Množiny

Definice. Množina A je *spočetná*, pokud existuje bijekce mezi A a množinou všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Příklad 1. Dokažte bez kódování pomocí prvočísel, že pokud je A spočetná, potom je $A \times A$ také spočetná.

Příklad 2. Dokažte, že pokud je A spočetná, potom

(a) množina $[A]^{<\omega}$ všech konečných podmnožin množiny A je spočetná,

(b) množina $A^{<\omega}$ všech konečných posloupností prvků množiny A je spočetná.

Příklad 3. Ukažte, že množina všech podmnožin spočetné množiny je nespočetná.

Příklad 4. Dokažte princip inkluze a exkluze. Tedy, že pokud $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou konečné množiny, potom

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{\varnothing \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \cdot \Big|\bigcap_{i \in I} A_i\Big|.$$

Teorie čísel

Tohle není diskrétka, ale jsou to pěkné úlohy :-).

Definice. Riemannova zeta funkce komplexního čísla $s \in \mathbb{C}$ s reálnou složkou $\Re(s) > 1$ definujeme jako

$$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots .$$

Pro $s = 1$ bychom dostali Harmonickou řadu, která diverguje. Ovšem dá se ukázat, že pro každé $s \in \mathbb{C}$ s $\Re(s) > 1$ tato řada konverguje absolutně.

Příklad 5 (Basilejský problém)**.** Ukažte, že $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Nápověda. Zkoumejte Taylorův rozvoj funkce $\frac{1}{x}\sin(x)$.

Příklad 6. Ukažte, že $\sum_{s=2}^{\infty} \big(\zeta(s) - 1\big) = 1$

Příklad 7 (Eulerův součin)**.** Dokažte, že pro každé $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$ platí, že

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}},$$

kde produkty bereme přes všechna prvočísla p.

Kombinatorika

Příklad 8. Označme p_n součin prvků n-té řady Pascalova trojúhelníku. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1} \cdot p_{n+1}}{p_n^2} = e.$$

Příklad 9. Dokažte, že pro každé $k \geq 2$ platí

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{k-1}.$$

Příklad 10. Dokažte Wallisův produkt

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

a z toho odvozte asymptotický odhad prostředního kombinačního čísla

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Nápověda. Zkoumejte Taylorův rozvoj funkce $\frac{1}{x}\sin(x)$.

Příklad 11. Dokažte pomocí principu holubníku Erdősovu–Szekeresovu větu. Že v každé permutaci n^2 různých reálných čísel existuje monotónní (tedy buď rostoucí nebo klesající) podposloupnost délky n.

Pravděpodobnost

Příklad 12. Dokažte, že existují konstanty $\alpha, \beta > 0$ takové, že pro všechna přirozená čísla n, m platí:

(a) Pokud $m \geq \alpha \cdot n^2$, potom je náhodné zobrazení $[n] \to [m]$ prosté s pravděpodobností alespoň 0.99.

(b) Pokud $m \leq \beta \cdot n^2$, potom je náhodné zobrazení $[n] \to [m]$ prosté s pravděpodobností nejvýše 0.01.

Příklad 13. $G(n,p)$ je náhodný graf na n vrcholech, kde každá dvojice vrcholů tvoří hranu s pravděpodobností p, nezávisle na všech ostatních dvojicích. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[G(n,1/2) \text{ je souvislý}] = 1.$$

Příklad 14 (Pravidlo naivního statistika)**.** Dokažte, že pro libovolné náhodné veličiny X, Y a libovolnou funkci $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Rng}(X) \\ y \in \mathrm{Rng}(Y)}} g(x,y) \cdot P[X = x \wedge Y = y].$$

Definice. Determinant matice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je

$$\det(M) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \prod_i A_{i,\pi(i)},$$

kde S_n je množina všech permutací $\pi : [n] \to [n]$ a $\mathrm{sgn}(\pi)$ je *znaménko* permutace π, které je definované jako $n - k$, kde k je počet cyklů π.

Příklad 15. Nechť M je $n \times n$ matice jejíž prvky jsou náhodně rovnoměrně nezávisle vybrané z hodnot 1 a -1. Dokažte, že $\mathbb{E}[\det(M)] = 0$ (to by mělo být jednoduché) a že $\mathbb{E}[\det(M^2)] = n!$.

Nápověda. Pro druhou část se vám bude hodit vztah $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Grafy

Definice. n-tá mocnina grafu $G = (V, E)$ je graf G^n, jehož množina vrcholů je V^n, a vrcholy $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ a $(u_1, \ldots, u_n) \in V^n$ tvoří hranu pokud $v_i u_i \in E$ pro všechna i.

Příklad 16. Dokažte, že každý konečný graf je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu nějaké mocniny dostatečně velkého úplného grafu.