Grafy

Definice. Graf $G = (V, E)$ se skládá z množiny vrcholů V a množiny hran $E \subseteq \binom{V}{2}$.

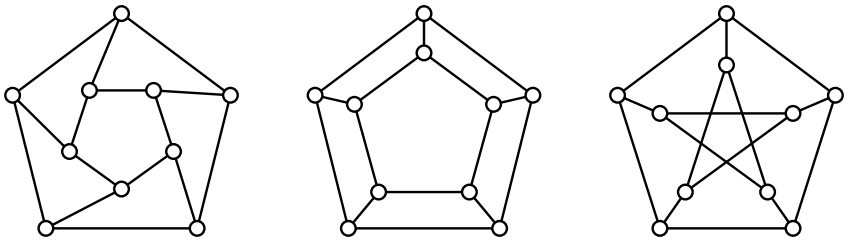
Důležité grafy:

- K_n úplný graf (klika) na n vrcholech.
- C_n kružnice (cyklus) na n vrcholech.
- P_n cesta na n vrcholech.
- $K_{n,m}$ úplný bipartitní graf s partitami velikosti n a m.

Definice. Dva grafy G a H jsou **izomorfní**, jestliže existuje bijekce $f : V_G \to V_H$ taková, že

$$\{u, v\} \in E_G \iff \{f(u), f(v)\} \in E_H, \qquad \text{pro všechny vrcholy } u, v \in V_G.$$

Příklad 1 (Odhalujeme kamufláž)**.** Jsou některé z následujících grafů izomorfní? Pokud ano, najděte izomorfismus. Pokud ne, dokažte, že nejsou.



Řešení. První dva jsou izomorfní, třetí s nimi izomorfní není. To lze nahlédnou třeba tak, že druhý graf má 5 cyklů délky 4, zatímco třetí graf nemá žádný. Obecně když chceme ukázat, že nějaké dva grafy nejsou izomorfní, tak stačí najít nějakou vlastnost, ve které se liší. Například jeden má vrchol stupně 4 a druhý ne. Nebo jeden má dva vrcholy stupně 5, které spolu sousedí, a druhý ne.

Definice. Doplněk grafu $G = (V, E)$ je $\overline{G} = \big(V, \binom{V}{2} \setminus E\big)$. Tedy graf s opačnými hranami.

Příklad 2 (Doplňkový graf)**.** Najděte graf, který je izomorfní svému doplňku. Jaký musí být vztah mezi počtem jeho vrcholů a hran?

Řešení. Například P_4 nebo C_5. Jelikož musí mít stejný počet hran jako nehran, tak musí platit, že $m = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$, kde m značí počet hran a n počet vrcholů.

Příklad 3 (Doplněk nesouvislého)**.** Dokažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý (ale opačně to obecně neplatí).

Řešení. Mezi každými dvěma komponentami vznikne úplný bipartitní graf, a ten je souvislý. (A případné hrany navíc souvislost nepokazí.)

Příklad 4 (Liché cykly)**.** Dokažte, že pokud G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, potom obsahuje lichý cyklus také jako indukovaný podgraf.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/3579/indukovany-cyklus`

Stupně vrcholů a skóre grafu

- **Stupeň** vrcholu $\deg(v)$ je počet jeho sousedů.
- **Skóre** grafu je neklesající posloupnost stupňů jeho vrcholů.

Pozorování. *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$.*

Příklad 5 (Hrajeme si se skóre)**.**

(1) Najděte dva neizomorfní grafy se stejným skóre.

(2) Je posloupnost $(1, 2, 2, 3, 4, 6)$ skóre nějakého grafu?

(3) Je posloupnost $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ skóre nějakého grafu?

(4) Je posloupnost $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ skóre nějakého grafu? ... těch trojek je 11

Řešení. (1) Třeba cyklus délky 6 a dva cykly délky 3. Nebo první a třetí graf z Úlohy 1.

(2) Ne, jelikož celkem máme 6 vrcholů, ale chtěli bychom aby jeden z nich měl stupeň 6, což není možné.

(3) Ano, například cyklu délky 6.

(4) Ne, jelikož součet stupňů $11 \cdot 3$ je lichý a má být roven dvojnásobku počtu hran, což je sudé číslo.

Věta o skóre: Neklesající posloupnost $(d_1, \ldots, d_n, d_{n+1})$ je skóre grafu $\iff$ pro $k = n - d_{n+1}$ platí, že přerovnáním posloupnosti $(d_1, \ldots, d_k, d_{k+1} - 1, \ldots, d_n - 1)$ vznikne skóre grafu.

Příklad 6 (Použití věty o skóre)**.** Určete, zda následující posloupnosti jsou skóre nějakého grafu. Pokud ano, nějaký takový graf nakreslete.

- $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$
- $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$

Řešení. V prvním případě ne, ve druhém ano, viz `https://matematika.reseneulohy.cz/3621/graf-s-predepsanym-skore`.

Příklad 7 (Užitečné pravidlo)**.** Dokažte, že každý graf má dva vrcholy se stejným stupněm. Tedy nějaké číslo se ve skóre musí zopakovat.

Řešení. Pokud je vrcholů celkem n, tak je dohromady n možností na to co může být stupeň: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Jediná posloupnost, délky n, ve které se žádné z čísel neopakuje, je $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Ale to není skóre žádného grafu, jelikož poslední vrchol stupně $n - 1$ by měl být spojen hranou se všemi ostatními, ale první vrchol má stupeň 0, tedy nemá žádného souseda.

Příklad 8 (Stejné skóre není vše)**.** Určete, jaké vlastnosti lze vyčíst ze skóre grafu:

(a) počet jeho vrcholů,

(b) počet jeho hran,

(c) zda je souvislý,

(d) zda je to strom.

Řešení. Počet vrcholů je délka posloupnosti, takže ano. Počet hran taky ano, jelikož součet skóre je roven dvojnásobku počtu hran. Na poslední dvě otázky je odpověď záporná, viz `https://matematika.reseneulohy.cz/3622/stejne-skore`.

Bonusové příklady

Příklad 9. Uvažte grafy (včetně vzájemně izomorfních) na množině vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

(1) Kolik jich je?

(2) Kolik z nich je izomorfních cestě P_n?

(3) Kolik z nich je izomorfních cyklu C_n?

(4) Kolik z nich je izomorfních klice K_n?

Příklad 10. Ukažte, že $H \subseteq_i G \iff \overline{H} \subseteq_i \overline{G}$, kde $\subseteq_i$ značí indukovaný podgraf.

Příklad 11 (Nedokonalý izomorfismus)**.** Co by se stalo, kdybychom definici izomorfismu upravili:

(a) místo bijekce vyžadujeme jen prostou funkci?

(b) místo ekvivalence uvažujeme implikaci $\implies$?

(c) oboje najednou: prostou funkci a implikaci místo ekvivalence?

Řešení. (a) Pak by to pro $f\colon V_G \to V_H$ znamenalo, že G je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu grafu H.

(b) G je izomorfní nějakému podgrafu H' grafu H, který má stejný počet vrcholů jako celý graf H.

(c) G je izomorfní nějakému podgrafu grafu H.

Definice. Matice sousednosti grafu $G = (V, E)$ je $A \in \{0, 1\}^{V \times V}$, kde $A_{u,v} = 1$ pokud $uv \in E$ a jinak $A_{u,v} = 0$.

Příklad 12. Nechť A je matice sousednosti grafu G.

(1) Čemu je roven součet čísel v i-tém řádku?

(2) Čemu je roven součet všech čísel v matici A?

(3) Čemu je roven součet všech čísel na hlavní diagonále matice A^2?