Bipartitní grafy, eulerovské grafy, stromy, kostry

- Graf G je **bipartitní**, pokud je podgrafem $K_{n,m}$ pro nějaké $m, n \in \mathbb{N}$.
- Graf G je **eulerovský**, pokud obsahuje **eulerovský tah**: tedy uzavřený tah (hrany se neopakují, vrcholy mohou), který obsahuje všechny hrany.
- Graf G je **strom**, pokud je souvislý a acyklický.
- **Kostra** grafu G je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy a je stromem.

Věta. *Graf je eulerovský* $\iff$ *je souvislý a má všechny stupně sudé.*

Příklad 1 (Košaté stromy)**.** Dokažte, že obsahuje-li strom vrchol stupně k, pak má alespoň k listů (list je vrchol stupně 1).

Příklad 2 (Tudy most nevede)**.** Dokažte, že graf G, jehož každý vrchol má sudý stupeň, neobsahuje žádný most. **Most** je hrana e taková, že $G - e$ má více komponent souvislosti než G.

Příklad 3 (Bipartitní stromy)**.** Dokažte, že každý strom je bipartitní.

Příklad 4 (Lekce anatomie)**.** Dokažte, že když je graf souvislý, tak má kostru. Platí to i naopak?

Příklad 5 (Eulerovské grafy)**.** Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské:

(a) Souvislý graf G s lichým počtem vrcholů, jehož doplněk má všechny stupně sudé.

(b) Pro libovolnou (neprázdnou) množinu M graf G_M s vrcholy $V = \mathcal{P}(M)$ a hranami

$$E = \{\{A, B\} \mid A \cap B = \varnothing\}, \quad \text{kde } A, B \subseteq M.$$

(c) Graf G'_M, který vznikne z G_M odstraněním vrcholu M (a všech hran s ním incidentních).

Příklad 6 (Velký bipartitní podgraf)**.** Dokažte, že každý graf G obsahuje bipartitní podgraf s alespoň $\frac{1}{2}|E(G)|$ hranami.

Příklad 7 (Každý most je kost)**.** Dokažte, že je-li hrana e most, pak ji každá kostra obsahuje.

Příklad 8 (Vyvážená orientace)**.** Mějme neorientovaný graf, jehož všechny vrcholy mají sudé stupně. Dokažte, že je možné hrany zorientovat tak, aby se v každém vrcholu vstupní stupeň rovnal výstupnímu.

Příklad 9 (Nadvláda listů)**.** Ukažte, že každý strom, který má alespoň 2 vrcholy a neobsahuje žádný vrchol stupně 2, má více listů než vnitřních vrcholů.

Definice. Line graf $L(G)$ grafu G má za vrcholy hrany G a dva vrcholy v $L(G)$ reprezentující hrany e a f spolu sousedí právě když e a f mají společný vrchol. Formálně:

$$V(L(G)) = E(G), \quad E(L(G)) = \{\{e, f\} \mid e \cap f \neq \varnothing\}.$$

Příklad 10 (Sudost line grafů)**.** Dokažte, že je-li graf G eulerovský, pak je jeho line graf také eulerovský.

Příklad 11 (Skóre stromu)**.** Mějme posloupnost čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$, kde $n \geq 2$. Dokažte, že $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je skóre stromu $\iff \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Příklad 12 (Počet koster)**.** Určete, kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{n,2}$.