Princip inkluze a exkluze

Věta. *Pro libovolné konečné množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí* $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$.

Problém šatnářky. Počet permutací množiny $[n]$ bez pevného bodu je $š(n) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Příklad 1 (Kameny na šachovnici)**.** Kolika způsoby lze umístit 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby některý z řádků nebo sloupců byl zcela zaplněný?

Příklad 2 (Bojovníci)**.** Vojevůdce Karel se rozhodl naverbovat nové bojovníky do svého vojska. Každý z 80ti zájemců ovládá alespoň jednu z dovedností: boj s mečem, střelba z luku, nebo jízda na koni. Dokonce 15 z nich umí všechny tři najednou. Dále se dozvěděl, že šermovat jich umí 50 a stejný počet umí střílet z luku. Jezdit na koni nich umí 45.

Karel přijme do vojska pouze takové bojovníky, kteří ovládají právě dvě dovednosti. Ti co umí jen jednu se mu nehodí a ti co umí všechny tři by chtěli příliš velký žold. Kolik bojovníků Karel najme?

Příklad 3 (Erastothenovo síto)**.**

(a) Kolik zbyde z čísel $1, 2, \ldots, n$ po vyškrtání všech násobků $2, 3$ a 5?

(b) Co by se změnilo, kdybychom vyškrtávali násobky $4, 6$ a 10?

Příklad 4 (Šatnářka vrací úder)**.** Kolik je permutací množiny $[n]$ s právě k pevnými body?

Diskrétní pravděpodobnost

Definice. Klasický pravděpodobnostní prostor je uspořádaná trojice $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$, kde

- Ω je konečná množina **elementárních jevů**,
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ je množina **jevů**,
- $\Pr : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je funkce přiřazující každému jevu $A \subseteq \Omega$ jeho **pravděpodobnost**

$$\Pr[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Definice. Jevy A a B jsou **nezávislé**, pokud $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$.
Obecně jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou

(a) **po dvou nezávislé** pokud $\forall i \neq j$ máme $\Pr[A_i \cap A_j] = \Pr[A_i] \cdot \Pr[A_j]$,

(b) **nezávislé** pokud $\forall \varnothing \neq I \subseteq [n]$ máme $\Pr\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} \Pr[A_i]$.

Definice. Podmíněná pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B je

$$\Pr[A|B] \coloneqq \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} \qquad \text{(definované pouze pro } \Pr[B] > 0\text{)}.$$

Pozorování. *V klasickém pravděpodobnostním prostoru platí*

$$\Pr[A|B] = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}.$$

Věta (O úplné pravděpodobnosti)**.** *Pokud $B_1, \ldots, B_n$ jsou (neprázdné) disjunktní jevy, jejichž sjednocení je celé Ω, potom*

$$\Pr[A] = \Pr[B_1]\Pr[A|B_1] + \Pr[B_2]\Pr[A|B_2] + \cdots + \Pr[B_n]\Pr[A|B_n].$$

Příklad 5 (Taková normální rodinka)**.** Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Víme, že daná rodina má dvě děti a že alespoň jedno z nich je chlapec. Jaká je pravděpodobnost, že mají právě dva syny?

Příklad 6 (Pozor hoří)**.** Představte si, že v bytě cítíte kouř a víte následující: Pravděpodobnost nebezpečného požáru je 1%, ale kouř je celkem běžný (10%), např. kvůli grilování. Při 90% nebezpečných požárů je cítit kouř. Jaká je pravděpodobnost, že jde o nebezpečný požár?

Příklad 7 (Boj o nezávislost)**.** Uvažte klasický pravděpodobností prostor s $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Najděte příklad jevů $A, B, C \subseteq \Omega$ takových, že jsou po dvou nezávislé, ale nejsou nezávislé.

Příklad 8 (Barevné kuličky)**.** Máme 3 sáčky kuliček. V každém z nich je přesně 100 kuliček.

- První sáček obsahuje 75 červených a 25 modrých kuliček.
- Druhý sáček obsahuje 60 červených a 40 modrých kuliček.
- Třetí sáček obsahuje 45 červených a 55 modrých kuliček.

Náhodně vybereme jeden sáček a potom z něj náhodně vybereme jednu kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude červená? *Hint:* Použijte větu o úplné pravděpodobnosti.

Bonusové úlohy

Příklad 9. Kolik existuje permutací čísel $1, 2, \ldots, 10$, v nichž se žádné sudé číslo nezobrazí samo na sebe?

Příklad 10. Eulerova funkce $\varphi(n)$ je počet čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nesoudělných s n. Nechť $n \geq 2$ má prvočíselný rozklad $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$, kde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ jsou navzájem různá prvočísla. Pomocí principu inkluze a exkluze dokažte, že platí

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1-1) \cdot p_2^{k_2-1}(p_2-1) \cdots p_m^{k_m-1}(p_m-1) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).$$

Příklad 11 (Union bound)**.** Dokažte, že pro libovolné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ platí

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Příklad 12 (Nezávislost doplňků)**.** Dokažte, že pokud jsou jevy A a B nezávislé, potom jsou nezávislé i jevy A a $\overline{B} = \Omega \setminus B$.

Příklad 13. Dokažte, že pokud počet elementárních jevů $|\Omega|$ klasického pstního prostoru je prvočíslo, potom jsou dva jevy A a B nezávislé právě tehdy, když jeden z nich je $\varnothing$ nebo Ω.