Náhodné veličiny

- **Náhodná veličina** X na diskrétním pstním prostoru $(\Omega, \Pr)$ je zobrazení $X : \omega \to \mathbb{R}$.
- Pro náhodnou veličinu X a hodnotu $a \in \mathbb{R}$ definujeme jev $X = a$ jako $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$.
- **Střední hodnota** náhodné veličiny X je

$$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\{\omega\}] = \sum_{a \in \mathrm{Rng}(X)} a \cdot \Pr[X = a],$$

  kde $\mathrm{Rng}(X)$ značí obor hodnot (anglicky *range*) zobrazení X.

Věta (Linearita střední hodnoty)**.** $\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n] = \alpha_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \alpha_n \mathbb{E}[X_n]$.

Příklad 1 (Hazard se ne/vyplácí)**.** Nové kasino nabízí hazardní hru se dvěma férovými šestistěnnými kostkami: Nejprve si zvolíte přirozené číslo n. Následně zaplatíte jeden žeton a hodíte kostkami. Padne-li na kostkách součet hodnot n, tak vyhráváte n žetonů. V opačném případě nedostanete nic.

- Rozmyslete si, v jakém pravděpodobnostním prostoru se hra odehrává.
- Navrhněte náhodnou veličinu, která bude odpovídat počtu získaných žetonů pro dané n.
- Rozhodněte, pro které hodnoty n se vám tato hra vyplatí.

Příklad 2 (Základní rozdělení)**.** Pro náhodnou veličinu X z následujících pstních rozdělení spočítejte pravděpodobnosti jednotlivých hodnot X a určete $\mathbb{E}[X]$.

(a) **Bernoulliho:** Hodíme mincí, kde s pravděpodobností p padne orel. X je 1 pokud padne orel, jinak je 0.

(b) **Binomické:** X je součet n náhodných nezávislých veličin s Bernoulliho rozdělením. To odpovídá tomu, že tou mincí hodíme n-krát a sečteme výsledky.

(c) **Geometrické:** X je počet Bernoulliho pokusů, dokud nedostaneme 1. Tedy házíme mincí dokud nám nepadne orel.

Příklad 3 (Zaječí úmysly)**.** Na palouku panáčkuje n zajíců. Najednou se z lesa vynoří n myslivců, každý z nich zamíří na jednoho náhodně vybraného zajíce a zastřelí ho.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden zajíc přežije?

(b) Jaká je střední hodnota počtu přeživších zajíců?

Příklad 4 (Gotta catch 'em all!)**.** V novém Pokémoním setu je n karet. Kolik si jich průměrně musíme koupit, než získáme všechny? Předpokládáme, že všechny karty jsou stejně pravděpodobné.

Markovova nerovnost

Věta (Markovova nerovnost)**.** *Pokud je X nezáporná náhodná veličina a $t > 0$, potom*

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$

Příklad 5 (Už se nevejdete)**.** Dopravní podnik na jedné autobusové lince spustil počítání cestujících. Spočítal, že při výjezdu z vybrané zastávky se v autobuse vyskytuje průměrně 8 cestujících. Autobus má kapacitu 40 lidí. Co můžeme říci o pravděpodobnosti, že po obsloužení této zastávky bude autobus plný (nebo dokonce přeplněný)?

Příklad 6 (Průměrný věk)**.** Na konferenci přišlo 100 matematiků a jejich průměrný věk je n. Rozhodněte, zda mohou nastat následující situace:

(a) Více než polovina z nich má méně než $0.5n$ let.

(b) Více než polovina z nich má alespoň $2n$ let.

Rozptyl

- **Rozptyl** náhodné veličiny X je $\mathrm{Var}[X] \coloneqq \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)^2\big]$.

Pozorování. $\mathrm{Var}[X] \geq 0$ *jelikož náhodná veličina* $(X - \mathbb{E}X)^2$ *je vždy nezáporná.*

Příklad 7 (Užitečný vzoreček)**.** Dokažte, že platí rovnost $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$.

Příklad 8 (AQ nerovnost)**.** Odvoďte z předchozí úlohy nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Příklad 9 (Rozptyl hodu mincí)**.** Určete rozptyl náhodné veličiny X z Bernoulliho rozdělení s pravděpodobností p.

Příklad 10 (Bude to lineární?)**.** Určete kolik je $\mathrm{Var}[\alpha X]$ za předpokladu, že znáte $\mathrm{Var}[X]$.

Bonusové úlohy

Příklad 11 (Union bound)**.** Dokažte, že pro libovolné jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$ platí

$$\Pr\Big[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Definice. Náhodné veličiny X a Y jsou **nezávislé**, pokud pro všechny dvojice hodnot $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že jevy $X = x$ a $Y = y$ jsou nezávislé. Tedy, že $\Pr[X = x \wedge Y = y] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y]$.

Věta (Pravidlo naivního statistika)**.** *Pokud jsou* X, Y *náhodné veličiny a* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, potom*

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Rng}(X) \\ y \in \mathrm{Rng}(Y)}} g(x,y) \cdot \Pr[X = x \wedge Y = y].$$

Příklad 12. Dokažte, že pokud X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny, pak platí

(a) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, … použijte $g(X,Y) = X \cdot Y$

(b) $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$. … rozepište to pomocí linearity $\mathbb{E}$ a použijte (a)