Barevnost, rovinné grafy

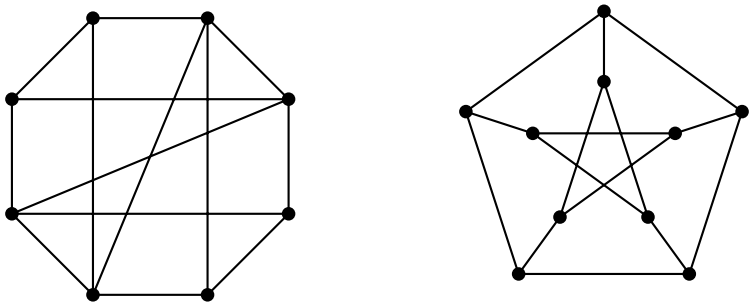
- **Obarvení** grafu $G = (V, E)$ pomocí k barev je zobrazení $c : V \to [k]$ takové, že
$$(\forall u, v \in V) : \{u, v\} \in E \implies c(u) \neq c(v).$$
Tedy sousední vrcholy dostanou různé barvy.
- Graf G je **k-obarvitelný** pokud existuje nějaké obarvení G pomocí k barev.
- **Chromatické číslo** $\chi(G)$ grafu G je nejmenší počet barev k takový, že G je k-obarvitelný.
- Graf je **rovinný** pokud jej lze nakreslit do roviny bez křížení hran.

Věta (Eulerova formule)**.** *Pro každé rovinné nakreslení souvislého grafu G platí $|V|-|E|+|F| = 2$, kde F je množina stěn.*

Pozorování. *Když $|E| \geq 3$, potom $3|F| \leq 2|E|$, takže $|E| \leq 3|V| - 6$.*

Věta (Kuratowski)**.** *Graf je rovinný $\iff$ neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ jako podgraf.*

Příklad 1 (Řekněme si to na rovinu)**.** Rozhodněte, zda jsou následující grafy rovinné.



Příklad 2 (Staří známí)**.** Stanovte chromatické číslo následujících grafů:

- cesta P_n a cyklus C_n,
- úplný graf K_n a úplný bipartitní graf $K_{n,m}$,
- libovolný strom T.

Příklad 3 (Jeden to musí být)**.** Dokažte, že pro každý graf G na jedenácti vrcholech je buď G nebo $\overline{G}$ nerovinný.

Příklad 4 (Barevnost, kliky a stupně)**.** Označme maximální stupeň grafu G jako $\Delta(G)$ a velikost největší kliky (podgrafu izomorfního úplnému grafu) v G jako $\omega(G)$. Dokažte, že pro každý graf G platí $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
Hint: Pro tu druhou nerovnost zkuste vymyslet nějaký jednoduchý barvicí algoritmus.

Příklad 5 (Malý stupeň, mnoho radosti)**.** Dokažte, že každý rovinný graf je 6-obarvitelný.
Hint: Zkuste ten jednoduchý barvicí algoritmus vylepšit.

Příklad 6 (Dračí doupě)**.** Pro každé $k \geq 1$ určete, zda existuje k-regulární rovinný graf.
Hint: Můžete například využít toho, že grafy odpovídající kostrám těles v prostoru jsou rovinné.

Příklad 7 (Regularita není zadarmo)**.** Může existovat 3-regulární rovinný graf a jeho nakreslení, kde všechny stěny budou šestiúhelníky? A co pětiúhelníky?

Příklad 8 (Věta o 4 barvách pro grafy bez trojúhelníků)**.** Dokažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků je 4-obarvitelný.

Příklad 9 (Kreslení na jiné plochy)**.** Nakreslete $K_{3,3}$ na torus bez křížení hran.