Zobrazení

- **Zobrazení** z X do Y je libovolná množina $f \subseteq X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující $(x, y) \in f$. Píšeme $f(x) = y$.
- **Složení zobrazení** $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ je zobrazení $g \circ f : X \to Z$ definované pro $x \in X$ jako $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Příklad 1 (Vlastnosti zobrazení)**.** Rozhodněte, co platí.

(a) Jeli $g \circ f$ prosté zobrazení, musí být g prosté? Musí být f prosté?

(b) Jeli $g \circ f$ zobrazení na, musí být g na? Musí být f na?

Řešení. (a) Zobrazení f musí být prosté, ale g nemusí.

(b) Zobrazení g musí být na, ale f nemusí.

Pozorování. *Zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X je prosté, právě tehdy, když je na.*

Příklad 2 (Nekonečna jsou zrádná)**.** Najděte příklad zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které

(a) je na, ale není prosté.

(b) je prosté, ale není na.

Řešení. (a) $f(2n - 1) = f(2n) = n$.

(b) $f(n) = 2n$.

Permutace

- **Permutace** množiny $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ je libovolná bijekce $f : [n] \to [n]$.
- Permutace lze reprezentovat tabulkou, například $\binom{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}{7,8,6,1,9,4,2,5,3,0}$
- Nebo rozkladem na **cykly**: $0 \to 7 \to 5 \to 4 \to 9 \to 0, \quad 1 \to 8 \to 3 \to 1, \quad 2 \to 6 \to 2$.

Příklad 3. Kolik je permutací množiny $[n]$, jejichž rozklad má právě 1 cyklus?

Řešení. Posloupností n prvků je $n!$, ale například cykly $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ a $2 \to 4 \to 3 \to 1 \to 2$ oba odpovídají stejné permutaci. Obecně každé jedno-cyklové permutaci odpovídá n cyklů s n různými začátky. Jedno-cyklových permutací tedy je $(n - 1)!$.

Matematická indukce

Příklad 4. Dokažte matematickou indukcí, že platí vztah

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Řešení. Pro $n = 1$ to platí protože $1^3 = (1)^2 = 1$. Předpokládejme, že to víme pro n a chceme pro $n + 1$. Potom

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \\ &= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2 \end{aligned}$$

Příklad 5. Nechť x je reálné číslo splňující, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokažte matematickou indukcí, že potom je $x^n + \frac{1}{x^n}$ také celé číslo pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Řešení. Nechť $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Označme $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$. Postupujeme silnou indukcí podle n. Pro $n = 1$ to platí z předpokladu. a pro $n = 0$ také, jelikož $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$. Předpokládejme že to už umíme pro $0, 1, 2, \ldots, n$ a dokazujeme pro $n + 1$, kde $n + 1 \geq 2$. Zkusme vynásobit a_n s a_1:

$$a_n \cdot a_1 = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n-1}} = a_{n+1} + a_{n-1}.$$

Tedy $a_{n+1} = a_n \cdot a_1 - a_{n-1}$. Jelikož o všech třech číslech na pravé straně rovnice již víme, že jsou celá, tak číslo na levé straně rovnice také musí být celé.

Příklad 6. Dokažte, že každé přirozené číslo $n > 1$ lze rozložit na součin prvočísel.

Řešení. Použijeme silnou indukci. Báze naší indukce je $n = 2$. Nyní předpokládejme, že to umíme pro všechna $a < n$, a že to chceme ukázat pro n. Pokud je n prvočíslo, rozklad je pouze n a jsme hotovi. Jinak existují čísla $2 \leq a, b < n$ taková, že $n = a \cdot b$. Jelikož a i b již umíme rozložit na součin prvočísel, tak n také, tím že tyto součiny vynásobíme.

Všimněte si, že jsme neukázali, že ten rozklad je jednoznačný! Tomuto silnějšímu tvrzení se říká *Základní věta aritmetiky* a dokázat ji je podstatně složitější (ale nic hrozného, asi na 1 a půl stránky).

Diskrétní pravděpodobnost

Definice. Klasický pravděpodobnostní prostor je uspořádaná trojice $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, kde

- Ω je konečná množina **elementárních jevů**,
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ je množina **jevů**,
- $\Pr : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je funkce přiřazující každému jevu $A \subseteq \Omega$ jeho **pravděpodobnost**

$$\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Příklad 7 (Kostky jsou vrženy)**.** Házeme n rozlišitelnými šestistěnnými kostkami.

(a) Co jsou elementární jevy našeho pravděpodobnostního prostoru? Kolik jich je?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že nám padl součet 16, pokud $n = 3$?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že na kostkách máme:

(i) alespoň 1 šestku?

(ii) právě dvě šestky?

(iii) na všech to samé číslo?

(iv) na každých dvou různá čísla?

Řešení. (a) Elementární jevy jsou zobrazení $[n] \to [6]$. Je jich 6^n.

(b) Elementární jevy kdy nám padne součet 16 jsou 664, 646, 466, 655, 565, 556. Takže $P = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$.

(c) Řešení je:

(i) Jednoduší je spočítat pravděpodobnost, že nám žádná šestka nepadla. Takových elementárních jevů je 5^n, čili tato opačná pravděpodobnost je $P' = \frac{5^n}{6^n}$ a hledaná je $P = 1 - \frac{5^n}{6^n}$.

(ii) $P = \frac{1}{6^n} \cdot \binom{n}{2} \cdot 5^{n-2}$. Nejprve vyberu které dvě kostky mají mít šestku a zbytek musí mít něco jiného.

(iii) Takových elementárních jevů je pouze 6, jeden za každé číslo, takže $P = \frac{6}{6^n} = \frac{1}{6^{n-1}}$

(iv) Takové elementární jevy odpovídání prostým zobrazením $[n] \to [6]$. Takže pro $n \leq 6$ máme $P = \frac{6^n}{6^n}$.

Příklad 8 (Výběry kuliček)**.** V sáčku je 10 modrých a 20 červených kuliček. Náhodně vybereme 7 kuliček. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme právě 3 modré a 4 červené kuličky, pokud

(a) kuličky do sáčku nevracíme?

(b) kuličky vybíráme po jedné a hned je vracíme zpět do sáčku?

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/3501/vybery-kulicek`

Kombinatorické počítání

Věta (Multinomická věta pro tři proměnné)**.** *Pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

Příklad 9 (Zapeklité výrazy)**.** Najděte koeficienty u xy^2 a u xyz v rozvoji výrazu $(x+y+z)^3$. Najděte koeficient u $a^6b^6c^6$ v rozvoji výrazu $(a^2+3b+2c^3)^{11}$.

Řešení. Pro $(x+y+z)^3$ to je $\binom{3}{1,2,0} = \frac{3!}{1!2!0!} = 3$ a $\binom{3}{1,1,1} = 6$.

Druhý výraz je zajímavější. Můžeme si představit, že $x = a^2$, $y = 3b$ a $z = 2c^3$. Potom hledáme koeficient u $x^3y^6z^2$, což je $\binom{11}{3,6,2}$. Ale za každé y co jsme vybrali musíme vynásobit 3 a za každé z musíme 2. Odpověď tedy je $\binom{11}{3,6,2} 3^6 2^2 = 13\,471\,920$.

Příklad 10 (Hokejková věta)**.** Dokažte, že sečtením k-tých prvků všech řad Pascalova trojúhelníku až po n-tou řadu získáte $(k+1)$-ní prvek $(n+1)$-ní řady. Neboli

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Řešení. Indukcí podle n opakovanou aplikací Pascalova pravidla. Pro $n = k$ platí $\sum_{i=k}^{k} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = 1$, a to se rovná $\binom{k+1}{k+1} = 1$. Nyní z n k $n+1$:

$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

Příklad 11 (Klasifikace)**.** Máme n pytlíků s různými druhy skleněnek. Na hru je třeba k kuliček. Do tabulky níže zapište počty možných výběrů.

	Nejvýše 1 skleněnka každého druhu	Libovolně mnoho skleněnek každého druhu
Záleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme		
Nezáleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme		

Řešení. $n^{\underline{k}}$, n^k, $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$.

Příklad 12 (Posloupnosti 0 a 1)**.** Kolik existuje posloupností n nul a j jedniček takových, že žádné dvě jedničky nejsou vedle sebe?

Řešení. $\binom{n+1}{j}$ protože do $n+1$ míst dávám jedničky. Mezi nulami je $n-1$ mezer, ale jedničky mohu také umístit na oba kraje, takže je celkem $n+1$ pozicí kde by jedničky mohly být. Jenom jich musím j vybrat. Takže $\binom{n+1}{j}$.