Zobrazení

- **Zobrazení** z X do Y je libovolná množina $f \subseteq X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$ splňující $(x, y) \in f$. Píšeme $f(x) = y$.
- **Složení zobrazení** $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ je zobrazení $g \circ f : X \to Z$ definované pro $x \in X$ jako $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

Příklad 1 (Vlastnosti zobrazení)**.** Rozhodněte, co platí.

(a) Jeli $g \circ f$ prosté zobrazení, musí být g prosté? Musí být f prosté?

(b) Jeli $g \circ f$ zobrazení na, musí být g na? Musí být f na?

Pozorování. *Zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X je prosté, právě tehdy, když je na.*

Příklad 2 (Nekonečna jsou zrádná)**.** Najděte příklad zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které

(a) je na, ale není prosté.

(b) je prosté, ale není na.

Permutace

- **Permutace** množiny $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ je libovolná bijekce $f : [n] \to [n]$.
- Permutace lze reprezentovat tabulkou, například $\binom{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}{7,8,6,1,9,4,2,5,3,0}$
- Nebo rozkladem na **cykly**: $0 \to 7 \to 5 \to 4 \to 9 \to 0, \quad 1 \to 8 \to 3 \to 1, \quad 2 \to 6 \to 2.$

Příklad 3. Kolik je permutací množiny $[n]$, jejichž rozklad má právě 1 cyklus?

Matematická indukce

Příklad 4. Dokažte matematickou indukcí, že platí vztah

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Příklad 5. Nechť x je reálné číslo splňující, že $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokažte matematickou indukcí, že potom je $x^n + \frac{1}{x^n}$ také celé číslo pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 6. Dokažte, že každé přirozené číslo $n > 1$ lze rozložit na součin prvočísel.

Diskrétní pravděpodobnost

Definice. Klasický pravděpodobnostní prostor je uspořádaná trojice $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, kde

- Ω je konečná množina **elementárních jevů**,
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ je množina **jevů**,
- $\Pr : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je funkce přiřazující každému jevu $A \subseteq \Omega$ jeho **pravděpodobnost**

$$\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Příklad 7 (Kostky jsou vrženy)**.** Házeme n rozlišitelnými šestistěnnými kostkami.

(a) Co jsou elementární jevy našeho pravděpodobnostního prostoru? Kolik jich je?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že nám padl součet 16, pokud $n = 3$?

(c) Jaká je pravděpodobnost, že na kostkách máme:

(i) alespoň 1 šestku?

(ii) právě dvě šestky?

(iii) na všech to samé číslo?

(iv) na každých dvou různá čísla?

Příklad 8 (Výběry kuliček)**.** V sáčku je 10 modrých a 20 červených kuliček. Náhodně vybereme 7 kuliček. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme právě 3 modré a 4 červené kuličky, pokud

(a) kuličky do sáčku nevracíme?

(b) kuličky vybíráme po jedné a hned je vracíme zpět do sáčku?

Kombinatorické počítání

Věta (Multinomická věta pro tři proměnné)**.** *Pro všechna* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \le k_1,k_2,k_3 \le n \\ k_1+k_2+k_3=n}} \binom{n}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}.$$

Příklad 9 (Zapeklité výrazy)**.** Najděte koeficienty u xy^2 a u xyz v rozvoji výrazu $(x+y+z)^3$. Najděte koeficient u $a^6b^6c^6$ v rozvoji výrazu $(a^2+3b+2c^3)^{11}$.

Příklad 10 (Hokejková věta)**.** Dokažte, že sečtením k-tých prvků všech řad Pascalova trojúhelníku až po n-tou řadu získáte $(k+1)$-ní prvek $(n+1)$-ní řady. Neboli

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Příklad 11 (Klasifikace)**.** Máme n pytlíků s různými druhy skleněnek. Na hru je třeba k kuliček. Do tabulky níže zapište počty možných výběrů.

	Nejvýše 1 skleněnka každého druhu	Libovolně mnoho skleněnek každého druhu
Záleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme		
Nezáleží na pořadí, ve kterém kuličky taháme		

Příklad 12 (Posloupnosti 0 a 1)**.** Kolik existuje posloupností n nul a j jedniček takových, že žádné dvě jedničky nejsou vedle sebe?