

Kombinatorické počítání

- **k -tá klesající mocnina** čísla n je $n^{\underline{k}} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$. Například $20^{\underline{4}} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$.
- **Kombinační čísla** či **binomické koeficienty** jsou čísla ve tvaru

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Reprezentují vybírání k -prvkových podmnožin množiny $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

- **Multinomické koeficienty** jsou čísla ve tvaru

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}, \quad \text{kde } k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$$

Reprezentují rozklady množiny $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ na m částí o velikostech $k_1, k_2, \dots, k_m$.

Věta (Binomická věta). *Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Příklad 1 (Opakování). Označme $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a $[m] = \{1, 2, 3, \dots, m\}$. Určete

- | | |
|---|--|
| (1) počet všech podmnožin $[n]$. | (3) počet všech prostých zobrazení $[n] \rightarrow [m]$ |
| (2) počet všech zobrazení $[n] \rightarrow [m]$ | (4) počet všech bijekcí $[n] \rightarrow [m]$ |

Příklad 2 (Přesmyčky). Kolik různých (i nesmyslných) slov lze získat přeházením písmen ve slově COCACOLA?

Příklad 3 (Vnořené podmnožiny). Určete počet uspořádaných dvojic (A, B) kde $A \subseteq B \subseteq [n]$.

Příklad 4 (Uvažujeme kombinatoricky). Kombinatorickou úvahou dokažte, že

- | | |
|--|--|
| (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, | ... pravidlo souměrnosti |
| (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, | ... Pascalovo pravidlo |
| (c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, | ... součet n -té řady Pascalova trojúhelníku |
| (d) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$. | |

Příklad 5 (Sestavme si vládu). Kombinatorickou úvahou nebo výpočtem vyjádřete bez použití sumy:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

Příklad 6 (Starší půlka třídy). Kombinatorickou úvahou dokažte, že

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Příklad 7 (Posloupnosti 0 a 1). Kolik existuje posloupností n nul a j jedniček takových, že žádné dvě jedničky nejsou vedle sebe?

Příklad 8 (Sčítáme). Kolik řešení má rovnice $x_1 + \dots + x_n = c$, kde c je dané přirozené číslo,

(a) v oboru kladných celých čísel $\mathbb{Z}^+$, ... musí platit $c \geq n$

(b) v oboru nezáporných celých čísel $\mathbb{Z}_0^+$.

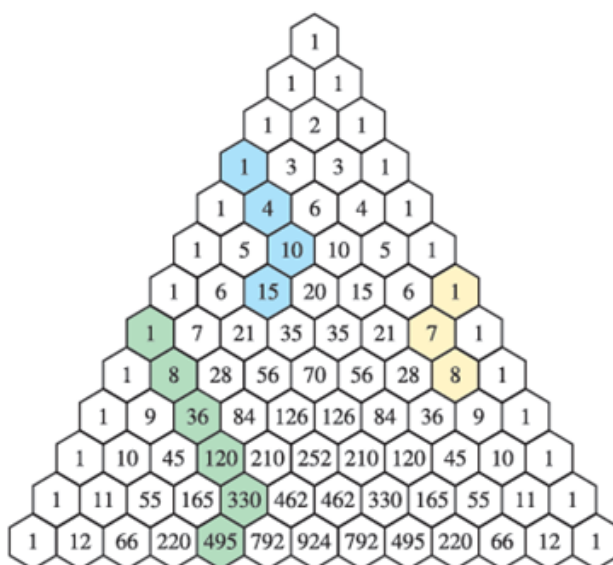
Příklad 9 (Klasifikace). Máme n pytlíků s různými druhy skleněnek. Na hru je třeba k kuliček. Do tabulky níže zapíšte počty možných výběrů. *Hint: zkuste použít řešení předchozích úloh.*

	Nejvýše 1 skleněnka každého druhu	Libovolně mnoho skleněnek každého druhu
Záleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme		
Nezáleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme		

Příklad 10 (Sportem ku zdraví). Dvanáct kamarádů se dohodlo na hraní volejbalu. Jeden z nich však v průběhu dne musel odejít dodělávat úkoly z diskrétní matematiky. Jak se změní počet způsobů rozdělení do dvou týmů z původních 6 vs 6 na nových 6 vs 5? Bude takový počet poloviční, výrazně menší, nebo dokonce stejný?

Příklad 11 (Hokejky). Dokažte, že sečtením k -tých prvků všech řad Pascalova trojúhelníku až po n -tou řadu získáte $(k+1)$ -ní prvek $(n+1)$ -ní řady. Neboli

$$\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$



Obrázek 1: Pascalův trojúhelník se třemi vyznačenými hokejkami.

. Pokud vás baví Pascalův trojúhelník, mám o něm na webu zajímavé povídání:
<https://smolikj.matfyz.cz/papers> hledejte Pascalův trojúhelník (2022)