Bipartitní grafy, eulerovské grafy, stromy, kostry

- Graf G je **bipartitní**, pokud je podgrafem $K_{n,m}$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N}$.
- Graf G je **eulerovský**, pokud obsahuje **eulerovský tah**: tedy uzavřený tah (hrany se neopakují, vrcholy mohou), který obsahuje všechny hrany.
- Graf G je **strom**, pokud je souvislý a acyklický.
- **Kostra** grafu G je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy a je stromem.

Věta. *Graf je eulerovský* $\iff$ *je souvislý a má všechny stupně sudé.*

Příklad 1 (Košaté stromy)**.** Dokažte, že obsahuje-li strom vrchol stupně k, pak má alespoň k listů (list je vrchol stupně 1).

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/4076/pocet-listu`

Příklad 2 (Tudy most nevede)**.** Dokažte, že graf G, jehož každý vrchol má sudý stupeň, neobsahuje žádný most. **Most** je hrana e taková, že $G - e$ má více komponent souvislosti než G.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/3623/grafy-se-sudymi-stupni`

Příklad 3 (Bipartitní stromy)**.** Dokažte, že každý strom je bipartitní.

Řešení. Nechť T je strom. Vybereme nějaký vrchol $v \in T$ a rozdělíme T na úrovně podle vzdálenosti od v. Vzdálenost vrcholu u od v v grafu G je délka nejkratší cesty. Ve stromech je to o to jednodušší, protože mezi každými dvěma vrcholy vede právě jedna cesta. Můžeme si to představit tak, že strom „zakořeníme“ ve vrcholu v a zbytek z něj roste dál. Množinu vrcholů V stromu T rozdělíme na dvě partity A a B. Vrchol v dáme do A, vrcholy ve vzdálenosti 1 od v dáme do B, vrcholy ve vzdálenosti 2 do A, ve vzdálenosti 3 zase do B, 4 do A atd.

Abychom ukázali, že tohle funguje, musíme argumentovat, že nemůže existovat hrana mezi dvěma vrcholy ve stejné partitě. Kdyby byla hrana mezi dvěma vrcholy ve stejné vzdálenosti, tak by tato hrana uzavřela cyklus, což je spor s tím že T je strom. Hrana mezi dvěma vrcholy u a w ve stejné partitě existovat nemůže, protože by pak jejich úrovně byly nejvýše 1 od sebe (pokud vzdálenost u od v je 10 a uw je hrana, pak vzdálenost w od v je $\in \{9, 10, 11\}$).

Příklad 4 (Lekce anatomie)**.** Dokažte, že když je graf souvislý, tak má kostru. Platí to i naopak?

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/4079/existence-kostry`

Příklad 5 (Eulerovské grafy)**.** Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské:

(a) Souvislý graf G s lichým počtem vrcholů, jehož doplněk má všechny stupně sudé.

(b) Pro libovolnou (neprázdnou) množinu M graf G_M s vrcholy $V = \mathcal{P}(M)$ a hranami

$$E = \{\{A, B\} \mid A \cap B = \varnothing\}, \quad \text{kde } A, B \subseteq M.$$

(c) Graf G'_M, který vznikne z G_M odstraněním vrcholu M (a všech hran s ním incidentních).

Řešení. (a) Pokud má G lichý počet vrcholů a jeho doplněk má sudé stupně, tak má G také sudé stupně, takže je eulerovský.

(b) Musíme určit, zda mají vrcholy sudé stupně. Vrchol $A \subseteq M$ je spojen hranou se všemi vrcholy $B \subseteq M$ takovými, že $A \cap B = \varnothing$. Tyto vhodné B jsou právně podmnožiny $M \setminus A$, takže jich je $2^{|M|-|A|}$. Tohle je sudé až na dva případy:

- pokud $A = M$, tak $2^0 = 1$,
- pokud $A = \varnothing$, tak ve skutečnosti jde o $2^{|M|-|\varnothing|} - 1$ hran, protože $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, ale nepovolujeme smyčky, takže musíme vynechat hranu z $\varnothing$ do $\varnothing$.

Takže to není eulerovský graf.

(c) Ovšem pokud odstraníme vrchol M a jeho (jedinou) hranu do vrcholu $\varnothing$, tak už všechny stupně sudé budou a graf je tedy eulerovský.

Příklad 6 (Velký bipartitní podgraf)**.** Dokažte, že každý graf G obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{1}{2}|E(G)|$ hranami.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/3580/bipartitni-podgraf`

Příklad 7 (Každý most je kost)**.** Dokažte, že je-li hrana e most, pak ji každá kostra obsahuje.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/4080/mosty-v-kostre`

Příklad 8 (Vyvážená orientace)**.** Mějme neorientovaný graf, jehož všechny vrcholy mají sudé stupně. Dokažte, že je možné hrany zorientovat tak, aby se v každém vrcholu vstupní stupeň rovnal výstupnímu.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/4314/vyvazena-orientace`

Příklad 9 (Nadvláda listů)**.** Ukažte, že každý strom, který má alespoň 2 vrcholy a neobsahuje žádný vrchol stupně 2, má více listů než vnitřních vrcholů.

Řešení. Podobně jako v úloze „Bipartitní stromy“ strom nejprve zakořeníme. Pak postupujeme indukcí podle hloubky / výšky (počtu úrovní) stromu. Báze naší indukce je kořen se třemi listy. Ten má 1 vnitřní vrchol a 3 listy, takže tvrzení splňuje. Nyní ukážeme, že když T tvrzení splňuje a některý jeho list učiníme vnitřním vrcholem stupně > 2 tím, že na něj pověsíme ≥ 2 nové listy, tak výsledný strom bude tvrzení stále splňovat. Toto by měli být snadno vidět: ztratili jsme 1 list, získali 1 vnitřní vrchol a získali 2 listy, takže se na „poměru sil“ nic nezměnilo.

Definice. Line graf $L(G)$ grafu G má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol. Formálně:

$$V(L(G)) = E(G), \quad E(L(G)) = \{\{e, f\} \mid e \cap f \neq \varnothing\}.$$

Příklad 10 (Sudost line grafů)**.** Dokažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf také eulerovský.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/3632/sudost-line-grafu`

Příklad 11 (Skóre stromu)**.** Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, kde $n \geq 2$. Dokažte, že $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je skóre stromu $\iff \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Řešení. Každý strom musí toto splňovat jelikož $|E| = |V| - 1$. Opačná implikace indukcí viz `https://matematika.reseneulohy.cz/4075/skore-stromu`.

Příklad 12 (Počet koster)**.** Určete, kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{n,2}$.

Řešení. `https://matematika.reseneulohy.cz/4538/pocet-koster-bipartitniho-grafu`