.*  $\binom{8}{3,2,2,1} = \frac{8!}{3!2!2!1!} = 1680$ .

**Příklad 3** (Vnořené podmnožiny). Určete počet uspořádaných dvojic  $(A, B)$  kde  $A \subseteq B \subseteq [n]$ .

*Řešení.* Můžu dělat charakteristické funkce což dá  $3^n$ , nebo komb. úvahu což dá  $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$ . Dokázali jsme tedy, že součet této řady je  $3^n$ .

Charakteristické funkce: <https://matematika.reseneulohy.cz/3423/vnorene-podmnoziny>

Kombinatorická úvaha: Pro fixované  $k$  volím podmnožinu  $B \subseteq [n]$  velikosti  $k$ , a poté volím libovolnou podmnožinu  $A \subseteq B$ . Takových voleb je  $\binom{n}{k} \cdot 2^k$ . Když to uděláme pro všechny volby  $k$ , dostaneme sumu výše.

**Příklad 4** (Uvažujeme kombinatoricky). Kombinatorickou úvahou dokažte, že

- |                                                          |                                                |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,                    | ... pravidlo souměrnosti                       |
| (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ , | ... Pascalovo pravidlo                         |
| (c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,                  | ... součet $n$ -té řady Pascalova trojúhelníku |
| (d) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ .  |                                                |

- Řešení.* (a) Nalevo vybírám  $k$ -členný tým z  $n$ -členné skupiny. Napravo vybírám  $(n - k)$  lidí, kteří v tom týmu *nebudou*.
- (b) Nalevo vybírám  $k$ -členný tým z  $n$ -členné skupiny. Napravo nejprve zafixuju jednoho člověka, Pepu, a pak buď
- ze zbylých  $n - 1$  lidí vybírám  $k - 1$  co by s Pepou utvořili  $k$  členný tým. To odpovídá týmům s Pepou.
  - ze zbylých  $n - 1$  lidí vybírám  $k$  co utvoří tým. To odpovídá týmům bez Pepy.
- (c) Napravo mám počet podmnožin  $n$ -prvkové množiny. Nalevo sčítám počty podmnožin fixní velikosti  $k$ .
- (d) Nalevo z  $n$  lidí vyberu  $k$ -členný reprezentační tým, a pak z těch  $k$  volím kapitána. Napravo nejprve vyberu kapitána, a potom z těch zbylých  $n - 1$  lidí volím  $k - 1$  co s ním utvoří tým.

**Příklad 5** (Sestavme si vládu). Kombinatorickou úvahou nebo výpočtem vyjádřete bez použití sumy:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

*Řešení.* Kombinatoricky: vybírám neprázdnou podmnožinu (vládu) a z té volím jednoho reprezentanta (premiéra). Tohle také mohu udělat tak, že nejprve zvolím premiéra ( $n$  možností) a pak ze zbylých  $n - 1$  lidí vyberu kdo bude ve vládě. To je  $2^{n-1}$  možností, takže celkem  $n \cdot 2^{n-1}$ .

Výpočtem  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ .

**Příklad 6** (Starší půlka třídy). Kombinatorickou úvahou dokažte, že

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

*Řešení.* Řešení příště.

**Příklad 7** (Posloupnosti 0 a 1). Kolik existuje posloupností  $n$  nul a  $j$  jedniček takových, že žádné dvě jedničky nejsou vedle sebe?

*Řešení.* Řešení příště.

**Příklad 8** (Sčítáme). Kolik řešení má rovnice  $x_1 + \dots + x_n = c$ , kde  $c$  je dané přirozené číslo,

- (a) v oboru kladných celých čísel  $\mathbb{Z}^+$ , ... musí platit  $c \geq n$
- (b) v oboru nezáporných celých čísel  $\mathbb{Z}_0^+$ .

*Řešení.* Každé řešení této rovnice kde  $x_i$  jsou neáporná celá čísla si můžeme představit tak, že nalevo máme celkem  $c$  jedniček a mezi nimi  $n - 1$  plusek, což se sečte na  $c$ .

- (a) Rozmísťujeme  $n - 1$  plusek mezi  $c$  jedniček, takže  $\binom{c-1}{n-1}$ .
- (b) Nyní pluska mohou být vedle sebe. Celkem napravo máme  $c + n - 1$  znaků ( $c$  jedniček a  $n - 1$  plusek). A z těchto  $c + n - 1$  znaků vybírám  $n - 1$  pozic kam umístím pluska. Odpověď tedy je  $\binom{c+n-1}{n-1} = \binom{c+n-1}{c}$ .

**Příklad 9** (Klasifikace). Máme  $n$  pytlíků s různými druhy skleněnek. Na hru je třeba  $k$  kuliček. Do tabulky níže запиšte počty možných výběrů. *Hint: zkuste použít řešení předchozích úloh.*

|                                              | Nejvýše 1 skleněnka každého druhu | Libovolně mnoho skleněnek každého druhu |
|----------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------|
| Záleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme   |                                   |                                         |
| Nezáleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme |                                   |                                         |

*Řešení.* Řešení příště.

**Příklad 10** (Sportem ku zdraví). Dvanáct kamarádů se dohodlo na hraní volejbalu. Jeden z nich však v průběhu dne musel odejít dodělávat úkoly z diskrétní matematiky. Jak se změní počet způsobů rozdělení do dvou týmů z původních 6 vs 6 na nových 6 vs 5? Bude takový počet poloviční, výrazně menší, nebo dokonce stejný?

*Řešení.* Řešení příště.

**Příklad 11** (Hokejky). Dokažte, že sečtením  $k$ -tých prvků všech řad Pascalova trojúhelníku až po  $n$ -tou řadu získáte  $(k+1)$ -ní prvek  $(n+1)$ -ní řady. Neboli

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

*Řešení.* Řešení příště.